THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

515
~~517~~
C126
v.4

MATHEMATICS

515
C126
v.4

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter.

Diese Zeitschrift erscheint monatlich.
Bezugspreis für das Jahr 3 M.
Einzelnummer 40 Pfg.
Bestellungen nimmt der Geschäftsleiter entgegen.

Zeitschrift des Arnstädter Verbandes mathematischer u. naturwissenschaftlicher Vereine an Deutschen Hochschulen.

Anzeigen nimmt der Schriftleiter entgegen.
1/1 Seite 20 M., 1/2 12 M.,
1/4 6,50 M., 1/8 3,50 M.
Die Halbzeile 30 Pfg.
Bei Wiederholung Preisermässigung.

Nummer 4. Berlin, April 1913. 10. Jahrgang.

Quadratur einer Klasse von Sextiken.

Von **Werner Gaedecke** in Berlin.

(Fortsetzung.)

7. Die Normale in M schneide die Ellipse in N. Von der Mitte J der Normalsehne MN ziehe man die drei Normalen, deren Fußpunkte das Dreieck $R_1\ S_1\ T_1$ bilden. Ort des Schwerpunktes und des Höhenschnittpunktes des Dreiecks $R_1\ S_1\ T_1$.

Die Koordinaten von J ergeben sich aus der Gleichung der Normale MN $ax \sin\varphi - by\cos\varphi = c^2 \sin\varphi\cos\varphi$ und des zu MN konjugierten Durchmessers $a^3 y \sin\varphi + b^3 x\cos\varphi = O$ zu:

$$x_J = \frac{a^3 c^2 \sin^2\varphi\cos\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}, \quad y_J = -\frac{b^3 c^2 \sin\varphi\cos^2\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}.$$

Nach dem in Nr. 5 angewendeten Verfahren erhält man

$$x_G = \frac{a\cos\varphi\,(a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi)}{3\,(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}, \quad y_G = -\frac{b\sin\varphi\,(a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi)}{3\,(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}$$

oder

$$9\,(b^6x^2 + a^6y^2)^2\,(b^2x^2 + a^2y^2) = a^2b^2\,(b^6x^2 - a^6y^2)^2,$$

deren Unterschied von (4) leicht einzusehen ist. Man hat

$$U = \frac{\pi ab\,(a^4+b^4)}{9\,(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{36}\left(3\pi ab + \frac{\pi abc^4}{(a^2+b^2)^2}\right).$$

Die Bestimmung des Höhenschnittes erfordert zunächst die des Mittelpunktes C des Umkreises. C ist bekanntlich der Mittelpunkt des Joachimsthalschen Kreises, der durch R, S, T, und M' geht. Seine Koordinaten sind

$$x_C = \frac{b^2\,\beta\,x_1}{2a^2y_1}, \quad y_C = \frac{a^2\,\alpha\,y_1}{2b^2\,x_1}.$$

Setzt man für α und β die Werte von x_J und y_J, für $x_1 = a\cos\varphi$, $y_1 = b\sin\varphi$ ein, so wird

$$x_C = -\frac{b^4c^2\cos^3\varphi}{2a\,(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}, \quad y_C = \frac{a^4c^2\sin^3\varphi}{2b\,(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}.$$

Für den Höhenschnitt H hat man:

$$x_H = 3x_G - 2x_C, \qquad y_H = 3y_G - 2x_C, \text{ mithin}$$

$$x_H = \frac{\cos\varphi\,(a^6\sin^2\varphi - b^6\cos^2\varphi)}{a\,(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}, \qquad y_H = \frac{-\sin\varphi\,(a^6\sin^2\varphi - b^6\cos^2\varphi)}{b\,(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}$$

oder

$$(a^2x^2 + b^2y^2)\,(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = (b^4x^2 - a^4y^2)^2.$$

Es ist $A = a^5$, $B = -\frac{a^6 + b^6}{a}$, $A' = b^5$, $B' = -\frac{a^6 + b^6}{b}$, $\alpha = a^2$, $\beta = b$

und $U = \frac{\pi}{2ab}\left[2(a^4 + b^4) - 3a^2 b^2\right] = \frac{\pi ab}{2} + \frac{\pi c^4}{ab} = \frac{E}{2} + \frac{8}{3} D$,

wenn E und D bez. die Inhalte der Ellipse und ihrer Evolute bezeichnen. Man kann aber dieses Ergebnis auch dahin aussprechen, daß der Flächeninhalt der Kurve I gleich der Summe der halben Ellipsenfläche und der Fläche derjenigen Ellipse ist, deren Scheitel in den Spitzen der Evolute der gegebenen Ellipse liegen.

8. Man errichte auf dem Radiusvektor OM in M das Lot, das die Ellipse in I schneide. Ort der Mitte von MD.

Die Gleichung der Geraden MD ist:

$$ax \cos\varphi + by \sin\varphi = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi .$$

Hat ihr Pol in bezug auf die Ellipse die Koordinaten α, β, so muß diese Gleichung identisch sein mit der der Polaren dieses Punktes, also $b^2 \alpha x + a^2 \beta y = a^2 b^2$, mithin

$$\alpha = \frac{a^3 \cos\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}, \quad \beta = \frac{b^3 \sin\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}.$$

Die Mitte R von MD ist der Schnittpunkt der beiden Geraden OP und MI, daher

$$x = \frac{a^3 \cos\varphi\,(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)}{a^4 \cos^2\varphi + b^4 \sin^2\varphi}, \quad y = \frac{b^3 \sin\varphi\,(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)}{a^4 \cos^2\varphi + b^4 \sin^2\varphi}$$

oder $$(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2\,(b^6 x^2 + a^6 y^2) = a^2 b^2 (b^4 x^2 + a^4 y^2)^2,$$

wodurch eine innerhalb der Ellipse verlaufende und sie in ihren Scheiteln berührende Kurve 6. Ordnung dargestellt wird.[1]) Ihr Flächeninhalt ist für

$$A = a^3 b^2,\ B = a^3 c^2,\ A' = a^2 b^3,\ B' = -b^3 c^2,\ \alpha = b^2,\ \beta = a^2$$

$$U = \frac{\pi ab\,(a^4 + 6a^2 b^2 + b^4)}{2(a^2 + b^2)^2},$$

was in der Form $U = \frac{\pi ab}{2} + \frac{2\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^2}$ die Summe zweier Ellipsenflächen darstellt,

in der Form $$U = \pi ab - \frac{\pi abc^4}{2(a^2 + b^2)^2}$$

aber zeigt, daß die von der Sextik und der gegebenen Ellipse eingeschlossene Fläche gleich der Hälfte des Inhaltes der Frégierschen Ellipse ist.[2])

(Fortsetzung folgt.)

Statistisches zur Lehrbefähigung in der angewandten Mathematik.

In der Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterr. **43,** 11/12 veröffentlicht Dr. P. Zühlke, Realgymnasialdirektor in Landeshut, statistisches Material über die Lehrbefähigung in Mathematik. Wir entnehmen diesen interessanten Ausführungen das Folgende:

„Jahrzehnte lang blieb die angewandte Mathematik und besonders die darstellende Geometrie[3]) an unseren preußischen höheren Schulen ein Aschenbrödel, und die wenigen Stimmen, die nach einer Aenderung dieser Zustände riefen, verhallten nahezu ungehört.

---

[1]) Geht die Ellipse in den Kreis über ($a = b$), so erhält man den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$.

[2]) Die Hypotenusen der einer Ellipse einbeschriebenen rechtwinkligen Dreiecke mit gemeinsamer Spitze in M gehen, wie Frégier zuerst gezeigt hat, sämtlich durch einen festen Punkt der Normalen des Punktes M, den „Frégierschen" Punkt F (vgl. Enzyklopädie der mat. Wissensch., Bd. III C_1, S. 60). Durchläuft M die gegebene Ellipse, so beschreibt F eine dazu homothetische Ellipse mit den Halbachsen $\frac{ac^2}{a^2+b^2}$ und $\frac{bc^2}{a^2+b^2}$ (vgl. J. Steiner, Ges. Werke, Bd. II, S. 432, Nr. 3).

[3]) Ausführlichere Darlegungen über die Geschichte des Unterrichts in der darstellenden Geometrie findet man in einer früheren Arbeit des Verfassers. Vgl. P. Zühlke, Der Unterricht in Linearzeichnen und in der darstellenden Geometrie an den preußischen Realanstalten (Band III, Heft der Abhandlungen der IMUK). Leipzig 1911, B. G. Teubner, S. 9ff 22, 65ff., 82.

Seit etwa zwanzig Jahren ist es aber ganz erheblich besser geworden, das Interesse für die angewandte Mathematik ist sehr erfreulich gewachsen, was nicht zum wenigsten dem rastlosen Bemühen Felix Kleins in Göttingen zu danken ist. In der Prüfungsordnung vom 12. September 1898 wurde in Preußen (bald darauf auch in den anderen norddeutschen Staaten) eine besondere Lehrbefähigung für angewandte Mathematik geschaffen. Das Studium an der technischen Hochschule wird seitdem bis zu drei Semestern auf das Universitätsstudium angerechnet; die angehenden Mathematiklehrer sind aber nicht auf die technischen Hochschulen angewiesen, denn auch auf jeder norddeutschen Universität (außer Berlin) werden jetzt — wie in Süddeutschland schon seit 50 Jahren — in regelmäßigem Turnus Vorlesungen und Uebungen zur darstellenden Geometrie und den übrigen Zweigen der angewandten Mathematik gehalten, wenn man sich auch zur Einrichtung besonderer Lehrstühle für dieses Fach bei uns noch nicht hat entschließen können. Welcher außerordentlichen Beliebtheit sich die Beschäftigung mit der angewandten Mathematik heutzutage bei den jungen Mathematikern erfreut, das erkennt man am deutlichsten an der beständigen und überraschenden Zunahme der Kandidaten, die sich die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik erwerben. Sehr bescheiden fing die Bewegung in den Jahren 1900, 1901, 1902 mit 0, 7, 13 Kandidaten an; dagegen besaßen in den letzten vier Jahren an den preußischen höheren Knabenschulen die Lehrbefähigung für angewandte Mathematik:

Stand am 1. Mai	Direktoren	Oberlehrer	Anstellungsfähige Kandidaten	Probekandidaten	Seminarkandidaten	zus.
1909	1	90	8	21	22	142
1910	1	107	13	23	33	177
1911	1	124	13	33	25	196
1912	2	137	20	26	45	230

Hierzu kommen die zahlreichen Mathematiklehrer, die seit der Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens (1908) von höheren Knabenschulen auf Mädchenschulen übergegangen sind, und die große Zahl derer, die zwar die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik erworben, aber nach Ablegung der Lehramtsprüfung sich anderen Berufen zugewandt haben und damit dem Schulstatistiker entgehen. Schließlich dürfen wir nicht vergessen, daß man auch bei vielen, die eine solche „Lehrbefähigung“ nicht erworben haben, doch ein lebhaftes Interesse und eindringendes Verständnis für die angewandte Mathematik findet; z. B. waren im Jahre 1908 als Assistenten für darstellende Geometrie an der technischen Hochschule zu Berlin 6 Oberlehrer tätig, von denen nur einer die Fakultas für angewandte Mathematik erworben hatte.“

Man wird dem Verfasser zustimmen können, wenn er diese Zunahme des Interesses für angewandte Mathematik für ein erfreuliches Zeichen hält und wenn er darin weiter ein Zeichen dafür erblickt, das sich im mathematischen Unterricht unserer höheren Schulen langsam aber sicher durchsetzt.

Zeitschriftenschau.

Wir bitten, uns in der Berichterstattung durch Uebersendung von Sonderabdrücken, Dissertationen und Programmabhandlungen zu unterstützen.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **22,** 1 u. 2. Hilbert, Begründung der elementaren Strahlentheorie. Killing, Bemerkungen über die Ausbildung der Gymnasiallehrer. Osgood, Zum Beweise des Picardschen Satzes: eine Ergänzung. Suppantschitsch, Eine Vereinfachung im Existenzbeweis des bestimmten Integrals. Sturm, Ueber die Vorzeichenrichtigkeit metrischer Relationen in der Geometrie. Sturm, Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums. Müller, Das Abbildungsprinzip.

Zeitschrift für den math. u. naturw. Unterricht **44,** 1 u. 2. Frenzel, Zur Kleinschen Einführung in die Lehre von den Logarithmen. Gennimatás, Zu den pythagoreischen Dreiecken. Dreßler, Ein mathematischer Scherz und seine didaktische Verwertung. Bindemann, Zur Behandlung der Zinseszins- und Rentenrechnung. Schimmack †, Ein bewegliches Polareckenmodell. Kiesling, Zwei Dreiecksaufgaben. Lietzmann, Der Internationale Mathematikerkongreß in Cambridge.

Monatshefte für den naturw. Unterricht **6,** 1. Genthe, Das System der höheren Schulen Amerikas und der biologische Unterricht. Wunder, Gedanken, Wünsche und Beispiele für den ersten Unterricht in Physik und Chemie. Kammerer, Ueberblick der modernen Variations- und Vererbungslehre. Matzdorff, Zoologische Handbilder. Magin, Zum hydrostatischen Paradoxon. Scheid, Das Boyle-Mariottesche Gesetz im praktisch-chemischen Unterricht. Scheid, Ueber das Absprengen von Gläsern. **6,** 2 Brückner, Bonaventura Corti. Genthe, Das System der höheren Schulen Amerikas und der biologische

595518

Unterricht (Fortsetzung). Dietel, Einiges über den Rost der Rosen und Rubusarten. Rütger, Die freien Humussäuren des Torfmoors und ihre Bedeutung für die Kolloidchemie und Pflanzenphysiologie. Würschmidt, Einfache Aufgaben der Vermessungskunde und ihre Verwendung im Unterricht. Matzdorff, Die Projektion zoologischer Bilder. **6,** 3. Genthe, Das System der höheren Schulen Amerikas und der biologische Unterricht (Fortsetzung). Franz, Ueber das Ortsgedächtnis bei den Tieren. Schmid, Kinematographie und Schule. Wulff, Stirnbein, Hinterhauptbein und Unterkiefer des Menschen. Oettli, Pflanzenphysiologische Versuche im Winter: 1. Assimilationsversuche bei trübem Winterwetter; 2. Geschwindigkeit des Pflanzenwachstums.

Physikalische Zeitschrift **14,** 3. Schaefer u. Frankenberg, Ueber den Einfluß der Temperatur auf die turbulente Strömung. Mie, Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Sorkau über Turbulenzreibung. Zeeman, Ueber Polarisation, die dem Lichte infolge Durchgang durch den Spalt eines Spektrographen aufgezwungen wird, und über einige aus ihr entstehende Fehler. Lummer, Stäbchensehen in klarer Sternennacht (Stäbchenweißer Sternenglanz). Stark, Bogen- und Funkenlinien (ein- und mehrwertige Linien) in den Kanalstraßen. Pettersson, Zur Theorie der Molekularstöße. Ambronn, Ueber die elektrische Leitfähigkeit von Glas und Bergkristall. Vallari, Zur Weißschen Theorie der Hysteresis der ferromagnetischen Substanzen. Schmidt, Ueber das Leuchten und die ionisierende Wirkung inaktiver, mit Phosphordampf gesättigter Gase. Gripenberg, Der Brechungsindex des kristallinischen Selens. Meyer, Notiz zu dem neuesten Wert für das Atomgewicht des Radiums. Grammel, Nachtrag zu der Notiz: Ueber Schwingungen nach dem quadratischen Widerstandsgesetz.

4. Pringheim, Zur Theorie der Lumineszenz. Fajans, Ueber eine Beziehung zwischen der Art einer radioaktiven Umwandlung und dem elektrochemischen Verhalten der betreffenden Radioelemente. Fajans, Die Stellung der radioaktiven Elemente im periodischen System. Swinne, Ueber eine Anwendung des Relativitätsprinzips in der Radiochemie. Sorkau, Ueber den Zusammenhang zwischen Molekulargewicht und Turbulenzreibungskonstante. Burgess, Der gegenwärtige Stand der Temperaturskala. Burgess, Ein Mikropyrometer. Gilchrist, Eine absolute Bestimmung der inneren Reibung der Luft. König und Elöol, Ueber das Nachleuchten in reinem Stickstoff nach Durchgang elektrischer Entladungen. Neesen, Ueber die Tätigkeit des Ausschusses für Einheiten und Formelzeichen (AEF.). Goess, Vorführung einiger Versuche der Gaedeschen Molekularluftpumpe.

Eingelaufene Bücher.[1])

Yoshio Mikami, The Development of Mathematics in China and Japan. Leipzig, Teubner, 1913 (347 S.), geh. 18 M.

K. Rohn und E. Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Band, 4. Aufl. Leipzig (Veit), 1913 (502 S.), geh. 13 M.

H. Schnell, Aufgaben zur graphischen Darstellung für den math. Unterricht der höheren Schulen. Braunschweig (Vieweg), 1913 (43 S.), geb. 1,60 M.

W. Blaschke, Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche. Leipzig (Teubner), 1913 (142 S.), geh. 5,60 M.

E. Küster, Kultur der Mikroorganismen. Leipzig (Teubner), 2. Aufl., 1913 (218 S.), geh. 8 M.

D. A. Goldhammer, Dispersion und Absorption des Lichtes. Leipzig (Teubner), 1913 (144 S.), geh. 3,60 M.

O. Abel, Allgemeine Geologie. Bau und Geschichte der Erde und ihres Lebens. Für die VII. Klasse der Realschulen. Wien (F. Tempsky), 1913 (144 S.), geb. 3 Kronen.

H. Brandenburg, Der Große Fermatsche Satz und sein Beweis. Leipzig (Kom.-Verl. A. Lorenz), 2. Aufl., 1913 (8 S.)

Bücherbesprechungen.

C. Schäffer, Biologisches Experimentierbuch. Leipzig (Teubner) 1913. B. Schmids naturw. Schülerbibliothek 18. (272 S.) geb. 4 M.

P. Claussen, Pflanzenphysiologische Versuche und Demonstrationen für die Schule. Leipzig (Teubner), 2. Aufl., 1910. (33 S.) geh. 1 M.

M. Wagner, 100 physiologische Schulversuche über das Leben der Gemüsebohne. Leipzig (Teubner) 1912. (64 S.) geh. 2 M.

Es ist eigentlich verwunderlich, daß wir in unserer Zeit, in dem die biologische Betrachtungsweise des Pflanzen- und Tierlebens in der Schule sich so erfolgreich durch-

[1]) Eine Besprechung aller bei uns einlaufenden Bücher ist bei der stets wachsenden Zahl von Neuerscheinungen nicht möglich. Alle werden jedoch an dieser Stelle angezeigt. Eine Rücksendung ist in keinem Falle möglich. Die Schriftleitung.

gesetzt und vor allem das Experiment auch auf diesem Gebiete mehr und mehr Eingang gefunden hat, daß wir in dieser Zeit bislang meines Wissens kein Buch besaßen, das der häuslichen Selbstbetätigung des Schülers auch auf diesem Gebiete die Wege wies. Das vorliegende Buch von Schäffer füllt daher eine Lücke aus, die sicherlich mancher schon erheblich empfunden hat. Mit sehr großem Geschick hat der Verfasser hier auf verhältnismäßig beschränktem Raume eine Fülle von Material zusammengestellt. Am besten kommt dabei weg die Physiologie der Pflanzen, die sich ja naturgemäß auch am besten für die Bearbeitung durch Schüler eignet, da sie mit den einfachsten Mitteln auskommt und auch das Versuchsmaterial leicht und billig zu beschaffen ist (Kap. 1—13). In weiteren Kapiteln (14—17) werden dann Anregungen gegeben zur Beobachtung der Lebensweise einiger Tiere. Allerdings verlangt eine große Anzahl hierher gehöriger Beobachtungen ein Mikroskop und kommt darum für den größeren Kreis unser Schüler wohl nicht in Betracht. Sicherlich wird auch hier die Beschaffung des Materials teilweise Schwierigkeiten machen. Großes Interesse werden die Kap. 16 und 17, die sich mit Ameisen, Bienen und Wespen beschäftigen, bei den Schülern finden; ob sie sich allerdings auch, wie der Verfasser meint, für die Schule eignen, lasse ich dahingestellt. Weitesten Gebrauch kann man dagegen von dem Inhalt der Kapitel 18—20 machen, die Versuche über Atmung, Blutkreislauf, Verdauung und die Sinnesorgane des Menschen bringen. Nicht alle diese Versuche sind ja neu, aber sie sind doch in der Literatur so zerstreut, daß sie nur zu einem geringen Teile im allgemeinen im Unterrichte verwandt werden. Auch der übrige Stoff des Buches ist nicht völlig neu. Sehr vielen dieser Versuche begegnet man in unseren pflanzenphysiologischen Praktiken, so z. B. auch in dem für die Schule vorzüglich geeigneten Werkchen von Claussen. Dieses letztere hat ebenso wie das Schäffersche Buch einen großen Wert auch für den Lehrenden dadurch, daß hier eine Reihe von Versuchen gebracht werden, die ohne große Mittel und ohne große Uebung in pflanzenphysiologischen Arbeiten ausgeführt werden können. Wer heute von der Universität in die Praxis kommt, dem fehlt wohl in den meisten Fällen die Uebung. Gerade auf dieses Gebiet wird wohl an vielen unserer Hochschulen gar kein oder doch zu wenig Wert gelegt. Gleichen Zwecken, wenn auch wie Claussen nur für die Schule berechnet, dient auch das kleine Heft von Wagner. In 100 Versuchen behandelt er an Pflanzen derselben Art durchaus methodisch aufgebaut, die wichtigsten Lebensvorgänge im Pflanzenkörper. Es ist eine Freude nach diesem Buche zu arbeiten.

Alle drei Bücher verdienen weiteste Beachtung und Verbreitung. Möge das Schäffersche Buch vor allem unseren Jungen genußreiche und lehrreiche Stunden bringen, möge es aber auch im Verein mit den beiden anderen befruchtend auf den Unterricht wirken.

von der Seipen.

Aus dem Verbandsleben.

11. Verbandstag.

Vom 12. bis 15. Mai 1913 findet der diesjährige Verbandstag in Arnstadt in Thür. statt. Auch diesmal werden neben den geschäftlichen Verhandlungen gesellige Veranstaltungen stattfinden, die dazu beitragen sollen, daß die Teilnehmer im gemütlichen Kreise sich näher kennen lernen oder alte Bekanntschaften erneuern können. Ist doch der Verbandstag das beste Mittel zum Austausch der Gedanken der einzelnen Teilnehmer, zum Verstehen der Richtungen und Ziele der Verbandsvereine, und fördert doch eine Stunde mündlicher Aussprache mehr als monatelanger Briefwechsel. Fordere ich so alle Verbandsbrüder auf, möglichst zahlreich zu erscheinen, so möchte ich doch auch namentlich alle A. H. A. H. bitten, ihre Kraft und Erfahrung in den Dienst des Verbandes zu stellen. Wir wünschen, daß sie ihre Ferien im schönen Thüringen verleben, daß sie Gelegenheit nehmen, ein Stück des lieben deutschen Vaterlandes kennen zu lernen.

Die Verbandskommission des Vorortes stellte folgende

Folge der Veranstaltungen

auf:

Pfingstmontag, den 12. Mai, abends 8½ h. s. t.: Begrüßungsabend.

Dienstag, den 13. Mai, 8½ h. s. t. bis 12 h.: Erster Konvent.
12½ h. c. t.: Gemeinsames Mittagessen.
3 h. s. t.: Bummel mit Damen.
8½ h. s. t.: Festkommers (Straßenanzug).

Mittwoch, den 14. Mai, 10 h. s. t. bis 12 h.: Zweiter Konvent. Anschließend Type.
12½ h. bis 2 h.: Frühschoppen (Markt).
2½ h. c. t.: Gemeinsames Mittagessen.
Kurz vor dem Ball Schlußkonvent.
8 h. s. t.: Ball (Ballanzug).

Donnerstag, den 15. Mai, 3 h. s. t.: Offiziöser Exbummel.

Wo die Veranstaltungen stattfinden, war zur Zeit der Verfassung dieser Mitteilung noch nicht sicher. Jeder, der sich dafür interessiert, erhält Auskunft vom Unterzeichneten.[1]) Die V. V. V. V. erhalten noch nähere Mitteilung. Adressen einzuladender Gäste erbittet

Curt Krafack,
Verbandsschriftwart des Vorortes M. V. Be I.
Neukölln 1, Jonasstr. 66 II.

[1]) Man vergleiche dazu auch die nächste Nummer dieser Blätter.

M. V. M! Berlin.

Am 11. Februar bewährte sich unsere zahlreiche Fuxia als sehr tüchtig durch die Veranstaltung eines Kostümfestes in Neumanns Festsälen. Dies Fest, das die Bezeichnung hatte: „Im Wartesaal IV. Klasse", wies erfreulicherweise einen recht regen Besuch auf, vornehmlich wohl auch deswegen, weil das traditionelle Tanzkränzchen der Burschen diesmal ausfiel. Mannigfaltige Mimiken und musikalische Genüsse trugen zur Unterhaltung und Erheiterung der bunten Menge und damit zum guten Gelingen der Veranstaltung überhaupt bei, die durch die Anwesenheit einer stattlichen Anzahl von Damen verschönt wurde. Das Fest nahm wohl für alle Teilnehmer einen durchaus befriedigenden Verlauf, was sich auch in seiner Dauer ausprägte.

Leider werden wir im neuen Semester den Verlust einiger Vereinsbrüder zu beklagen haben, die ihre Studien an andern Universitäten fortsetzen wollen. Gestrichen wurde Vb. Hirschfelder. Auch in die Reihe unsrer lieben A. H. A. H. wurde eine Lücke gerissen durch das plötzliche Hinscheiden unseres lieben A. H. Willy Howe, das am 16. Februar erfolgte.

Die Schlußkneipe am 22. Februar fand die M. V.er zahlreich versammelt, auch mehrere liebe A. H. A. H. waren erschienen. Die Kneipe nahm einen recht feucht-fröhlichen Verlauf, und spät erst entschloß man sich, das Semester unter den Tisch zu trinken.

Auf dem Schlußkonvent am 24. Februar erfolgte die Besetzung der Chargen und Aemter für das S.-S. 1913 wie folgt:

E. Radel ×, Vorsitzender
M. Pfefferkorn ××, I. Schriftwart
W. Reglin ×××, Kassenwart
I. Bücherwart: W. Sprenger
II. Bücherwart: O. Degosang
II. Schriftwart: R. Sprague
Protokollführer: E. Manns.

Sonstige Aemter:

Fuxmajor: W. Dohmann
Wohnungswart: W. Sabban
III. Bücherwart: H. Jottka
Schmuckwart: R. Belau.

R. Sprague.

A A. V. A! Berlin.

Bericht über die zweite Hälfte des W.-S. 1912/13.

Am 23. Januar feierten wir Kaisers Geburtstag zusammen mit den D. W. V.-Vereinen der Ortsgruppe Berlin durch einen Kommers im Tiergartenhof. Zur Erinnerung an die Erhebung des preußischen Volkes veranstalteten die Korporationen der Berliner Universität eine Feier bestehend aus einem Festakt in der Aula in Gegenwart des Kaisers. Im Anschluß an diese Feier wurde am Denkmal Friedrich Wilhelms III. ein Kranz niedergelegt. Darauf fand eine Auffahrt zum Kreuzberg statt, wo wiederum ein Kranz niedergelegt wurde. Bei dieser Veranstaltung beteiligten wir uns durch Entsendung unserer drei Chargierten.

Am 25. Januar brachten wir unserem hochverehrten Ehrenmitglied Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. H. A. Schwarz aus Anlaß seines 70. Geburtstages einen Festzug dar, zusammen mit dem M. V. Berlin und den Vertretern der Verbandsvereine Göttingen und Halle. Daran schloß sich im Restaurant Hubertusstock im Grunewald ein Festessen und ein Festkommers. Bis zum frühen Morgen ließen wir uns das Freibier gut munden.

Am 4. Februar veranstalteten wir eine urgemütliche Lumpenkneipe. Am 19. Januar vereinigten wir uns mit den Vereinsdamen und den Angehörigen zu einem Familienabend, der im Hotel Steven stattfand. Bei fröhlichem Gesang und Tanz waren wir einige schöne Stunden zusammen. Die Festfreude wurde noch dadurch erhöht, daß uns unsere Vereinsschwestern ein schönes Fahnenband überreichten.

Am 26. Februar waren wir wiederum mit den Vereinsdamen zusammen und zwar zu einem „Kirchweihfest in Neu-Klein-Paddenpfuhl". Die Festkommission hatte wirklich Großes geleistet in der sehr stilechten Ausschmückung des Festsaales. In zwei sehr schönen Mimiken, einer Denkmalsenthüllung in Anwesenheit Serenissimi und einem melodramatisch schauerlichen Ritterstück, zeigten unsere Vereinsbrüder ihr mimisches Können. Unser l. M. V. und die D. W. V.-Vereine hatten zum Feste Vertreter gesandt. Erst der grauende Morgen trieb die Festteilnehmer auseinander, die sich gewiß noch gern an das Fest erinnern.

Im Laufe des Semesters wurde Herr cand. math. Loest als Verkehrsgast aufgenommen.

In der zweiten Hälfte des Semesters wurden noch folgende Vorträge gehalten

A. H. Köppe: Das dyadische System.
A. H. Pürsch: Die Entwicklung des biologischen Unterrichts.
Vb. May: Die Zünfte in Deutschland.
Vb. Bischoff: Deutsch-Ostafrika.
Vb. Bier: Der vorgeschichtliche Mensch.
Vb. Joh. Heilmann: Die Bewohnbarkeit der Himmelskörper.
Vb. Hildebrandt: Die Geologie des Grunewalds.
Vb. Jäckel: Die Uhr (mit Lichtbildern).

Am 28. Februar fand die Generalversammlung statt. Auf ihr wurde als Wahlspruch des Vereins angenommen „Per aspera ad astra". Die Chargen und Aemter sind folgendermaßen besetzt worden:

Johannes Heilmann ×, Vorsitzender.
Hans Falkenberg ××, Schriftwart.
Theodor Bier ×××, Kassenwart.
Kurt Petrow, Fuxmajor.
Walter Hildebrandt, Bücherwart.
Otto Steinfurt, Schmuckwart.

Zu Alten Herren sind ernannt worden Dr. Karl Körner, Walter Dziobek und Kurt Hirsch.

In den Ferien findet jeden Dienstag auf unserer Kneipe ein Ferienabend statt.

Hans Falkenberg.

M.-N. V. M! Bonn.

Bericht über die zweite Hälfte des W.-S. 1912/13.

Auch die zweite Hälfte des verflossenen Wintersemesters brachte dem Verein wieder eine Reihe von Veranstaltungen und Festlichkeiten. Zunächst stieg eine wohlgelungene Damenkneipe, die erste Veranstaltung dieser Art im neuen Vereinslokal. Der Kaiserkommers der gesamten Bonner Studentenschaft wurde am 25. Januar in dem großen Saal der Gronau gefeiert. Nach dem Kommers hielt uns eine gesellige Zusammenkunft im „Krug zum grünen Kranze“ mit den Verbandsbrüdern vom D. W. V. noch lange zusammen. Im Februar folgte dann die Lumpenkneipe, auf der es wieder hoch her ging, und bald danach die D.W.V.-Wissenschaft, in der Vb. Treibs über das aktuelle Thema „Die Chemie im Kampf gegen den Nahrungsmittelmangel“ sprach. Zum letztenmal kamen wir zu feuchtfröhlichen Kneipstunden auf der Schlußkneipe am 22. Februar zusammen, die wir im engsten Kreise verlebten. Aber damit war das Semester noch nicht geschlossen. Am 28. Februar nahmen wir in der Beethovenhalle an der Feier der Unviversität zum Gedächtnis der Erhebung Preußens vor 100 Jahren teil. Die Festrede hielt Geheimrat Professor Dr. von Bezold, ein Prolog und eine Ansprache wurden von Studenten gehalten. Dies war umgeben von Freiheitsliedern, die von einem Studentenchor vorgetragen wurden. Am Vorabend der Feierlichkeit fand ein Fackelzug der Studentenschaft zu Ehren von Ernst Moritz Arndt zum Arndtdenkmal auf dem alten Zoll statt.

Neben diesen festlichen Veranstaltungen fanden auch eine Reihe wissenschaftlicher Sitzungen statt. Es wurden folgende Vorträge in ihnen gehalten:

Vb. Pilger: Gefahren des Bergbaus.
Vb. Barschdorff: Ueber Farbenblindheit.
Vb. Hackenberg: Ueber Mendelsche Vererbungslehre.
A. H. Dr. Arens: Leuchtende Pflanzen.
Vb. Winckels: Leuchtende Tiere.

Hervorzuheben ist noch, daß auch in den beiden letzten Monaten des Semesters der Verein noch einen Zuwachs von zwei neuen Füchsen erhielt. Es meldeten sich die Herren Severin Kaiser aus Düren und Paul Gasteyer aus Saarbrücken aktiv.

Auf dem Schlußkonvent fand die Chargenwahl für das S.-S. 1913 statt. Sie hatte folgendes Ergebnis:

Wilhelm Ludwig ×, Vorsitzender,
Georg Köhler ××, Schriftführer,
Franz Schawel ×××, Kassenwart.
Karl Schulz, Fuchsmajor.

H. Fuchs.

Wissenschaftl. Verbindung M! Makaria Dresden.

Wohl noch nie hat unsere Verbindung seit ihrem Bestehen so viele Erfolge auf wissenschaftlichem Gebiete aufzuweisen gehabt wie im laufenden Semester, denn außer Bb. Braune, der gleich zu Beginn des Semesters das Staatsexamen ablegte, bestanden noch die Bb. Bb. Gruner, Spiegelhauer, Kaden und Wolff. Weiter promovierte Bb. Wilson in Rostock und Bb. Lenk in Halle.

Trotz dieser eifrigen wissenschaftlichen Tätigkeit waren die Veranstaltungen der Verbindung immer gut besucht. Am 11. Dezember fand eine Besichtigung der Camerawerke von Ernemann statt, an welche sich ein Exbummel nach Gostritz anschloß, wo einige Examensfäßchen geleert wurden. Der am Sonnabend, den 13. Dezember veranstaltete Exbummel hat eine frohe Korona im Ratskeller zu Coschütz vereinigt, wohin auch einige Alte Herren gefolgt waren. Die Weihnachtskneipe, die am 21. Dezember v. Js. auf unserer festlich geschmückten Kneipe stieg, nahm einen fröhlichen und stimmungsvollen Verlauf. Eine große Anzahl von Gästen hatte unserer Einladung Folge geleistet, und wir hatten die Ehre, Se. Magnifizenz Herrn Geh. Hofrat Prof. E. von Meyer begrüßen zu können, ferner unser E. M. Herrn Geh. Hofrat Prof. Krause, Herrn Geh. Hofrat Prof. Grübler und Herrn Prof. Ludwig. In sehr großer Zahl waren auch die Alten Herren und Inaktiven, insbesondere von auswärts erschienen, um nach langer Zeit wieder einmal mit der Aktivitas fröhlich zu sein. Während der darauf folgenden Weihnachtsferien fand ein Frühschoppen und Biertisch statt und am Schluß der Ferien ein Abschiedsbiertisch für unsere Kandidaten, die mit Beginn des neuen Jahres am Realgymnasium in Freiberg ihr Seminar antraten.

Das neue Jahr begannen wir am 8. Januar. Am 18. Januar hatte die Aktivitas einer Einladung unseres lb. A. H. Prof. Dressler zum Abendessen Folge geleistet, wo wir einen sehr angenehmen und fröhlichen Abend verbrachten. Auf dem Professorenball am 24. Januar

waren wir durch Bb. Kemmer, 1. Schriftführer im Engeren Ausschuß des Verbandes der Studentenschaft, und durch unseren 1. Chargierten Fichte vertreten. An dem Kaiserkommers, der am 28. Januar im Vereinshaus abgehalten wurde, nahmen wir geschlossen teil. Auch an dem am Fasching von der Studentenschaft der Technischen Hochschule ins Leben gerufenen Karnevalsumzug beteiligten wir uns mit einem Wagen, „Die Wiedergeburt der Universität Dresden" darstellend. Am 5. Februar wohnten wir der Beisetzung des Studierenden Hans Brune im Krematorium bei.

Für die Keilzeit bitten wir alle Alten Herren und Inaktiven um recht zahlreichen Besuch der Veranstaltungen.

Zum A. H. wurden ernannt Bb F. Gruner, H. Kaden, J. Wolff, zum a. i. a B. wurde Bb. Th. Hofmann ernannt. Inaktiviert wurden Bb. Heinichen und Bb. Kemmer.

Wie schon erwähnt, gingen fünf Bb. Bb. zu Beginn des Jahres nach Freiberg und zwar: A. H. Braune, A. H. Gruner, a. i. a. B. a. i. a. B. Kaden, Spiegelhauer, Wolff. A. H. Beyer wurde von Freiberg nach Zwickau versetzt und a. i. a. B. Wilson kehrte aus Rostock nach Dresden zurück, um hier seine Studien zu beenden, a. i. a. B. Ewest ging nach Berlin.

Ferner sind wir in der Lage gewesen, schon jetzt das Programm für das 10. Stiftungsfest, das vom 15. bis 17. Mai d. Js. stattfindet, mitzuteilen. Wir verweisen wegen des Festes, zu dem wir alle Vv. Vv. sowie unsere Alten Herren und Inaktiven freundlichst einladen, auf die Anzeige in der vorigen Nummer.

Am 28. Februar fand die feierliche Uebergabe des Rektorats an den neugewählten Rektor Seine Magnifizenz Herrn Professor Dr. Förster statt, an der die drei Chargen sowie die Aktiven und ein großer Teil der Inaktiven teilnahmen. Am 23. Februar waren unsere Inaktiven zum Abendessen bei unserm lb. A. H. Prof. Dr. H. Dreßler eingeladen, wo sie einen sehr angenehmen Abend verbrachten. Am 1. März weilte Bb. Franz Wagner in Berlin, um einem Schiedsgerichte unserer V. V. V. V. Berlin I und Berlin II beizuwohnen.

Am 4. März fand der Semesterschlußkonvent statt; auf diesem ergaben die Neuwahlen folgende Besetzung der Chargen und Aemter:

Hans Heinrich Fichte ×, Vorsitzender,
Arthur Maske ××, Kassierer,
Fritz Bieber ×××, Schriftführer.
1. Fechtwart: H. H. Fichte,
2. Fechtwart: W. Herrmann,
Verbandsschriftwart: M. Häntzschel,
Schmuckwart: A. Kotte,
Bücherwart: M. Häntzschel.

Zum Fuxmajor wurde Bb. Kemmer gewählt.

Weiter ist noch mitzuteilen, daß unser a. i. a. B. F. Spiegelhauer zum A. H. und Bb. Günther zum o. i. a. B. ernannt wurde. Unser früheres Mitglied Vbb. Hugo Stautmeister wurde zum a. i. a. B. ehrenhalber ernannt.

Als Vertreter für den Gesamtausschuß der Studentenschaft an der Technischen Hochschule wurden Bb. Kemmer, Bb. Fichte und Bb. Herrmann gewählt.

Bb. Dr. Theodor Hartmann bestand am Schluß des Semesters das Staatsexamen in Dresden mit Auszeichnung.

Von den Vorträgen, die im letzten Semester gehalten wurden, seien noch genannt:

W. Herrmann: Einiges über Baumaterialien.
H. H. Fichte: Gerhart Hauptmann.
W. Kemmer: Nationalität und Charakter in ihrem Einfluß auf Stimme und Sprache.
F. Bieber: Die Armeen unserer Bundesgenossen.
M. Häntzschel: Zur Theorie der Wünschelrute.

Die letzten Veranstaltungen des Semesters standen bereits im Zeichen des Keilbetriebes, und wir konnten, besonders bei den Kneipen, immer eine große Zahl Alter Herren und Inaktiven begrüßen. Besonders lebhaft beteiligten sich unsere Freiberger Kandidaten. Den Abschluß des Semesters bildete die Semesterschlußkneipe am 8. März, zu der außer zahlreichen Alten Herren und Inaktiven auch mehrere Gäste erschienen waren, unter ihnen Kartell-A. H. Illmer und C. B. Lauke (Bra) sowie Vbb. A. Dorn vom V V. Halle.

Bis jetzt hat sich aktiv gemeldet: Fritz Schulz, stud. chem., der aber am 1. April beim Schützen-Regiment Nr. 108 als Einjährig-Freiwilliger eintritt. Hoffen wir, daß uns die Ferienveranstaltungen und das kommende Semester eine stattliche Fuxenkorona bringen, deren wir sehr stark bedürfen.

Die Couleurferien begannen am 9. März und enden am 14. April. Unser 21. Semester beginnt also am 15. April, das Hochschulsemester beginnt am 22. April.

Von der Hochschule ist noch zu berichten, daß die Herren Geh. Hofrat Prof. Fischer, Geh. Hofrat Prof. Mehrtens und Prof. Dr. Bucherer dieselbe am Schluß dieses Semesters verlassen.

F. Bieber.

M.-N. V. Freiburg i. Br.

Bericht über die zweite Hälfte des W.-S. 1912/13.

Das alte Jahr sah uns am 30. Dezember noch einmal beisammen. Unser l. Fux Ehra hatte den Verein an diesem Abend zu seiner Geburtstagsfeier eingeladen, die einen sehr fidelen Verlauf nahm. Erwähnt sei noch das schöne Schwarzwaldbild, das Vb. Ehra aus Anlaß des Festes der Kneipe gestiftet hat.

In den Weihnachtsferien besuchten uns unsere l. auswärtigen Mitglieder Emeis aus Kiel und Gerhardt aus Jena, die sich im nahen Schwarzwald dem Wintersporte hin-

geben wollten. Ihnen zu Ehren wurden zwei Ferienstammtische veranstaltet, die auch von seiten der A. H. A. H. eine rege Beteiligung fanden.

Am 11. Januar stieg im Café Kopf die übliche Winter-Tanzveranstaltung. Für Unterhaltung und allgemeine Erheiterung sorgten eine wohlgelungene Damenrede und mehrere humoristische Vorträge. Erst spät nach Mitternacht dachte man an einen Aufbruch, und man trennte sich mit dem Bewußtsein, wieder einmal im Kreise der Damen schöne Stunden verlebt zu haben. Am 20. Januar beteiligten wir uns an dem Kaiserkommers des nichtkonfessionellen S.-Ausschusses. Am 30. Januar leisteten wir einer Einladung unserer Vereinsdamen zu einem Tanzvergnügen im „Waldsee“ Folge. Auch diese Veranstaltung nahm einen harmonischen Verlauf.

Kurz vor Fastnacht wurde auf unserer Kneipe der übliche Lumpenabend abgehalten.

Am 14. Februar vereinigte uns bei „Dattler“ auf dem Schloßberge eine fidele Bowlenkneipe, auf der die von C. A. H. Prof. Reinganum zu Weihnachten gestiftete Bowle eingeweiht wurde. Zu unserer aller Freude war hierzu auch ihr Stifter erschienen. Die letzte Veranstaltung und zugleich ein würdiger Abschluß des Wintersemesters war die Schlußkneipe am 22. Februar. Auf ihr konnten wir neben einigen A. H. A. H. auch unser E. M. Prof. Loewy begrüßen.

Mitte Februar bestand Vb. Hoffmann das Dr.-Examen. **P. Meiser.**

M.-N. V. M.! Gießen.

Bericht über die zweite Hälfte des W.-S. 1912/13.

Beseelt von dem Gedanken, Wissenschaft und Geselligkeit im neuen Jahre in würdiger Weise weiterzupflegen, versammelten wir uns wieder am 9. Januar in corpore. Einige Tage später folgten wir einer Einladung zum D. W. V.-A. H.-Abend im Hotel Schütz. Unser l. Bl. Lehramtsassessor Rich. Schmalz hatte in dankenswerter Weise einen Experimentalvortrag über „Moderne Probleme der Chemie“ übernommen. Seine klare Vortragsweise und hochinteressanten Experimente bewirkten es, daß alle Zuhörer mit gespanntester Aufmerksamkeit seinen Ausführungen folgten und ihm lebhaften Beifall zollten. Am 25. Januar feierten wir im „Gießener Wissenschafter-Verband“ einen äußerst harmonisch verlaufenen Kaiserkommers. Eine überaus große Zahl von Gästen hatte uns diesmal mit ihrem Besuche beehrt, um nicht unwesentlich zur gehobenen Stimmung beizutragen. Mit einer höchst stimmungsvollen und feuchtfröhlichen Kneipe beschlossen wir dann etwa 4 Wochen später (22. Februar) offiziell das Semester mit den besten Auspizien aufs neue.

An Vorträgen wurden in der zweiten Hälfte des Semesters folgende gehalten:

Seibel: Entstehung der Tiere.
Fritz: Bryocoen.
Lauckhard: Längenwachstum bei Pflanzen.
Legler: Suggestion.
Weitzel: Henri Poincaré.
Stellwagen: Entstehung von Trogtälern durch Erosion.

Zum A. H. ernannt wurde unser bewährter D. W. V.-Mann Tierarzt „Michel“; Tierarzt Nungesser promovierte; Bb. Neuß, zurzeit Assistent am chemischen Laboratorium für Moorkultur in Hannover, bestand sein chemisches Verbandsexamen.

Für das S.-S. 1913 sind die Aemter, wie folgt, verteilt:

Fr. Kühnemund ×,
Alb. Gilbert ××,
Fr. Seibel ×××,
W. Weber, F. M.,
H. Lauckhard, I. B. W.,
Ph. Stellwagen, II. B. W.,
J. Neef, K. W. (Frankfurter Str. 21).

Ferienvertreter ist: Georg Steinebach (med. vet.), Gießen, Ebelstr. 20 I. **Claus.**

M. V. M.! Heidelberg.

Bericht über die erste Hälfte des W.-S. 1912/1913.

Wir begannen unser 73. Semester mit acht Aktiven. Gleich zu Beginn des Semesters meldete sich Vbb. Mau (V. V. Freiburg) aktiv, sodaß wir mit neun Mitgliedern den Keilbetrieb beginnen konnten. Der zeigte nach vielen Bemühungen schließlich auch den schönen Erfolg, daß wir vier Füxe unsernennen konnten, und zwar die Herren Heiseler, Kremp, Morlock und Simon. Am Sonntag, den 27. November inszenierten wir einen Keilbummel über die Berge nach Wiesloch, wo uns unser lieber A. H. Maug empfing. Er entführte uns sofort in den Physiksaal der Realschule und hielt uns dort seinen schon länger versprochenen Vortrag über die verschiedenen Systeme der Farbenphotographie, wobei er uns seine sämtlichen, trefflich gelungenen Farbenaufnahmen projizierte. Sodann lud er uns zu einem Dämmerschoppen im „Stöckinger“ ein, wo uns des Weines Güte bis zur letzten Tram nach Heidelberg zusammenhielt. Am 9. November stieg die übliche Semesterantrittskneipe. Von den Dozenten durften wir Geh.-Rat Uhlig dabei begrüßen. Leider waren nur sehr wenige A. H. A. H. erschienen. Trotzdem verlief diese Kneipe recht feuchtfröhlich und da kurz darauf drei der anwesenden Keilfüxe aktiv wurden, konnten wir mit dem Erfolg wohl zufrieden sein. Die alljährlich im Wintersemester stattfindende Damenkneipe

hielten wir dieses Jahr am 30. November ab und zwar nicht mehr in Mannheim, wie es bis dahin der Fall gewesen war, sondern in Heidelberg. Viele junge und alte Damen waren aus Nah und Fern gekommen, um sich die M. V.er Kneipe anzusehen und selbst dabei mitzumachen. Durch zahlreiche und zum Teil urgelungene Mimiken war für die Unterhaltung aufs beste gesorgt, und als schließlich eine Dame das Präsidium erhielt und den Tanz eröffnete, erreichte die Fröhlichkeit einen solchen Grad, daß sich, als um 3 Uhr die Veranstaltung ihrem Ende nahte und zum Aufbruch geblasen wurde, selbst die Damen nicht entschließen konnten, sofort nach Hause zu gehen, sondern daß wir uns in cumulo noch ins Café begaben, wo wir blieben, bis uns der Wirt Feierabend gebot. Den Abschluß vor Weihnachten bildete die Weihnachtskneipe, die, was Gemütlichkeit anlangt, die schönste aller vor Weihnachten abgehaltenen Veranstaltungen genannt zu werden verdient. Schon die Verlesung der Bierzeitung, was ja nur zweimal im Jahr, beim Stiftungsfestkommers und eben bei der Weihnachtskneipe geschieht, gibt ihr eine ganz besondere Weihe. Bierzeitung und Ulkgeschenke übten eine geradezu fabelhafte Wirkung auf die Korona aus, die des Lachens fast kein Ende fand; erst der treffliche Schwartenmagen, den die Freiburger A. H. A. H. uns traditionell zu jeder Weihnachtskneipe stiften, beruhigte wieder einigermaßen die Gemüter. Daß wir uns nach Schluß der Kneipe nicht direkt nach Hause begaben, versteht sich von selbst, und mancher A. H. und Vb. wandelte erst im Morgengrauen seinen Penaten zu. — Bei so viel Geselligkeit wurde aber die wissenschaftliche Betätigung des Vereins nicht vernachlässigt. Allwöchentlich stieg ein Vortrag. Bis Weihnachten waren folgende Themata behandelt worden:

Vb. F. Hörner: Chlor, seine Herstellung und seine Verwendung. I.
Vb. Vierling: Die moderne Artillerie.
Vb. F. Hörner: Chlor, seine Herstellung und seine Verwendung. II.
A. H. Hauck: Die Geographie Oberitaliens.
Vb. Steuerle: Die Elementarsätze der analyt. Geometrie.
Vb. Koch: Die Entwickelung des Schädels.

R. Schmolck.

M.-V. Leipzig.

Zum ersten Male nach den Weihnachtsferien vereinigten wir uns zur recht fröhlichen Kneipe am 11. Januar. Wenige Tage später kamen wir mit den verschiedenen hiesigen D. W. V.-Korporationen im „Künstlerhaus“ zusammen, um, wie schon seit einer Reihe von Jahren, auf einem Reichskommers die Entstehung des Deutschen Reiches zu feiern.

Auf Ende Januar fiel dann der Besuch Se. Majestät des Königs Friedrich August von Sachsen im Mathematischen Institut. Die Königsvorlesung hielt unser hochverehrtes E. M. Geh. Hofrat Prof. Dr. Hölder über: „Die Grundlegung der Mechanik durch Galilei“. Außer den schon bekannten Gesetzen über Fall- und Wurfbewegung auf verschieden geneigten Ebenen und im Raume wurden die weniger bekannten Untersuchungen Galileis über die Festigkeit der Körper vorgeführt, die ihn auf theoretischem Wege zu der Erkenntnis geführt hatten, daß z. B. Tiere von übermäßiger Größe, die aus demselben Stoffe beständen, wie die wirklich vorhandenen, zusammenbrechen müßten. Darin liege auch schon die wichtige Tatsache, daß die Festigkeit technischer Bauten vor ihrer Herstellung nicht durch Experimente am verkleinerten Modell geprüft werden können. So habe Galilei auch für die technische Mechanik den ersten Grund gelegt und dabei seine hauptsächlichsten Resultate unter der Mitwirkung der mathematischen Ueberlegung erlangt, in der er wahrlich ein Meister gewesen sei!

Nach der Vorlesung brachte der Famulus, Vb. Sitte, dem Könige ein dreifaches Hoch aus!

Vor nicht allzu geraumer Zeit hatte uns unser 1. V. V. Halle in corpere auf unserer Kneipe besucht. Dieser Besuch wurde am 8. Februar seitens unsres Vereins erwidert.

Unser diesjähriges Winterfest wurde am 13.—16. Februar gefeiert. Wie üblich wurde es mit Tafel und Festball eingleitet. Leider hatte sich nur eine geringe Zahl lieber A. H. A. H. dazu eingefunden, woran wohl der Ostertermin mit seinen Prüfungsarbeiten die Schuld trägt. Verehrte Gäste waren hingegen zahlreich erschienen. Erst reichlich spät löste sich die fröhliche Schar!

Hinaus nach der Eutritzscher Gosenschenke ging's am folgenden Tag, wo bei Gesang, Scherz, Tanz und Spiel nur so die Stunden verflossen!

Diesem „Katerbummel“ folgte am Sonnabend der fidele Exbummel nach Böhlitz-Ehrenberg, natürlich wie immer mit Damen. So fröhlich und lustig war's wohl selten; und wie viele sich dazu eingefunden hatten! Vorträge ernster und heiterer Natur wechselten angenehm mit flottem Tanz! So war denn auch dieser Tag vorüber, gern wird man sich seiner erinnern!

Den Schluß bildete dann der Weinfrühschoppen im Neuen Theaterrestaurant, der dann später in der Eutritzscher Gosenschenke bei der beliebten Gose ziemlich lange in ausgelassenster Fröhlichkeit fortgesetzt wurde.

Auf dem Schlußkonvent werden für das nächste Semester die Aemter wie folgt vergeben:

1. Chargierter: Uhlig
2. „ Lottmann
3. „ Jobst

Fuxmajor: Petzold

1. Schriftführer: Lottmann
Kassierer: Seifert
2. Schriftführer: Jobst
Bibliothekar: Wedel
Schmuckwart: v. Lücken.

Im übrigen wünschen wir allen V.V. V.V. im nächsten Semester eine erfolgreiche Fuxenjagd!

Otto Kahnt.

M.-Ph. V. Marburg.

Bericht über das W.-S. 1912/13.

In diesem Semester traten im Mitgliederbestande folgende Veränderungen ein:

Kemmerzell und Zeh kehrten aus Straßburg, Eckardt aus Göttingen zurück, Peres trat nach beendeter Militärdienstzeit dem Verein wieder bei. Die Vb. Vb. Zecher, Gösser, Nimmerjahn und Hellmuth verließen uns, um in Frankfurt bezw. Berlin und Leipzig ihr Studium fortzusetzen. Renisch wurde in den Verein neu aufgenommen. Ebert und Dr. Paeckelmann wurden zu Alten Herrn ernannt, Dr. Vatter ging nach Frankfurt ans Völkermuseum — H. Aulmann erhielt den erbetenen ehrenvollen Austritt. J. Beuß wurde gestrichen, G. Denker i. p. dimittiert.

Wie gewöhnlich wurde das Semester durch einen Begrüßungsabend (Montag, 21. Oktober) im engeren Kreise begonnen, während die offizielle Antrittskneipe am 9. November den bunten Reigen der frohen Feste eröffnete. Selten wohl hat ein Semester mehr Gelegenheit zum Feiern gegeben als dieses. Kaum hatte man sich nach den großen Ferien wieder ins akademische Leben hineingefunden, als unter den älteren Mitgliedern eine wahre Examensepidemie losbrach, und keiner verließ unter cum laude die gefährlichen Klippen des Rigorosums und Staatsexamens. So zogen sich Vb. Ebert und Vb. Dr. Vatter nach bestandenem Staatsexamen ins Philisterium zurück, während die Vb. Vb. Paeckelmann, Altfeld, Schwanecke und unser lieber Vbb. Dienemann die Doktorwürde errangen Auch unser lieber C. A. H. Kämmer, — ein gern gesehener Gast des M.-Ph. V. — promovierte, und wir danken ihm auch an dieser Stelle aufs herzlichste für die herrliche Kneipe, die dieses Ereignis feierte. Daß auch alle anderen Examina durch Kneipen festlich begangen wurden, ist selbstverständlich.

Zu Ehren des Prorektors, unseres lieben C. A. H. Geh. Prof. Schenck, veranstaltete die Studentenschaft einen Fackelzug, an dem der Verein geschlossen teilnahm. Die freundschaftlichen Bande, die uns nun schon seit mehreren Semestern mit unserem lieben Phil.-Hist. Verein verknüpfen, wurden auch in diesem Semester durch eine gemeinsame Kneipe gefestigt und neue Freundschaftsverhältnisse unter den Mitgliedern der Vereine angebahnt.

Am 15. Dezember fand eine Neuwahl des Vorstandes statt mit folgendem Ergebnis:

H. Kemmerzell ×,
W. Zeh ××,
G. Widemann ×××.

Vb. Zenge, der bisherige ×, wurde inaktiviert.

Das Weihnachtsfest wurde diesmal doppelt schön gefeiert: Mittwoch, den 18. Dezember durch ein „Christbaumschmücken mit Damen", auf dem zwar kein Christbaum geschmückt, aber um so eifriger um einen bereits geschmückten herumgetanzt wurde. Auch der brave Weihnachtsmann erschien von dem „kleinen" Christkindchen begleitet und brachte Damen und Herren allerlei schöne Sachen, und mancher und manche wird bei ihrem Anblick an die schönen Stunden zurückdenken. Tags darauf stieg die Weihnachtskneipe. Von den Dozenten durften wir S. Magn. Herrn Prof. Dr. Troeltsch unsern lieben C. A. H. Prorektor Geh. Prof. Dr. Schenck und Herrn Privatdozent Hellinger begrüßen. Wie immer waren unsere V. V. V. V. Berlin II, Gießen und Heidelberg vertreten. Zu besonderer Freude gereichte uns die Anwesenheit unserer lieben V. V. V. V. Braunschweig und Frankfurt.

Jedermann wurde vom Weihnachtsmann mit ulkigen Geschenken bedacht, und die Weihnachtskommission, — unsere lieben unverwüstlichen I. A. I. A. Dr. Perron und Dr. Weber gehörten ihr natürlich auch an —, hatte sich sogar ein blendendes Theaterstück mit dem bezeichnenden Titel: „Prost!" eingeübt. So konnte die angeregte Stimmung nicht ausbleiben, die auch am Weihnachtsfrühschoppen noch anhielt, sodaß jeder mit den schönsten Erinnerungen nach Hause fuhr.

Zur Feier ihrer Rezeption schmissen unsere zahlreichen Füxe eine Kneipe. Den Höhepunkt erreichte das Semester aber im Tanzkränzchen, das Samstag, den 15. Februar im Restaurant Briel stattfand. Selten sind unsere Damen so zahlreich unserer Einladung gefolgt, und ihnen allen sei auch an dieser Stelle unser herzlichster Dank ausgesprochen.

Das schöne Semester fand in der Schlußkneipe vom 1. März 1913, auf der wir unser liebes E. M. Geh. Prof. Dr. Korschelt wie auch unsere lieben C. A. H. C. A. H. Prof. Dr. Blanckenhorn, Dr. Kämmer und Vespermann zu unseren Gästen rechnen durften, sein würdiges Ende.

An der Verteilung der Chargen und anderen Ehrenämter änderte der Schlußkonvent vom 27. Februar nur wenig:

H. Kemmerzell ×,
W. Zeh ××,
G. Widemann ×××,
W. Lepke blieb Bücherwart.

An Vorträgen wurden im Laufe des Semesters gehalten:

A. Brück: Ueber veränderliche Steine.
Dr. W. Perron: Ueber den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie.

Dr. W. Perron: Kolloquium über dasselbe Thema.
C. Krug: Ueber den Vogelflug.
H. Peres: Ueber ballistische Kurven.
W. Mengel: Gärungsprozesse.
T. Weber: Zur Geographie und Geschichte von Konstantinopel.
G. Widemann: Ueber Ameisenbiologie.
H. Zenge: Ueber Polarplanimeter.
F. Wetekamp: Ueber Eireifung.
G. Eckard: Die elementaren Rechnungsregeln der Vektoranalysis.
G. Eckard: Fortsetzung: Ueber die Differentialoperationen der Vektoranalysis.
C. Krug: Ueber Eifurchung.
R. Straßmann: Das Reziprozitätsgesetz

Pfingsten dieses Jahres, von Samstag, den 10. Mai, bis Montag, den 12. Mai, feiert der Verein sein 35jähriges Stiftungsfest.

Auf unsere vorläufige Einladung erhielten wir bereits unverbindliche Zusagen von unseren lieben A. H. A. H. Dr. Barkow, Dansmann, Dr. Dickmann, Ebert, Jaeckel, Dr. Kapp, Luckey, Dr. Paehler, Paeckelmann, Rosenstock, Dr. Rumpf, Dr. Wenz, Zoch. Wir hoffen, daß sich diese Anzahl noch recht vergrößert, und wir unterlassen es nicht, auch auf diesem Wege unsere Einladung zu wiederholen, denn nur die Teilnahme von recht vielen Alten Herrn kann dem Feste ein schönes Gelingen sichern.

Wilh. Zeh ××.

M.-N. V. Straßburg.

2. Bericht über das W.-S. 1912/13.

Unsere im letzten Berichte zum Ausdruck gebrachte Hoffnung hat sich bald erfüllt. Wir konnten die Herren stud. math. Kurt Keil aus Straßburg, stud. math. Karl Kropp aus Saarburg und cand. math. Gerhard Strauß aus Ratibor als aktive Mitglieder in den Verein aufnehmen. Ferner traten dem Verein die Herren stud. phil. Oskar Barz aus Trier und stud. math. Arnold Stilke aus Bergedorf bei Hamburg als Verkehrsgäste bei, von denen sich Barz im Januar aktiv meldete und als a. o. Mitglied aufgenommen wurde. Vb. Lang, der dieses Semester eine andere Universität beziehen wollte, kehrte doch wieder zu uns zurück, so daß der Verein gegenwärtig aus folgenden Mitgliedern besteht: Aktive: Aßmuth (Je), Barz, Keil, Kropp, Lang, Michael, Selt, Strauß, Ziegler. Inaktive: Spreen und Stüsser (Bo). V. G.: Stilke. Auswärtige Mitglieder: Flieg (Bo), Hermann, Kemmerzell (Ma), Meyer (Be I), Mönch (Gö), Pohle (Gö), Schawel (Bo), Schumacher (Be II), Stegmann (Gö, Bo) und Zeh (Ma). In diesem Semester wurden folgende Vorträge gehalten:

Vb. Michael: Ueber den Nutzen der Einführung der komplexen Zahl.
E. M. Prof. Dr. Simon: Der Zusammenhang zwischen Mathematik und Philosophie.
Vb. Aßmuth: Stetigkeit und irrationale Zahlen.
Vb. Keil: Der Fundamentalsatz der Algebra.
V. G. Barz: Die Entwicklung des Theaterbaues von der Antike bis zur Neuzeit.
A. H. Prof. Leman: Der Kalenderstein von Stürzelbronn.
Vb. Krapp: Das Telephon.

Ferner wurden die bereits im letzten Berichte erwähnten Kurse „Algebra und algebraische Analysis“ und „analytische und synthetische Geometrie“ regelmäßig abgehalten. Bei dem am 20. November von unserm l. E. M., Herrn Prof. Dr. Simon gehaltenen Vortrage, konnten wir eine stattliche Anzahl E. M. E. M., A. H. A. H. und Gäste begrüßen. Die Fakultät war vertreten durch E. M. Prof. Dr. Weber, Prof. Dr. Edler von Mises und Privatdozent Dr. Speiser. Auch zu dem Vortrage von A. H. Prof. Leman am 29. Januar war eine Reihe E. M. E. M. und A. H. A. H. erschienen. Es sei uns vergönnt, auch an dieser Stelle den beiden Rednern für ihre interessanten Ausführungen unsern herzlichsten Dank auszusprechen. Im November bestand unser l. Axmacher sein Staatsexamen. Am 27. November ernannten wir ihn zum A. H. und brachten ihm auf seiner Abschiedskneipe nach alter Sitte einen Fackelzug dar. Zu dem am 7. Dezember stattgefundenen Rektorball hatten wir zwei Vertreter entsandt. Am 14. Dezember stieg unter zahlreicher Beteiligung unsere Weihnachtskneipe. Reden und Klaviervorträge, fröhliche Lieder und vor allem die Bescherung durch den Weihnachtsmann sorgten für die Unterhaltung der Teilnehmer. Leider mußte des schlechten Wetters wegen von dem geplanten Exbummel am 15. Dezember Abstand genommen werden.

Die Chargenwahl mußten wir bis Anfang des nächsten Semesters verschieben, da wir unter den in unserm Rundschreiben geschilderten Umständen erst abwarten wollen, wie sich die Verhältnisse gestalten werden. Vb. Stüsser legte wegen Examensarbeiten sein Amt als B. W. nieder. Sein Nachfolger für den Rest des Semesters wurde Aßmuth. Die Schlußkneipe wurde auf den 26. Februar festgesetzt und Vb. Strauß zum Ferienvertreter gewählt.

Am 24. Januar fand der durch die Bemühungen des Rektors zustande gekommene Reichs- und Kaiserkommers der gesamten Studentenschaft statt, an dem wir mit den beiden andern D. W. V.-Vereinen in corpore teilnahmen. Zu der akademischen Geburtstagsfeier in der Aula der Universität am 27. Januar entsandten wir die drei Chargierten in Wichs. Am 29. Januar feierte unser l. E. M., Herr Prof. Dr. Gerland, früher Direktor des geographischen Instituts seinen 80. Geburtstag, wozu wir ihm unsere herzlichsten Glückwünsche übermittelten.

Dem Verkehr unter den drei D. W. V.-Vereinen dienten vier ordentliche und ein a. o. Konvent mit anschließenden Kneipen, drei Stammtische und der am 14. Januar stattgefundene gemeinsame wissenschaftliche Abend, an dem Herr Prof. Dr. Lobstein vom Akademisch-Theologischen Verein Collegium über „Rousseau und die Religion“ sprach. An diesen Vortrag schloß sich eine größere Kneipe. **Aßmuth.**

M.-N. V. Makaria **Stuttgart.**

Das neue Semester brachte auch wieder neues Leben in unsere vorher etwas stillen Hallen. Alte Burschen kehrten zur hiesigen Alma mater zurück, und ein reger Keilbetrieb setzte nun ein, der von schönem Erfolg gekrönt war.

Die Antrittskneipe stieg am 19. Oktober, auf welcher A. H. Käser über „Seriengesetze der Linienspektren“ sprach. Zahlreiche Alte Herren hatten sich eingefunden, so daß unsere Kneipe fast zu klein erschien. Sonst nahm die Kneipe ihren gewohnten feuchtfröhlichen Verlauf.

Nun galt es vor allen Dingen die Vorbereitungen zu unserem 37. Stiftungsfest zu treffen, das wir am 23. und 24. November in den Sälen der Liederhalle feierten. Als Gäste durften wir die meisten unserer Alten Herren, unser Ehrenpräsidium Prof. Dr. C. B. Klunzinger, unsere Ehrenmitglieder H. H. Prof. Dr. Ziegler und Prof. Dipl.-Ing. Hauber sowie die Herren Vertreter des V. V. Dresden und Heidelberg begrüßen. Den Vortrag des Abends hatte in liebenswürdiger Weise A. H. Reg.-Baumeister Krautmann übernommen. An Hand von Plänen und Zeichnungen zeigte der Redner, welche gewaltige Veränderungen und Bauten nötig sind, um den Stuttgarter Hauptbahnhof der Neuzeit entsprechend umzubauen, ohne Betriebsstörungen eintreten zu lassen. Unter den üblichen offiziellen Reden und frohen Gesängen nahm der Kommers seinen gewohnten fröhlichen Verlauf.

Am Sonntag Morgen trafen wir uns auf der Exkneipe wieder, wo uns A. H. Eberhardt mit zwei großen Schüsseln Heringssalat überraschte. Um 12 Uhr begaben wir uns geschlossen zur Parade und von hier aus zum Festessen in die Liederhalle. Nachmittags 4 Uhr begann der Familienabend. Zu unserer großen Freude konnten wir auch hier wieder zahlreiche A. H. A. H. mit ihren Damen, sowie eine große Zahl unserer Bundesschwestern und Verbindungsdamen begrüßen. Den ersten Teil des Abends bildete ein kleines Konzert unter bewährter Leitung von A. H. Prof. Fladt, wonach dann Reiffs neuestes Stück „Der Schatzgräber“ aufgeführt wurde, welches großen Beifall erntete. Von der Jugend ungeduldig erwartet, folgte jetzt die Polonäse und dann in langer Kette ein Tanz dem andern. Mitternacht war längst vorbei, als man aufbrach, um sich im Café wieder zu treffen.

Die Weihnachtskneipe stieg am 14. Dezember, auf welcher A. H. Prof. Dr. Wildermuth über „den heutigen Stand der drahtlosen Telegraphie“ einen Vortrag hielt. Besondere Freude erweckte einer unserer Füxe, der als Weihnachtsmann aus seinem großen Sack allerhand Geschenke und Ueberraschungen hervorzauberte und zuletzt unter großem Halloh noch warme Würstchen verteilte.

Die erste größere Veranstaltung im neuen Jahr war unsere Damenkneipe, welche am 18. Januar 1913 stieg. Eine stattliche Korona Bundesschwestern und Verbindungsdamen waren erschienen, um in bunter Reihe mit uns bei Bier und Gesang den Abend zu verbringen. Durch Fuxenmimiken belebt, nahm die Kneipe einen sehr fröhlichen Verlauf, und alle werden sich gern an diesen Abend erinnern. **R. Geßner,**

D. W. V.

Die Arbeiten des Vorstandes des D. W. V. im ersten Vierteljahr 1913.

Der Organisationsausschuß hat die Geschäfte des D. W. V. noch bis Ende 1912 geführt. Mit Anfang 1913 hat der vom Vorstande gewählte und durch Zuwahl auf 20 Herren gebrachte Vorstand die Geschäftsführung übernommen. Der geschäftsführende Ausschuß wird gebildet von den Herren:

Oberlehrer Dr. W. Lietzmann, Barmen, Sehlhofstr. 39 (Vorsitzender),
Dr. med. Külz, Neuenahr (stellvertretender Vorsitzender),
Oberlehrer Dr. Steffen, Barmen, Tannenstr. 118, (1. Schriftführer),
Oberlehrer E. Greeff, Barmen, Kronenberger Str. (2. Schriftführer),
Oberlehrer W. Strunck, Vohwinkel, Postscheckkonto: 16607 Scheckamt Köln (Kassierer.)

Im verflossenen ersten Vierteljahr ist eine große Reihe von Fragen innerhalb des Vorstandes durch Rundschreiben erledigt worden. Außerdem hat Anfang Januar in Frankfurt a. Main eine Besprechung der dort ansässigen Vorstandsmitglieder unter der Leitung des Vorsitzenden stattgefunden und Mitte März eine Besprechung in Elberfeld, zu der unter anderen sechs von den sieben aktiven Vertretern erschienen waren. Zur Erleichterung der Arbeit sind bisher zwei Kommissionen eingesetzt worden, die eifrig an der Arbeit sind.

Ueber die Arbeiten des Vorstandes im einzelnen mögen hier die folgenden Angaben genügen.

Im Februar wurde wiederum eine Werbenummer herausgegeben, von der bisher 850 Exemplare versandt worden sind. Aus dem Inhalt der Werbenummer sei hier nur angeführt, daß im letzten Semester die Zahl der Aktiven gegenüber der letzten Werbenummer um etwa 500 gewachsen ist. Den früheren 78 Vereinen stehen jetzt 82 gegenüber. Ebenfalls erfreulich ist die Zunahme der Ortsgruppen in den einzelnen Städten; es bestehen gegenwärtig 25 Ortsgruppen und etwa 15 sind im Entstehen begriffen. Da der Erfolg der Werbenummer ein sehr weitgehender ist, besonders auch bei Werbung der Abiturienten, so soll bei nächster Gelegenheit wieder mit einer solchen gearbeitet werden. Sehr willkommen ist es dem Vorstande, wenn Wünsche betreffs der Werbenummern geäußert werden. Es wird gebeten, dies sowie auch etwaige Wünsche betreffs der D. W. V.-Schriften an Herrn Oberlehrer Greefi Barmen zu richten.

Pfingsten 1914 findet in Frankfurt a. Main der zweite D. W. V.-Tag statt. Eine vorbereitende Sitzung wird der Vorsitzende Mitte September veranstalten. Es wäre wünschenswert wenn die Vereine Anträge für die anläßlich des D. W. V.-Tages stattfindende Vertreterversammlung bis dahin einbringen würden, damit sie in der Vorsitzung schon zur Sprach kommen können.

Es ist in Aussicht genommen, außer der mit dem D. W. V.-Tag verbundenen Vertreterversammlung eine Reihe von Vorträgen stattfinden zu lassen, in denen einmal die Aufgaben des Studenten im öffentlichen Leben und zum andern die wissenschaftlichen Institute der neu gegründeten Universität Frankfurt behandelt werden möchten. Außer einem Begrüßungsabend wird ein studentischer Kommers stattfinden und für Besichtigungen gesorgt werden. Bei sämtlichen Veranstaltungen, mit Ausnahme der Vertreterversammlung, werden auch die Damen des D. W. V. gern gesehen werden, für die besondere Führungen geplant sind.

Steffen.

Schriften des D. W. V.

Das Heft 1 der Schriften des D. W. V. ist im Verlag von B. G. Teubner erschienen und ist zum Preise von 1 Mark durch jede Buchhandlung zu beziehen. Das Heft enthält:

1. Die Geschichte der Gründung des D. W. V.
2. Referate, die auf dem ersten Deutschen Wissenschafter-Tag am 25. Mai 191 in Cassel gehalten wurden:
   „Welche Bedeutung kann der D. W. V. im öffentlichem Leben gewinnen? Referat von W. Lietzmann.
   „Welche Bedeutung kann der D. W. V. für die ihm angehörenden Verbänd und Verbindungen erlangen?“ Referat von K. Michel.
3. „Ortsgruppengründung im Deutschen Wissenschafter-Verband“. Ratschläge vo Dr. Silberbach.
4. Satzung des D. W. V.
5. Die im D. W. V. vereinigten Verbände und Vereine.

D. W. V.

Ortsgruppe Mainz.

Am 6. Januar fanden sich die Mitglieder der Ortsgruppe zum ersten Male im neuen Jahre wieder zusammen. War auch die Zahl der Anwesenden nicht gerade groß, so waren dafür aber die seltensten Leute erschienen.

Am 13. Februar fand die zweite Zusammenkunft statt. Stattlich war die Zahl derer, die der Einladung gefolgt waren. Mit besonderer Freude begrüßte der Vorsitzende Prof. Dr. Hellwig die zahlreich erschienenen Damen. Alsdann sprach Herr Oberlehrer Schulze über „Skisport“. Nach kurzer geschichtlicher Einleitung gab der Vortragende die einfachsten technischen Fertigkeiten dieses für uns immerhin noch neuen Wintersports. In bilderreicher, poetischer Sprache schilderte er die Schönheit der Winterlandschaft. Am Ende des ersten Teiles seines Vortrags berichtete der Vortragende dann noch über den Skikursus, den der Mainzer Skiklub auf der Lenzer Heide abhielt und a dem der Vortragende selbst teilgenommen ha Im zweiten Teil zeigte Herr Oberlehrer Schulz an Hand von etwa 80 Lichtbildern, da er vorher nicht zuviel gesagt. Besonder Teilnahme unter den Anwesenden erregte die Bilder, auf denen bekannte Personen z finden waren. Nach dem Vortrag sah ma sich in gemütlicher Runde froh vereint. Hie doch die treue Hausgefährtin diesmal m Ueberstunde.

Auf der Hauptversammlung der Ortsgrupp am 13. März wurden die üblichen Bericht erstattet und der seitherige Vorstand einstimmi wiedergewählt. Herr Michel berichtete übe die jüngsten Vorgänge im D. W. V. De Vorsitzende widmete dem Ehrenvorsitzende Prof. Dr. Schaum, der am 1. April in de Ruhestand tritt und nach Eberstadt überzieh einen sehr warmen Nachruf.

Der nächste A. H.-Abend soll am Mittwoch den 9. April 8 c. t. im Hotel Taunus stattfinden

Herr Assistenztierarzt Michel wird über die Bedeutung des D. W. V. sprechen.

Mainz, 15. März 1913. **G. Lust.**

Ortsgruppe Oldenburg.

In der Versammlung am 7. März waren anwesend Prof. Dr. Bapp, Prof. Dr. Wisser, Oberkirchenrat Iben, Dr. med. Cornelius, Pastor Reil, prov. Assistenzprediger Suhren und die Studierenden: Lüdtke, Ordemann, Dede, Tapken, Meyer, Siemer.

Prof. Dr. Wisser sprach über das Märchen von Hänsel und Gretel. Er wies auf Grund der von ihm in Ostholstein gefundenen Fassungen nach, daß es einer Gruppe von Märchen zugehört, die eine Reihe von Motiven gemeinsam haben und daß Gretel ursprünglich der Hexe jüngste Tochter ist, mit der Hänsel als ihr Verlobter aus dem Hause der Hexe entflieht.

Im Anschluß daran behandelte Prof. Dr. Bapp die Märchen von der vergessenen Braut, vom Drachentöter und vom starken Hans. Er suchte einen inneren Zusammenhang dieser Geschichten nachzuweisen und stützte sich dabei besonders auf die merkwürdige Übereinstimmung derselben einerseits mit der Siegfried- und Tristansage andererseits mit den antiken Heldensagen von Herakles, Theseus, Jason und Perseus.

Mitgliederverzeichnis des Arnstädter Verbandes.

Nachtrag und Berichtigung:

Gießen.

Inaktive: Wilh. Bonrath, Nieder-Wöllstadt, Franz Spiegelberg, Sondershausen. Heinr. Bellof, Gießen, Wolfstr. 15. Heinr. Haun, Ober-Roßbach. Forsthaus Reinhard. Rudolf Veith, Darmstadt, Mathildenstr. 22. Heinr. Laukhard, Gießen, Bleichstr. 25. Wilh. Fritz, Ober-Olm. Wilh. Walther, Friedberg-Fauerbach. Georg Steinebach, Gießen, Ebelstr. 20. Friedr. Weitzel, Hungen. Karl Olt, Michelstadt.

Aktive: Albert Gadow, Biebrich a. Rh. Ernst Claus, Trebur bei Groß-Gerau. Georg Horn, Wersau i. O., Post Brensbach. Jean Neef, Mainz, Rhabanusstr. 6. Robert Schmalz, Gießen, Ludwigstr. 21. Phil. Stellwagen, Framersheim. Karl Schmidt, Worms, Heinrichstr. 5. Richard Görlach, Ostheim b. Butzbach. Albert Gilbert, Heuchelheim b. Gießen. Friedr. Kühnemund, Untermhaus b. Gera. Hans Legler, Gießen, Gutenbergstr. Friedr. Seibel, Darmstadt, Pankratiusstr. 24. Adolf Ackermann, Gießen, Ostanlage 5. Phil. Rupp, Esselborn b. Alzey.

Auswärtige Mitglieder: Dr. Adolf Weber (Ma), Frankfurt a. M., Merianplatz. Arthur Kraft (He), Langensalza, Moltkestr. Oskar Neuß, Hannover. Bruno Spechter, Groß-Kuhren b. Königsberg. Eduard Maser, Groß-Umstadt, Hessen. Fritz Strack, Orleshausen b. Büdingen.

Ständige Gäste: Richard Schmalz, Lehramtsassessor, Gießen, Bleichstr. 35. Arthur Scharmann, Nieder-Weisel b. Butzbach.

Unterfertigter erfüllt hiermit die schmerzliche Pflicht, seine lieben E. M. E. M., A. H. A. H. und Vb. Vb. von dem am 20. Februar 1913 erfolgten Hinscheiden seines lieben Alten Herrn

Willy Howe

Dr. phil.

geziemend in Kenntnis zu setzen.

Der Mathematische Verein an der Universität Berlin.

I. A.: **Ernst Radel** ×.

Familiennachrichten.

Geboren: Ein Sohn: O.-L. E. Zoch (A. H. Ma), Wanne. — Eine Tochter: O.-L. W. Paeckelmann (A. H. Ma), Barmen.

Verlobt: Dr. Herm. Schwanecke (A. H. Ma), Marburg mit Frl. Elisabeth Schmelz, Marburg. Werner Dreetz (A. H. Be I), Charlottenburg, mit Frl. Käthe Stobbe, Charlottenburg.

Briefkasten.

Bei allen zum Druck bestimmten Sendungen bitten wir, das Papier nur auf einer Seite zu beschreiben!

Die Schriftleitung bittet dringend um rechtzeitige Einsendung der Adressen der Ortsgruppen für die Adreßtafel. (Vgl. die vorige Nummer.)

Wegen des Verbandstages soll die Mainummer schon Ende April (statt 10. Mai) versandt werden. Mitteilungen, Berichte usw. für diese Nummer müssen daher bis zum 15. April an die Schriftleitung, Dr. Wilh. von der Seipen, Remscheid, Augustastr. 6a, eingesandt werden.

Adressentafel

Verein	Adresse	Vereinslokal	Sitzungen	Bemerkungen
Berlin I. (M. V.)	Berlin W. 8, Behrenstr. 40.	Münzstr. 8, (Eigene Wohnung).	Montag: Konvent. Dienstag: Spielabend. Jed. Donnerstag: Wissensch. u. Kneipe.	
A. H.-Vorstand:	V.: Prof. Dr. Knoblauch, Berlin W. 35, Am Karlsbad 12/13. Schr.: O.-L. Dr. K. Hoffmann, Spandau, Falkenhagener Str. 1. K.: O.-L. O. Wüllenweber, Berlin SW. 47, Katzbachstr. 16.			
Berlin II. (A. A.V.)	Hans Falkenberg, S. 14, Kommandantenstr. 63/64 I.	Charlottenbg., Kais. Friedrichstr. 53. Rest. „Zur Hütte“.	Dienstags: Konvent, Wissenschaft und Kneipe.	
A. H.-Vorstand:	V.: Geh. Reg.-Rat Dr. F. Plato, Wilmersdorf b. Berlin, Wilhelmsaue 24. Schr.: Kand. d. h. Lehramts H. Liebig, Berlin SO. 16, Köpenicker Str. 115. K.: O.-L. M. Köppe, Karlshorst b. Berlin, Prinz Joachimstr. 6.			
Bonn (M.-N. V.)	W. Ludwig, Sternenburgstr. 34 II.	Düsseldorfer Hof,	Montag: Konvent 8½ h. c. t. Freitag: Wissenschaft u. Kneipe. 8½ h. c. t.	Mittwoch: offiziöser Abend in der Kaiserhalle 9 h. c. t.
A. H.-Vorstand:	V.: Prof. Dr. Knops, Essen. K.: O.-L. Dr. Fr. Pohl, Düsseldorf-Oberkassel, Luegplatz 1.			
Braunschweig (A. W. V. Makaria.)	Technische Hochschule.	Wolters Hofbräuhaus, Güldenstr. 7.	Mittwoch: Wissenschaftlicher Abend, anschl. Biertisch. Sonnabend: Kneipe.	Sonntag: Frühschoppen im Rest. Lindenhof, Humboldstraße.
Breslau (M. V.)	Kaufmannsheim, Schuhbrücke 50/51.		Dienstag: 9 h. s. t. Konvent u. Spielabend. Sonnab.: 8½ h. s. t. Wissenschaft 9½ Kneipe	
Vertrauensmänner des A.H.-Verbandes:	Prof. R. Dittrich, Breslau IX, Paulstr. 34. Prof. Dr. H. Vogt, Breslau XVI, Auenstr. 14. Prof. Dr. M. Pechę, Breslau VIII, Vorwerkstr. 36/38.			
Dresden (Wiss. Verb. Makaria.)	Technische Hochschule.	Konzerthaus, Zoolog. Garten, Tiergartenstr.	Dienstag: Konvent, Spielabend je 14-tägig. Wissenschaft 8tägig. Sonnabend: Kneipe.	Sonnab. nach d. 15. jed Mon. A.H.-Stammtisch i. Reichsbanner, Dr.-A., Kreuzstr,
A. H.-Vorstand:	V.: Arthur Hofmann, Dresden N., Nordstr. 33. Schr.: Kurt Aulhorn, Dresden-Striesen, Eisenacherstr. 21.			
Frankfurt a. M. (M.-N. St. V.)	G. Zecher, Frkf-Ndd. Odenwaldstr. 28.	Altdeutsch. Bierstub. Garküchenplatz 11.	Freitag: 8¾ s. t. Wissenschaft und Kneipe.	
Freiburg (M.-N. V.)	Freischütz, Bertholdstr. 25.		Montag: Konvent Donnerstag: Stammtisch. Freitag: Vortrag und Kneipe.	
A. H.-Vorstand:	V.: Prof. Gustav Vollmer, Karlsruhe, Douglasstr. 9 II. Schr.: Dr. Theod. Umbach, Nahrungsmittelchemiker, Karlsruhe, Hirschstr. 77. K.: Prof. Dr. Franz Warthmann, Freiburg, Zähringerstr. 7.			
Giessen (M.-N. V.)	Hotel Kaiserhof, Schulstraße.		Mittwoch: Wissenschaft und Konvent. Samstag: Kneipe. Sonntag: Frühschoppen.	
A. H.-Vorstand:	V.: O.-L. Prof. Dr. Georg Krausmüller, Gießen, Bergstr. 21. Schr.: Finanzassessor Karl Hanack, Nidda (Hessen). K.: Finanzrat Hermann May, Hungen (Hessen).			
Göttingen (M.V.)	Rest. „Alte Fink“, Nikolaistr. 1.		Donnerstag: Spielabend. Sonnabend: Wissenschaft und Kneipe.	
A. H.-Vorstand:	V.: Prof. Dr. E. Götting, Göttingen, Feuerschanzengraben 15. Schr.: Privatdozent Dr H. Weyl, Göttingen, Nicolausbergerweg 37. K.: Rechnungsrat D. Dykhoff, Göttingen, Düsterer Eichenweg 17a.			
Greifswald (M.-N. V.)	Brüggstraße 20.		Dienstag: Konvent. Freitag: Wissenschaft und Kneipe.	
A.-H.-Vorstand:	Dr. Bentzien, Charlottbg., Bismarckstr. 91. Schr.: Prof. Müsebeck, Stettin, Kaiser-Wilhelm-Str. 22. Prof. Dr. Schreber, Aachen, Elisabethstr. 6. O.-L. Dr. Mattenklodt, Gelsenkirchen, Hohenstaufen-Allee 12.			
Halle (M. V.)	Schultheiß, Poststraße 5.		Dienstag: Konvent und Spielabend. Freitag: Wissenschaft und Kneipe.	Sonnt., 12. c. t.: Frühschopp. im „Schultheiß“, Poststr. 5.
Heidelberg (M. V.)	Goldenes Fäßchen, Ingrimstr. 16.		Montag: Vortrag und Convente. Samstag: Referat und Kneipe.	Mittwoch: Biertisch im „Perkeo“.
A. H.-Vorstand:	V.: Prof. St. Dauss, Baden-Baden, Langestr. 124. Schr.: Lehramtspraktikant Ludwig Kratochvil, Mannheim, Collinistr. 8. K.: Prof. E Gscheidlen, Mannheim, Rheinaustr. 19.			
Jena (Ak.-M. V.)	Hotel Deutsches Haus.		Mittwoch: Konvent. Freitag: Vortrag; Kneipe. Sonnabend: Spielabend.	
A. H.-Vorstand:	V.: Dr. Herm. Pistor, Jena, Neugasse 19. Schr.: Dr. Hans Boegehold, Jena, Paulinenstr. 24. Ersatzmann: Dr. Otto Wagner, Jena, Kaiserin-Augustastr. 6.			
Kiel (M.-N. V.)	Universität.	Restaurant zum Prinzen Heinrich. Feldstraße.	Freitag.	
Leipzig (M. V.)	Restaur. „Johannistal“, Hospitalstr. 22.		Dienstag: Konvent u. Spielabend. Sonnabend: Vortrag und Kneipe.	Sonntag: (1. u. 3. im Monat) Exbummel.
A. H.-Vorstand:	V.: Studienrat Prof. Dr. Lehmann, Leipzig, Pfaffendorferstr. 9. Schr.: Prof. Dr. Kämpfe, Leipzig, Gustav-Adolfstr. 25. K.: H. Büttner, stellv. Direktor der Teutonia, L.-Gohlis, Herloßsohnstr. 5.			
Marburg (M.-Ph. V.)	Restaurant Briel, Kasernenstr. 19a.		Mittwoch: 8 h. c. t. Wissenschaft für III. u. höhere Semester. 9 c. t. Konvent. Sonnab.: 8½ h. s. t. Kneipe.	35jähr. Stiftungsfest vom 9. bis 12. Mai 1913 (Pfingsten).
A. H.-Vorstand:	V.: Dir. W. Zint, Frankfurt a. M.-Süd, Holbeinstr. 21. Schr.: O.-L. Dr. B. Löffler, Frankfurt a. M., Heinestr. 10. K.: O.-L. Dr. F. Paehler, Frankfurt a. M., Eschersheimerlandstr. 76.			
Strassburg (M.-N. V.)	Münchener Kindl.		Mittwoch: Abwechselnd Konvent oder Vortrag mit anschließenden Kneipen. Sonnabend: Stammtisch i. Münch. Kindl.	Sonnabend 6 h. — 8 h. A.H.-Dämmerschoppen im Münchener Kindl.
A. H.-Vorstand:	V.: Prof. Dr. Schilke, Dir. d. Oberrealschule am Kaiserpalast, Straßburg (Els.), Palaststr. 7. Schr.: Prof. Leman, Straßburg (Els.), Spachallee 9. K.: Dir. L. Brehme, Straßburg (Els.), Apffelstr. 11.			
Stuttgart (A.-W. V. Makaria.)	Technische Hochschule.	Restauration Engel, Kriegerstr. 2.	Mittwoch: Exkneipe im Silbernen Hecht. Samstag: Wissenschaft und Kneipe.	Jed. letzt. Sonnabd. d. Mts. A.H.-Abd. i. „Silbern. Hecht“
Berlin.	Jeden Donnerstag nach dem Ersten des Monats. Stammtisch Alter Herren des M.-N. V. Greifswald im Heidelberger, Friedrichstr. 143-149. Auskunft erteilt: Prof. Dr. Thürling, Karlshorst, Heiligenberger Str. 12.			
Bremen	Dr. E. Büchner, Brückenstr. 41 III.	Senator	Jeden 2. Mittwoch im Monat.	Stammtisch alter Herren d. V. M. N. V.
Dessau.	Verbandsstammtisch. In den Ferien jeden Donnerstag. Auskunft erteilt Fr. Claußen, Blumenthalstr. 7.			
Elberfeld	Dr. W. Boy, Barmen, Krautsbergstr. 1 III	Im Hofbräu.	Jeden ersten Donnerstag im Monat	Stammtisch alter Herren d. V. M. N. V.
Frankfurt a. M.	Rest. Salzhaus (am Salzhaus.)		Verbandsstammtisch i. d. Ferien jed. Mittwoch 9 c. t.	
Hamburg	Dr. Haß, Klosterallee 63. Jed. erst. Donnerstag i. Monat Verb.-Stammtisch i Hotel Continental am Hauptbahnhof.			
München	Verbandsstammtisch. Ausk. erteilt Hans Nachtsheim, Landwehrstraße 23 II.			
Rostock	Stammtisch alter Herren d. V. M. N. V. Ausk. erteilt Sen. Dr. P. Müller, St. Georgenstr. 40.			
Wilhelmshaven.	Assess. Lauterwald Hollmannstr. 43	„Franziskaner“	Jeden 1. Montag im Monat	Stammtisch d. A. H. des Arnst. Verb. u. des D. W. V.

Verantwortlicher Schriftleiter: Dr. W. von der Seipen, Remscheid, Augustastr. 6a. — Herausgegeben im Selbstverlage des Verbandes. Für den Verlag verantwortlich der Geschäftsleiter: K. Lehmann, Tegel-Berlin, Veitstr. 44. — Kommissionsverlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin. — Druck von Bernhard Paul, Königl. Hoflieferant, Berlin SW. 48.

PROGRAMM

DES

K. K. REAL- UND OBER-GYMNASIUMS

IN

UNG.-HRADISCH

IN MÆHREN.

VERŒFFENTLICHT AM SCHLUSSE DES SCHULJAHRES 1876/77.

Inhalt:

1. Maxima und Minima vom Standpunkte der Mittelschule. Vom k. k. Gymnasiallehrer Josef Gaideczka.
2. Schulnachrichten. Vom Director Vincenz Bienert.

UNG.-HRADISCH.
Selbstverlag des k. k. Real- und Ober-Gymnasiums.

Druckfehler im mathem. Aufsatze:

Seite 15, Zeile 15 von oben statt: $\frac{\sin.\gamma}{\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}-\cos.\gamma} \ldots\ldots \frac{\sin.\gamma}{\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}-\frac{a+b}{b-a}\cos.\gamma}$.

„ 15, „ 3 „ unten „ $x=-\frac{r}{4}+\frac{3r}{4} \cdots x=-\frac{r}{4}+\frac{3r}{4}$

„ 22, im Beispiel 4 „ $s.y=s-x \ldots s-y=s-x;$

„ 24, Zeile 2 von oben „ $sx^2=y^2 \ldots 8x^2=y^2$

„ 25, im Beispiel 10 β) „ $3\pi x^2y \ldots 2px^2y.$

„ 28, Zeile 2 von unten „ $2y^2yp \ldots 2x^2yp.$

„ 30, im Beispiel 14 α) „ $\frac{y^2}{2y}=\frac{4x^2}{4x}=\ldots\ldots\frac{y^2}{2y}=\frac{4x^2}{4y}=$

„ 31, Zeile 10 von oben soll heissen:

$$y^2=\frac{r^2}{5}(10-2\sqrt{5}) \text{ und } x^2=\frac{r^2}{10}(5+\sqrt{5})$$

„ 31, Beispiel c) statt: $2px \ldots 2\pi y$

„ 35, Zeile 9 von unten soll heissen: $F(x)=\sin.\left\{\frac{3\pi}{4}-\frac{a}{2}\right\}\cos.\left\{\frac{3\pi}{4}+\frac{a}{2}\right\}$

„ 35, „ 8 „ „ „ „ $-\sin.^2\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right\}$ Min.

„ 37, „ 2 „ „ $a^2+b^2-2ab\cos.x=c^2+d^2-2cd\cos.y$
oder $2cd\cos.y-2ab\cos.x=$

„ 38, im Beispiel 10) $\ldots\ldots z^2=b^2+x^2-2bx\cos.(\alpha-\varepsilon)$

„ 39, Zeile 3 von oben soll heissen: $\frac{1}{2}\left[b^2+x^2-\ldots\right]$,

„ 39, „ 4 „ „ „ „ $\frac{c\sin.\varepsilon}{y}-\frac{b\sin.(\alpha-\varepsilon)}{z}=0$

„ 40, „ 6 „ „ „ „ $\frac{4R^2\sin.x.\sin.y\sin.z}{8R\cos.\frac{x}{2}.\cos.\frac{y}{2}.\cos.\frac{z}{2}}$

„ 40, Beispiel β) statt: $F=\frac{a}{b}\sin.z \ldots\ldots\frac{ab}{2}\sin.z$

„ 41, letzte Zeile: min. $(F)=3\sqrt{3}.r^2$;

Maxima und Minima
vom Standpunkte der Mittelschule.

Jeder mathematische Ausdruck wie: $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ ist eine gesetzmässige Verbindung von constanten und veränderlichen Grössen; von letzteren ist der Wert des Ausdruckes abhängig; um anzuzeigen, dass der Wert des Polynoms von x abhängig ist, sagt man kurz: Das Polynom ist eine Function von x, und schreibt dafür F(x), oder $\varphi(x)$ oder $\psi(x)$. Ist die Verknüpfung der constanten und veränderlichen Grössen eine derartige, dass die Veränderliche x beim Uebergange von einem bestimmten Werte zum andern alle nur denkbaren Zwischenwerte durchwandert, auch der Wert des Ausdruckes sich continuirlich ändert, so heisst eine solche Function eine continuirliche, sonst eine discontinuirliche. Das geometrische Bild einer continuirlichen Function ist eine in ihrem Verlaufe ununterbrochene, das einer discontinuirlichen Function eine unterbrochene Curve, welche dadurch erhalten wird, dass man die verschiedenen Werte der Veränderlichen x als Abscissen, und die zugehörigen Werte der jeweiligen Function als Ordinaten construirt und die Endpunkte der letzteren mit einander verbindet. Darnach ist Fig. 1 das geometrische Bild der continuirlichen Function: $F(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$,

denn für negative x ist F(x) stets positiv,

für $x = x = 0$	ist $F(x) = 12$
„ $x = 1$	„ $F(x) = 3$
„ $x = 1{\cdot}5$	„ $F(x) = 3{\cdot}5625$
„ $x = 2$	„ $F(x) = 4$
„ $x = 3$	„ $F(x) = 3$
„ $x = 3{\cdot}5$	„ $F(x) = 5{\cdot}75$
„ $x = 4$	„ $F(x) = 12$

dagegen ist $\varphi(x) = \frac{x}{x-3}$ wie Fig. 2 zeigt, discontinuirlich, denn:

für $x = 0$	ist $\varphi = 0$
„ $x = 1$	„ $\varphi = -\frac{1}{2}$
„ $x = 2$	„ $\varphi = -2$
„ $x = 2{\cdot}9$	„ $\varphi = -29$
„ $x = 3$	„ $\varphi = +\infty$
„ $x = 3{\cdot}1$	„ $\varphi = 31$
„ $x = 4$	„ $\varphi = 4$
. . . . .	
„ $x = -1$	ist $\varphi = \frac{1}{4}$
„ $x = -2$	„ $\varphi = \frac{2}{5}$
„ $x = -3$	„ $\varphi = \frac{1}{2}$
„ $x = -4$	„ $\varphi = \frac{4}{7}$

Eine continuirliche Function kann eine Zeit lang wachsen und dann wieder abnehmen oder umgekehrt, während ihre Stammvariable innerhalb bestimmter Grenzen alle auf einander folgenden Werte annimmt; in einem solchen Falle muss es zwischen jenen Grenzen einen solchen Wert von x geben, für welchen der entsprechende Wert des Ausdruckes grösser oder kleiner wird als der vorhergehende und auch der nachfolgende. Im ersten Falle hat die Function ein Maximum, im zweiten ein Minimum. Ein grösster oder kleinster Wert ist somit nicht absolut, sondern relativ in Bezug auf die zu beiden Seiten benachbarten zu verstehen. Daraus folgt von selbst, dass F(x) je nach Beschaffenheit der Function, mehrere Maxima oder Minima oder auch beides zugleich haben kann. Aus Fig. 1 ist ersichtlich, dass die vorgelegte Funotion $F(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ für $x = 2$ ein Maximum: max. $(F) = 4$; für $x = 1$, und $x = 3$ ein Minimum: min. $(F) = 3$ hat. Dagegen zeigt Fig. 2, dass $\varphi(x) = \frac{x}{x-3}$ weder eines Maximums, noch eines Minimums fähig ist, da die Ordinaten entweder fortwährend grösser oder kleiner werden.

Wiewol wir in jeder Elementarphysik Beispiele über Maxima oder Minima der Functionen finden, (wie z. B. wann ist beim schiefen Wurf die Wurfhöhe, wann die Wurfweite am grössten? oder wann ist die Stromstärke einer aus gegebener Quantität Electromotoren zu construirenden Volta'schen Kette am grössten?) so finden wir doch in keinem Lehrbuche der Elementar-Mathematik eine Andeutung über die allgemeine Lösung solcher Probleme. Freilich ist diese Partie im Lehrplan nicht direct angeführt, aber dessenungeachtet kann sie wegen ihrer Wichtigkeit und vorzugsweise wegen ihrer mannigfachen Anwendung in der reinen als auch in der angewandten Mathematik in den Unterrichtsstoff aufgenommen werden, ohne dadurch die Schüler zu überbürden, da man einerseits zu ihrer Einführung sehr wenig Zeit braucht, und andererseits in vielen Fällen schneller zum Resultate gelangt. Dass diese Partie auch wirklich an vielen Mittelschulen genommen wird, dafür sprechen die vielen hier einschlägigen Beispiele, die nicht blos in den meisten Programmen Deutschlands, sondern auch in dem Programme des akademischen Gymnasiums in Wien vom Jahre 1876 zu finden sind.

I. Maxima und Minima von Functionen einer Variablen.

A. Ganze, rationale Functionen.

Die allgemeine Form einer ganzen rationalen Function von einer variablen Grösse ist: $F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \ldots\ldots A_n x^n$, worin $A_0\, A_1\, A_2\, A_3 \ldots\ldots A_n$ constante Grössen sind, eine solche Function ist ein Maximum, wenn bei der Aenderung des x um eine unendlich kleine Grösse ($\pm h$) der Wert des Polynoms im Vergleich zum früheren kleiner ausfällt; in Zeichen: wenn sowol $F(x+h) < F(x)$, als auch $F(x-h) < F(x)$ wird.

Nun ist

$F(x+h) = A_0 + A_1(x+h) + A_2(x+h)^2 + A_3(x+h)^3 + \ldots\ldots A_n(x+h)^n$

oder wenn die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und die Glieder nach Potenzen von h geordnet werden:

$$\begin{array}{l} F(x+h) = A_0 \\ \quad + A_1 x \\ \quad + A_2 x^2 \\ \quad + A_3 x^3 \\ \quad \vdots \\ \quad + A_n x^n \end{array} \left| \begin{array}{l} + A_1 \\ + \binom{2}{1} A_2 x \\ + \binom{3}{1} A_3 x^2 \\ \vdots \\ + \binom{n-1}{1} A_{n-1} x^{n-2} \\ + \binom{n}{1} A_n x^{n-1} \end{array} \right| h + \left| \begin{array}{l} A_2 \\ + \binom{3}{2} A_3 x \\ + \binom{4}{2} A_4 x^2 \\ \vdots \\ + \binom{n-1}{2} A_{n-1} x^{n-3} \\ + \binom{n}{2} A_n x^{n-2} \end{array} \right| h^2 + \left| \begin{array}{l} A_3 \\ + \binom{4}{3} A_4 x \\ \vdots \end{array} \right| h^3 + \ldots + A_n h^n$$

Die Glieder der ersten Vertical-Reihe geben die vorgelegte Function selbst; setzt man die Glieder der zweiten Vertical-Reihe:

$$A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots (n-1) A_{n-1} x^{n-2} + n.A_n x^{n-1} = F'(x),$$

die der dritten Reihe:

$$A_2 + \binom{3}{2} A_3 x + \binom{4}{2} A_4 x^2 + \ldots\ldots \binom{n-1}{2} A_{n-1} x^{n-3} + \binom{n}{2} A_n x^{n-2} = F''(x)$$

die der vierten Reihe:

$$A_3 + \binom{4}{3} A_4 x + \binom{5}{3} A_5 x^2 + \ldots\ldots \binom{n}{3} A_n x^{n-3} = F'''(x)$$

so nimmt die geänderte Function folgende Form an:

$F(x+h) = F(x) + F'(x).h + F''(x).h^2 + F'''(x).h^3 + \ldots\ldots A_n h^n \ldots\ldots$ (a)

ist aber h negativ, dann

$F(x-h) = F(x) - F'(x).h + F''.h^2 - F''(x).h^3 + \ldots\ldots (-1)^n.A_n h^n \ldots\ldots$ (b)

Die Polynome: $F'(x)\, F''(x)\, F'''(x) \ldots\ldots$ heissen die abgeleiteten Polynome; beziehungsweise die erste, die zweite, die dritte ..... Ableitung.

1. Erlangt nun der vorgelegte Ausdruck F(x) für ein bestimmtes x den Maximalwert, dann muss sowol

$F(x+h) - F(x) = F'(x).h + F''(x).h^2 + F'''(x).h^3 + \ldots\ldots A_n.h^n$ als auch

$F(x+h) - F(x) = -F'(x).h + F''(x).h^2 - F'''(x).h^3 + \ldots\ldots (-1)^n.A_n.h^n$

gleichzeitig negativ ausfallen. Da man nun h immer so klein nehmen

kann, dass in den beiden letzten Reihen das erste Glied grösser als die Summe aller folgenden wird, so hängt offenbar bei diesen kleinsten Werten von h das Zeichen der Differenzen $F(x+h) - F(x)$ und $F(x-h) - F(x)$ von jenem des ersten Gliedes ab. Nun sind diese Zeichen des ersten Gliedes verschieden, je nachdem h positiv oder negativ ist; und doch muss

$$F'(x).h + F''(x).h^2 + F'''(x).h^3 + \ldots\ldots A_n.h^n \text{ und}$$
$$-F'(x).h + F''(x).h^2 - F'''(x).h^3 + \ldots\ldots (-1)^n A_n.h^n$$

stets negativ bleiben; dies ist dann möglich, wenn
$F'(x)$ d. i. $A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots\ldots n.A_n x^{n-1} = 0$ wird, und $F''(x)$ negativ ist.

2. Erlangt aber die vorgelegte Function für ein bestimmtes x den Minimalwerth, dann muss
$F(x+h) > F(x)$ und $F(x-h) > F(x)$ sein, d. h. es müssen die Differenzen
$F'(x).h + F''(x).h^2 + F'''(x).h^3 + \ldots\ldots A_n.h^n$ } für jedes positive und
$-F'(x).h + F''(x).h^2 - F'''(x).h^3 + \ldots\ldots (-1)^n A_n.h^n$ } negative h positiv sein,
was wieder zu der Folgerung führt, dass die Gleichung
$A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots\ldots + n.A_n x^{n-1} = 0$ erfüllt, aber $F''(x) > 0$ sein muss.

Die Methode, um zu untersuchen, ob eine Function $F = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_n x^n$ für irgend einen Wert der veränderlichen Grösse x ein Max. oder Min. wird, besteht darin, dass man aus dem gegebenen Ausdruck die erste abgeleitete Function $F'(x)$ bildet und gleich Null setzt: die Wurzeln dieser Gleichung $F' = 0$, oder

$A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots\ldots n\,A_n x^{n-1} = \ldots\ldots (1)$ machen den vorgelegten Ausdruck entweder zu einem Max. oder Minim., je nachdem für diese Werte die zweite abgeleitete Function $F''(x)$ neg. oder positiv ausfällt. Letztere Untersuchung ist aber nur in den seltensten Fällen wirklich notwendig, da man in den meisten Fällen schon aus der Natur des gegebenen Ausdruckes entscheiden kann, ob ein Max. oder Min möglich ist, und welches von beiden blos stattfinden kann.

Das Gesetz, nach welchem F' aus F abgeleitet wird, ist sehr. einfach: es wird der Exponent der Veränderlichen x, als Factor zum Coefficienten gesetzt, und der Exponent selbst um eine Einheit vermindert.

Durch einige Beispiele wird die Regel klar.

1. Der Ausdruck $F(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ wird für solche Werte von x ein Max. od. Min., welche aus der Gleichung $F'(x) = 0$ d. i. aus $4.x^3 - 3.8x^2 + 2.22x - 24 = 0$; oder $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ entspringen. Die Wurzeln der Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$; sind aber $x_1 = 1, x_2 = 2$

und $x_3 = 3$, und in der That zeigt ein Blick auf Fig. I., dass für $x = 1$ und $x = 3$ der Ausdruck $F(x)$ ein Min. ist, nemlich Min. $(F) = 3$; dagegen für $x = 2$ ein Max., Max. $(F) = 4$.

2. Eine gegebene gerade Linie ist in zwei Stücke so zu theilen dass das Rechteck aus denselben ein Max. wird.

Ist a die gegebene Strecke, x ein Theil derselben, so ist $F = x(a - x) = ax - x^2$; die Bedingungsgleichung $F' = 0$ liefert: $a - 2x = 0$ d. i. $x = \frac{a}{2}$; und max. $(F) = \frac{a^2}{4}$.

3. Aus einer quadratförmigen Tafel soll durch Wegschneiden von 4 gleichen Eckquadraten und gehöriges Zusammenbiegen ein offener, rechtwinkliger Kasten vom grössten Volumen gebildet werden.

a sei die Seite des gegebenen Quadrates, x die Seite des Eckquadrates, dann ist: $(a - 2x)^2$ die Basis und x die Höhe des Paralellepipedes und das Volumen $F = (a - 2x)^2 x = a^2 x - 4ax^2 + 4x^3$;

die Bedingungsgleichung $F' = 0 = a^2 - 8ax + 12x^2$ nach x aufgelöst gibt: $x = \frac{a}{3} + \frac{a}{6}$, $x_1 = \frac{a}{2}$ gibt kein Paralellepiped oder ein solches vom kleinsten Volumen, nemlich: min. $(F) = 0$;

$x_2 = \frac{a}{6}$ macht F zu einem Maxim.; max. $(F) = \frac{2a^3}{27}$.

4. α) Von welchem Punkte der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes muss man Perpendikel auf die Katheten fällen, damit das von ihnen und den Schenkeln des rechten Winkels umgrenzte Rechteck möglichst grossen Inhalt habe.

Ist ABC (Fig. 3) das gegebene Dreieck mit den Seiten a, b, c, D der gesuchte Punkt, so ist DEAG das verlangte Rechteck; dass dieses nur eines Max. fähig ist, zeigt folgende Betrachtung:

Je näher D gegen C rückt, desto schmäler wird die Fläche des Rechteckes, bis sie endlich, wenn D mit C zusammenfällt, gänzlich verschwindet; je näher D gegen B rückt, desto niedriger wird das Rechteck, bis endlich wieder beim Zusammenfallen des Punktes D mit B der Flächeninhalt abermals Null wird. Zwischen diesen beiden Grenzen Null und Null muss der Inhalt einmal am grössten sein.

$F(x) = AG.GD = x.GD$ aber $GD : BG = b : c$ also $DG = \frac{b}{c}(c - x)$

daher $F = \frac{b}{c}(cx - x^2) = bx - \frac{b}{c}x^2$.

Die Bedingungsgleichung $b - 2\frac{b}{c}x = 0$, gibt $x = \frac{c}{2}$ mithin auch $DG = \frac{b}{2}$ d. h. der gesuchte Punkt D muss in der Mitte der Hypothenuse liegen.

β) Welcher Punkt der Hypothenuse liefert das Rechteck, welches bei der Umdrehung um eine Kathete AC des gegebenen Dreieckes den Cylinder vom grössten Inhalte beschreibt?

Unter Beibehaltung voriger Bezeichnungen ist der Kubikinhalt des Cylinders gegeben durch: $F(x) = \pi . AG^2 . AE = \pi x^2 (b - y)$, wegen $b : c = y : x$ ist $y = \frac{bx}{c}$ und $F(x) = \pi x^2 (b - \frac{b}{c} x) = \frac{b}{c} \pi (cx^2 - x^3)$, da $\frac{b}{c} \pi$ stets constant bleibt, so ist F ein Max., wenn $cx^2 - x^3$ den grössten Wert annimmt; d. i. wenn $2cx - 3x^2 = 0$, oder $x = \frac{2c}{3}$ mithin $y = \frac{2b}{3}$ wird.

Der gesuchte Punkt D' schneidet also ein Drittel von der Hypothenuse ab u. z. von demjenigen Endpunkte aus, welcher bei der Drehung den Grundkreis des Kegels beschreibt, der Maximalwert von F ist $\text{max.}(F) = \frac{4}{27} bc^2 \pi$.

5. Welches ist das grösste unter den Dreiecken, die ihre Spitzen im Mittelpunkte eines gegebenen Kreises haben und deren Grundlinien parallele Sehnen sind?

Ist COD (Fig. 4) das verlangte Dreieck, dann ist:

$F(x) = \frac{1}{2} CD . OE = \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{r^2 x^2 - \frac{x^4}{4}}$, welcher Ausdruck gleichzeitig mit dem unter dem Wurzelzeichen den Maximalwert erhält; $r^2 x^2 - \frac{x^4}{4}$ wird aber Max. für solche Werte von x, die der Gleichung $2r^2 x - x^3 = 0$ Genüge leisten; d. i. $x = r\sqrt{2}$, mithin $OE = \frac{x}{2}$ d. h. die Sehne des Dreieckes COD mit dem grössten Inhalte $\text{max.}(F) = \frac{r^2}{2}$ ist die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Quadrates.

6. Auf einer geraden Linie XX' den Punkt N zu bestimmen, für welchen die Summe der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und B ein Minimum ist.

In Fig. 5 sind $AD = a_1$ $BD = a_2$ und $\sphericalangle \gamma$ gegebene Grössen, und ND die zu suchende, so dass $F(x) = \overline{AN}^2 + \overline{BN}^2$ ein Min. werden soll.

Wegen $\left.\begin{aligned} \overline{AN}^2 &= a_1^2 + x^2 - 2a_1 x \cos.\gamma \\ \overline{BN}^2 &= a_2^2 + x^2 - 2a_2 x \cos.\gamma \end{aligned}\right\}$ ist $F = a_1^2 + a_2^2 + 2x^2 - 2(a_1 + a_2) x \cos.\gamma$.

Dieser Ausdruck wird ein Min., sobald $4x - 2(a_1 + a_2) \cos.\gamma = 0$ oder $x = \frac{a_1 + a_2}{2} \cos.\gamma$ gesetzt wird; d. h. x muss eine Kathete eines

rechtwinkligen Dreieckes sein, dessen Hypothenuse $\frac{a_1 + a_2}{2}$ ist; es muss $CD = \frac{a_1 + a_2}{2}$ und CN senkrecht sein auf der gegebenen Geraden XX'.

$\min.(F) = a_1^2 + a_2^2 - \frac{a_1 + a_2}{2} \cos.^2 \gamma.$

7. Es ist ein Dreieck und auf der Seite AB der Punkt P gegeben; man soll QR (Fig. 6) parallel zur Basis so legen, dass der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreieckes PQR ein Max. wird.

Hier handelt es sich um den Punkt E; wird $CE = x$ gesetzt, so ist wegen $AB : RQ = CD : x$, $RQ = \frac{AB.x}{CD} = \frac{AB.x}{h}$ und $F = \frac{RQ.ED}{2} = \frac{AB.x}{2h}(h - x) = \frac{AB}{2}x - \frac{AB}{2h}.x^2$; soll F den Maximalwert annehmen, so ist $\frac{AB}{2} - \frac{AB}{h}x = 0$, od. $x = \frac{h}{2}$ zu setzen; d. h. die Höhe des gesuchten Dreieckes ist gleich der halben Höhe der ursprünglichen, und $\max.(F) = \frac{AB}{8}.h.$

8. Auf einem regelmässigen Sechseck steht eine Pyramide; man soll dieselbe durch eine Ebene parallel der Basis dergestalt schneiden, dass die auf dem Durchschnitt zu construierende Pyramide, deren Spitze im Mittelpunkte der Grundfläche der gegebenen sich befindet, möglichst grossen Kubikinhalt habe.

Ist a die Seite der Grundfläche, r der Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises, a' und r' dieselben Grössen bei der Schnittebene h die Höhe der Pyramide, und x der Abstand des Schnittes von der Spitze, so ist der Kubikinhalt $F = a'r'(h - x)$, worin noch a' und r' durch gegebene Grössen auszudrücken sind.

Aus $a : a' = h : x$ folgt $a' = \frac{ax}{h}$, ebenso

aus $r : r' = h : x$ „ $r' = \frac{rx}{h}$ daher $F = \frac{ar}{h^2}(hx^2 - x^3)$

F wird gleichzeitig mit $hx^2 - x^3$ ein Max.; letzteres tritt ein für denjenigen Wert von x, der sich aus der Gleichung $2hx - 3x^2 = 0$ ergibt; d. i. $x = \frac{2h}{3}$, das heisst der Schnitt muss doppelt so weit am Scheitel als von der Basis entfernt sein; $\max.(F) = \frac{4}{27}ahr = \frac{2\sqrt{3}}{27}a^2h.$

B. Gebrochene und irrationale Functionen.

Um auch für gebrochene und irrationale Functionen das Maximum oder Minimum zu finden, setzen wir in dem Ausdrucke $F(x) = (a + bx^2)^m (cx^3 + d)^n$, wo m und n ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sein mögen, statt x ..... x + h, entwickeln die Potenzen von h, so wird aus:

$$F(x+h) = [a + b(x+h)^2]^m [c(x+h)^3 + d]^n =$$
$$= [a + bx^2 + bh(2x+h)]^m [d + cx^3 + ch(3x^2 + 3xh + h^2)]^n =$$
$$= [(a+bx^2)^m + \binom{m}{1}(a+bx^2)^{m-1} bh(2x+h) + \binom{m}{2}(a+bx^2)^{m-2} b^2h^2 (2x+h^2)^2 + \ldots\ldots].[(d+cx^3)^n + \binom{n}{1}(d+cx^3)^{n-1} ch(3x^2+3xh+h^2) + \binom{n}{2}(d+cx^3)^{n-2} c^2h^2 (3x^2+3xh+h^2)^2 + \ldots.] =$$
$$= (a+bx^2)^m (d+cx^3)^n + [\binom{m}{1}(a+bx^2)^{m-1} 2bx.(d+cx^3)^n + \binom{n}{1}(d+cx^3)^{n-1} 3cx^2 (a+bx^2)^m]\, h + [\ldots..]\, h^2 + \ldots\ldots$$

ersichtlich, dass für den Fall des Max. od. Min. der Coefficient bei h gleich Null sein muss, somit:

$$m(a+bx^2)^{m-1} 2bx(d+cx^3)^n + n(d+cx^3)^{n-1} 3cx^2 (a+bx^2)^m = 0$$

der erste Theil dieser Bedingungsgleichung ist aus der vorgelegten Function so gebildet, als wäre der Factor $(d+cx^3)^n$ constant, und blos $(a+bx^2)^m$ veränderlich; von diesem veränderlich gedachten Factor ist $m(a+bx^2)^{m-1}$ nach dem bereits bekannten Gesetze ..... (1) abgeleitet und 2bx ist auch nichts anderes, als die erste Ableitung der Basis $(a+bx^2)$.

Im zweiten Theile erscheint wieder der Factor $(a+bx^2)^m$ als constant und aus $(d+cx^3)^n$ ist gebildet worden: $n(d+cx^3)^{n-1}$ mal der ersten Ableitung der Basis $(d+cx^3)$. Daraus ergibt sich folgende Regel: ist die Function, die zu einem Max. od. Min. werden soll von der Form $X^m Z^n$ worin X und Z Functionen derselben Veränderlichen x sind, so muss die Bedingungsgleichung: $mX^{m-1} X'Z^n + nZ^{n-1}Z'.X^m = 0$ ..... (2) erfüllt sein, gleichgiltig, ob m und n pos. oder neg., ganz oder gebrochen ist.

Darnach können folgende Beispiele gelöst werden:

1. Wann ist $\varphi(x) = \frac{x}{x-3}$ ein Maximum oder Minimum?

Die zu $\varphi(x) = \frac{x}{x-3} = x(x-3)^{-1}$ gehörige Bedingungsgleichung....(2)

$x(-1)(x-3)^{-2} + (x-3)^{-1} = 0$ oder $x = x - 3$ das ist $0 = -3$ enthält in sich einen Widerspruch, so dass man daraus für x Nichts findet; ein Zeichen, dass die gegebene Function $\varphi(x)$ für gar keinen Wert der Veränderlichen x einen grössten oder kleinsten Wert erreichen kann (bekannt aus Fig. 2).

2. Für welchen Wert von x wird $F(x)=x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ ein Max. oder Min.?

Zu $F(x)=x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt{\frac{ax^2-x^3}{a+x}}=(ax^2-x^3)^{\frac{1}{2}}.(a+x)^{-\frac{1}{2}}$ gehört nach .... (2) die Bedingungsgleichung:

$\frac{1}{2}(ax^2-x^3)^{-\frac{1}{2}}.(2ax-3x^2)(a+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(a+x)^{-\frac{3}{2}}.(ax^2-x^3)^{\frac{1}{2}}=0$ oder

$\frac{2ax-3x^2}{\sqrt{ax^2-x^3}}=\frac{\sqrt{ax^2-x^3}}{a+x}$ das ist $x^2+ax=a^2$, mithin

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

für $x_1=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ ist $F(x)=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$ ein Maximum und

für $x_2=-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$ ist $F(x)=-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}}$ ein Minimum.

3. Hat man die Aufgabe, eine Volta'sche Kette aus einer gewissen Menge von Elektromotoren zu construiren, so kann man daraus grössere Platten und wenig Elemente bilden, oder man macht eine grössere Anzahl von Elementen, indem man die Platten klein macht. Es frägt sich, bei welcher Anzahl n die Stromstärke S am grössten wird. Gesetzt, man habe aus dem gegebenen Material nur ein Element gemacht, so gibt die einfache Kette die Stromstärke $S=\frac{E}{K+L}$, wo E die elektromotorische Kraft der Elektricitätsquelle, K den Widerstand in der Kette selbst, L den im Schliessungsbogen bedeutet. Theilt man aber die gegebenen Platten in gleiche Theile, und macht daraus n Elemente, so wird der Widerstand in jedem Elemente nK, daher in n Elementen $n.nK=n^2K$, mithin die Stromstärke $S=\frac{nE}{n^2K+L}=\frac{E}{nK+\frac{L}{n}}$. S wird nun am grössten, wenn der Nenner $nK+L.n^{-1}$ am kleinsten ist, also die Bedingungsgleichung: $K-1.Ln^{-2}=0$ erfüllt ist; daher $n^2=\frac{L}{K}$ also $n=\sqrt{\frac{L}{K}}$, und max. $(S)=\frac{E}{2\sqrt{K.L}}$.

4) α) In einer gegebenen Geraden MN (Fig. 7) einen Punkt C von der Beschaffenheit zu finden, dass wenn er mit zwei andern ausserhalb der MN liegenden und der Lage nach gegebenen Punkten A und B verbunden wird, die Zeit, die ein Körper zum Durchlaufen des Weges AC + BC braucht, ein Minimum werde.

A und B sind bekannt, heisst: man kennt ihre Abstände $AA' = a$, $BB' = b$ von der Geraden MN und auch die Entfernung ihrer Fusspunkte $A'B' = c$; wird $A'C = x$, und die constante Geschwindigkeit des Körpers $= v$ gesetzt, so ist

$$F(x) = \frac{AC + CB}{v} = \frac{1}{v}\left[\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{v}\left\{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \left[b^2 + (c-x)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Da F ein Min. werden soll, muss F' gleich 0 gesetzt werden, d. i.

$$\frac{1}{v}\left\{\tfrac{1}{2}(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \tfrac{1}{2}\left[b^2 + (c-x)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(c-x)(-1)\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \text{ aber } \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{A'C}{AC} = \cos.\alpha \\ \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} &= \frac{B'C}{BC} = \cos.\beta \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{mithin} \\ \cos.\ \alpha = \cos.\ \beta \\ \text{od. } \measuredangle\ \alpha = \beta \end{array}$$

β) Befinden sich die gegebenen Punkte A und B auf entgegengesetzten Seiten der Geraden MN, und bewegt sich ein Körper so, das er längs der Geraden AC die constante Geschwindigkeit v, längs CB die constante Geschwindigkeit v' besitzt: wo muss dann der Punkt C liegen, damit der Körper in der kürzesten Zeit von A nach B gelange?

Unter Beibehaltung obiger Zeichen ist: $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$, $CB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$ und die nur eines Minimum fähige Function:

$F(x) = \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{v} + \frac{[b^2 + (c-x)^2]^{\frac{1}{2}}}{v'}$; die dazu erforderliche Bedingungsgleichung: $\frac{1}{2}\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{v} + \frac{1}{2}\left[b^2 + \left(c-x\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2(c-x)(-1)}{v'} = 0$

gibt

$$\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v'\sqrt{b^2+(c-x)^2}} \text{ oder } \frac{\cos.\alpha}{v} = \frac{\cos.\beta'}{v'} \text{ d. i. } \frac{\cos.\alpha}{\cos.\beta'} = \frac{v}{v'}$$

oder $\frac{\sin.\alpha''}{\sin.\beta''} = \frac{v}{v'} = n$ (const.)

Da nun das Licht, wenn es von A ausgeht und einmal mittelst des ebenen Spiegels MN nach B zurückgeworfen wird, ein anderes Mal in ein neues Medium übertritt, in der That dem Gesetze gehorcht, dass im ersten Falle der einfallende und zurückgeworfene Stral mit MN gleiche Winkel bilden, im zweiten Falle aber das Verhältnis der Sinus des Einfallwinkels zum Sinus des Brechungswinkels constant bleibt, so folgt, dass das Licht auf dem kürzesten Wege, der bei dieser Reflexion oder Brechung möglich ist, von A nach B gelangt.

Das Gesetz, nach welchem bei allen andern Naturerscheinungen jederzeit der geringste Aufwand von Kraft und Mitteln stattfindet, heisst das Gesetz der kleinsten Wirkung oder der grössten Sparsamkeit.

5. Innerhalb eines rechten Winkels ist ein Punkt O durch die Coord. a, b, gegeben; α) man soll durch diesen die kürzeste Gerade ziehen, welche von beiden Schenkeln des rechten Winkels begrenzt wird. β) durch den gegebenen Punkt soll eine Linie so gezogen werden, dass das abgeschnittene Dreieck am kleinsten wird.

α) Die verlangte Linie kann nur ein Minimum werden; denn sie wird desto grösser, je mehr sie sich der parallelen Lage mit BA oder mit BC nähert; zwischen diesen Grenzen ∞ und ∞ muss sie einmal am kürzesten sein; in welchem Falle?

Wird in Fig. 8 $EH = x$ gesetzt, so ist $F(x) = HO + OG =$

$= (b^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + (a^2 + \overline{GJ^2})^{\frac{1}{2}}$ wegen $GJ : a = b : x$ ist $GJ = \frac{ab}{x}$

und $F(x) = (b^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + a(1 + b^2 x^{-2})^{\frac{1}{2}}$ die Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{2}(b^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} 2x + \frac{1}{2} a (1 + b^2 x^{-2})^{\frac{1}{2}} (-2 b^2 x^{-3}) = 0$$

oder $\frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}} = \frac{ab^2}{x^3 \sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}}$ liefert $x = \sqrt[3]{ab^2}$, daher $\min(F) =$

$$= \left(1 + \frac{a}{\sqrt[3]{ab^2}}\right) \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}} = \sqrt{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3}$$

Im Falle β) ist $F(x) = \frac{a+x}{2}(b + JG) = \frac{b}{2}\frac{(a+x)^2}{x} = \frac{b}{2}(a+x)^2 x^{-1}$

Die Bedingungsgleichung: $-(a+x)^2 x^{-2} + 2(a+x)x^{-1} = 0$ gibt $x = a$, also $\min.(F) = 2ab$.

6. Es sei die Gerade AB (Fig. 9) gegen die Fbene MN, und in dieser letzteren der Punkt O gegeben; man soll in der genannten Geraden jenen Punkt C finden, in welchem ein Licht auf den Punkt O die grösste Beleuchtung hervorbringt.

Bezeichnet i die Lichtmenge, welche O erhalten würde, falls die Lichtquelle in der Entfernung 1 senkrecht über O stünde, so lässt sich die Beleuchtung F für den Fall, wo sich die Lichtquelle in C befindet, nach dem Satze ermitteln, dass die Beleuchtung direct proportional dem Sinus des Einfallswinkels der Lichtstralen und umgekehrt prop. dem Quadrate der Entfernung ist; sie beträgt, wenn $CD \perp$ pl. MN, $F = \frac{i \sin. COD}{\overline{CO}^2}$;

ist ferner $OE \perp AD$, so ist $AE = a$, $EO = b$, und $\sphericalangle CAD = \alpha$ als

bekannt zu betrachten und durch diese Grössen die Beleuchtung $F = \frac{i}{CO^2} \cdot \frac{CD}{CO}$ auszudrücken. Nun ist $CD = AC \sin. \alpha = x \sin. \alpha$;

$CO^2 = CD^2 + DO^2 = CD^2 + DE^2 + OE^2 = x^2 \sin.^2\alpha + (x \cos.\alpha - a)^2 + b^2 =$
$= a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos.\alpha$

deshalb $F = \frac{i x . \sin. \alpha}{(a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos. \alpha)^{\frac{3}{2}}} = i x \sin. \alpha (a^2 + b^2 + x^2 -$
$- 2ax \cos. a)^{-\frac{3}{2}}$; F wird ein max. für diejenigen Werte von x, die sich aus der Gleichung $i \sin. \alpha (a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos. \alpha)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} i x \sin. \alpha (a^2 +$
$+ b^2 + x^2 - 2ax \cos.\alpha)^{-\frac{5}{2}} (2x - 2a \cos. \alpha) = 0$,
d. i. aus $(a^2 + b^2 + x^2 - 2ax \cos.\alpha) = 3x^2 - 3ax \cos.\alpha$, oder
$x^2 - \frac{ax}{2} \cos.\alpha = \frac{a^2 + b^2}{2}$ ergeben. Die Auflösung dieser Gleichung $x = \frac{a \cos.\alpha \pm \sqrt{a^2 \cos.^2 \alpha + 8(a^2 + b^2)}}{4}$ zeigt, dass zwei Punkte der Aufgabe genügen, von denen der eine auf AB, der andere auf der Rückverlängerung von AB liegt.

Steht die Gerade AB auf der Ebene senkrecht, so ist $\alpha = 90°$ $a = 0$, folglich $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ und max. $(F) = \frac{2i}{b^2 \sqrt{27}}$. Wollte man für den speciellen Fall $a = o$ den Neigungswinkel β bestimmen, unter welchem die Stralen gegen die Ebene in dem Punkte auffallen müssen, in welchem sie die möglichst starke Beleuchtung erzeugen sollen, so ist zu beachten, dass x und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind, weshalb tang. $\beta = \frac{x}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\beta = 35° 15' 32''$.

Diese Regel kann auch im Grossen (bei Strassenbeleuchtungen) eine gute Anwendung finden.

7. Es sind zwei Punkte A und B. und eine Gerade MN gegeben; in letzterer soll man den Punkt P so bestimmen, dass der Winkel, unter welchem die Strecke AB von P aus gesehen wird, seinen grössten Wert erhält.

Ist (in Fig. 10) O der Durchschnittspunkt von AB mit MN, $AO = a$, $BO = b$, $\sphericalangle NOB = \gamma$ bekannt, dagegen $\sphericalangle APB = \varphi$ unbekannt, so ist, wenn $OP = x$, $\sphericalangle OPA = u$ gesetzt wird, wegen der Proportion $a : x = \sin. u : \sin. (u + \gamma)$ d. i. wegen

$(x - a \cos. \gamma) \sin. u = a \sin. \gamma . \cos. u$; tang. $u = \frac{a \sin. \gamma}{x - a \cos. \gamma}$ und wegen der Proportion $: b : x = \sin. (u + \varphi) : \sin. (u + \varphi + \gamma)$

d. i wegen $x \sin.(u+\varphi) - b \sin.(u+\varphi) \cos.\gamma = b \cos.(u+\varphi) \sin.\gamma$

$\text{tang.}(u+\varphi) = \frac{b \sin.\gamma}{x - b\cos.\gamma}$, aber $\text{tang.}(u+\varphi) = \frac{\text{tang. u.} + \text{tg.}\varphi}{1 - \text{tg. u. tg.}\varphi}$; demnach

$b \sin.\gamma - b \sin.\gamma \frac{a \sin.\gamma}{x - a\cos.\gamma} \text{tg.}\varphi = (x - b\cos.\gamma)\left[\frac{a \sin.\gamma}{x - a\cos.\gamma} + \text{tg.}\varphi\right]$,

woraus sich für

$$\text{tg.}\varphi = \frac{b\sin.\gamma - \frac{a\,x\sin.\gamma}{x - a\cos.\gamma} + \frac{ab\sin.\gamma\cos.\gamma}{x - a\cos.\gamma}}{x - a\cos.\gamma + \frac{ab\sin.^2\gamma}{x - a\cos.\gamma}} = \frac{x(b-a)\sin.\gamma}{x^2 + ab - (a+b)x\cos.\gamma}$$

ergibt.

Für den Fall, als der Winkel φ den Maximalwert erhält, ist auch $\text{tg.}\varphi$ ein Maximum; letzteres tritt aber ein, wenn die Gleichung nach ..... (2)

$[x^2 + ab - (a+b)x\cos.\gamma]^{-1}(b-a)\sin.\gamma - [x^2 + ab - (a+b)x\cos.\gamma]^{-2}$

$[2x - (a+b)\cos.\gamma]x(b-a)\sin.\gamma = 0$

d. i. $x^2 + ab - (a+b)x\cos.\gamma = 2x^2 - (a+b)x\cos.\gamma$ erfüllt ist; die Auflösung $x = \pm\sqrt{ab}$ gibt zwei solche Punkte auf entgegeng esetzten Seiten von O aus.

$$\text{Max. (F)} = \text{max. (tg. }\varphi) = \frac{(b-a)\sqrt{ab}.\sin.\gamma}{2ab - (a+b)\sqrt{ab}.\cos.\gamma} = \frac{\sin.\gamma}{\frac{2\sqrt{ab}}{b-a} - \cos.\gamma}$$

für den speciellen Fall $\gamma = 90^0$ ist $\text{max. (tg. }\varphi) = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$;

8. Es ist ein Kreis und ein Peripheriepunkt A desselben gegeben; man soll die Sehne DE parallel der Kreistangente AT so legen, dass der Flächeninhalt des eingeschriebenen Dreieckes ADE ein Maximum wird.

Der Flächeninhalt des Dreieckes ADE (Fig. 11): $F = \frac{DE}{2} AC = \frac{s}{2}(r+x)$,

wo $CO = x$; aus $\triangle$ COE folgt: $\frac{s^2}{4} = r^2 - x^2$, also $\frac{s}{2} = \sqrt{r^2 - x^2}$

$F = (r+x)(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ wird ein Max., wenn die Relation:

$(r+x)\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ od. $rx + x^2 = r^2 - x^2$

Statt hat.

Aus der quadratischen Gleichung: $x^2 + \frac{r}{2}x = \frac{r^2}{2}$ ergeben sich 2 Werte

für $x = -\frac{r}{4} + \frac{3r}{4}$, von denen nur $x = \frac{r}{2}$ brauchbar ist, da für $x = -r$ der Flächeninhalt $= 0$ wäre; es ist somit die Höhe des gesuchten Dreieckes $AC = \frac{3r}{2}$ und $\text{max. (F)} = \frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$

9. Um die Brennpunkte einer gegebenen Elipse sind mit bekannten Radien Kreise beschrieben, welche innerhalb der Elipse liegen; auf der letzteren soll der Punkt P so bestimmt werden, dass die Summe der von ihm aus an die Kreise gelegten Tangenten ein Max. wird.

Bezeichnet man die Halbaxen der Elipse mit a und b, die Radien der um die Brennpunkte B und B' beschriebenen Kreise mit R und r und nimmt den Brennstral $PB' = x$ als die Veränderliche, so ist (in Fig. 12) die zu einem Maximum zu machende Function:

$F(x) = MP + NP = \sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{(2a-x)^2 - R^2}$; dazu die Bedingungsgleichung:

$(x^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}x = \left[(2a-x)^2 - R^2\right]^{-\frac{1}{2}}(2a-x)$ liefert $x^2 + \frac{4ar^2}{R^2-r^2}x = \frac{4a^2r^2}{R^2-r^2}$,

daher $x = \frac{-2ar^2}{R^2-r^2} \pm \frac{2aRr}{R^2-r^2}$ wobei von dem doppelten Zeichen nur + zu gebrauchen ist, da ein negatives x keinen Sinn hätte, deshalb

$x = \frac{2ar(R-r)}{R^2-r^2} = \frac{2ar}{R+r}$ und max. $(F) = \sqrt{4a^2 - (R+r)^2}$.

II. Functionen zweier und mehrerer Variablen.

Einen jeden Ausdruck wie: $axy(b-x+y)$, dessen Wert von zwei von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x und y abhängig ist, nennt man eine Function dieser zwei Variablen und schreibt: $f(x,y)$; für welche Werte von x und y wird eine solche Function zu einem Maximum oder Minimum?

$f(x,y)$ ist dann ein Maximum oder Minimum, wenn für jedes andere $x \ldots\ldots (x+h)$, als auch für jedes andere $y \ldots\ldots (y+k)$ der Wert des betreffenden Ausdruckes kleiner, beziehungsweise grösser ausfällt; im Zeichen:

$f(x+h, y+k) - f(x,y)$ ist negativ im Falle $f(x,y)$ ein Maximum

$f(x+h, y+k) - f(x,y)$ ist positiv im Falle $f(x,y)$ ein Minimum ist.

Suchen wir den Ausdruck:

$f(x+h, y+k)$, wenn $f(x,y) = axy(b-x+y)$ angenommen wird.

$f(x+h, y+k) = a(x+h)(y+k)(b-x-h+y+k) = (ax+ah)(y+k)(b-x+y-h+k) = axy(b-x+y) + h[ay(b-x+y) - axy] + k[axy + ax(b-x+y)] + hk[ay - ax + a(b-x+y)] + h^2(-ay) + k^2.ax - ah^2.k + ah.k^2$, d. h.

die Differenz $f(x+h, y+k) - f(x,y)$ hat die Form

$$Ah + Bk + Chk + Dh^2 + E.k^2 + Fh^2k + Ghk^2.$$

Nun hängt das Zeichen dieser Differenz bei dem sehr kleinen Werthe von h und k blos von dem Zeichen derjenigen Grössen der Reihe ab, die bei der ersten Potenz von h und k — mögen letztere positiv oder negativ $(\pm h, \pm k)$ gewählt werden — als Coefficient stehen

d. i. blos von dem Vorzeichen der mit A und B bezeichneten Grössen; es müssen demnach die 4 Differenzen:

$+ Ah + Bk$
$+ Ah - Bk$ } gleichzeitig negativ sein, wenn $f(x, y)$ ein Max.
$- Ah + Bk$
$- Ah - Bk$ } od. gleichzeitig positiv sein, wenn $f(x, y)$ ein Min. ist.

Diese Forderung kann nur dadurch erfüllt werden, dass $A = 0$, und $B = 0$ ist, während die übrigen Glieder der Reihe:
$Chk + Dh^2 + Ek^2 + Fh^2k + Ghk^2$ nicht Null werden können.

Das Resultat der Untersuchung ist: die vorgelegte Function $f(x, y) = axy(b - x + y)$ ist für solche Werte von x und y ein Max. od. Min., die den Gleichungen: $A = ay(b - x + y) - axy = 0 \ldots$ } 3)
$B = ax(b - x + y) + axy = 0 \ldots$ } 4)
Genüge leisten.

Zu demselben Resultate gelangen wir auf viel kürzerem Wege durch folgendes Raisonnement: da die Veränderliche x von y nicht abhängt, so können wir einmal y als constant betrachten und nur denjenigen Wert von x suchen, der den Ausdruck: $axy(b - x + y)$ zum Maximum oder Minimum macht; die Bedingung dazu ist nach ..... (2):
$ay(b - x + y) - axy = 0 \ldots\ldots\ldots$ 3)

Betrachtet man ebenso x als constant und y allein als veränderlich, so erlangt der Ausdruck $f(x, y)$ seinen Maximal- oder Minimalwert für solchen Wert von y, der sich aus der Gleichung:
$ax(b - x + y) - axy = 0 \ldots\ldots\ldots$ 4) ergibt.

Diese 2 Gleichungen ... (3) und .... (4) bestimmen die erforderlichen Werte von x und y, welcher den gegebenen Ausdruck zum Max. od. Min. machen; welches von beiden eintritt, lässt sich wieder in den allermeisten Fällen schon aus der Natur des Gegenstandes entscheiden. Im Falle die gegebene Function drei oder mehrere von einander unabhängige Veränderliche hat, erhalten wir den Gleichungen, 3) und 4), entsprechend, 3 oder mehrere Gleichungen durch deren Verbindung sich die gesuchten Werte dieser Veränderlichen ergeben.

Die abgeleitete Regel soll nun bei einigen Beispielen zur Anwendung kommen.

1. Eine Zahl a in 3 Theile so zu theilen, dass das Product ihrer Quadrate ein Grösstes sei.

Die Theile von a sind: x, y, und $a - x - y$; die Function $f(x, y) = x^2y^2(a - x - y)^2$.

α) Wird dem y ein bestimmter Wert beigelegt, so hängt der Wert von f nur von x ab; und $f(x, y)$ wird ein Max. wenn:

$2xy^2(a-x-y)^2+x^2.y^2.2(a-x-y)(-1)=0$ d. i.
$a-2x-y=0$ . . . . . m) wird.

β) Soll dagegen die gegebene Function durch Aenderung des y bei constantem x den grössten Wert haben, so muss:
$2x^2y(a-x-y)^2+2x^2y^2(a-x-y)(-1)=0$ . . . . n) od. $a-x-y=y$ erfüllt sein.

Durch Verbindung beider Gleichungen m) und n) erhält man $x=\frac{a}{3}, y=\frac{a}{3}$ d. h. die Theile müssen gleich sein, und $\max(f)=\frac{a^6}{729}$.

2. Ein Dreieck zu construiren, welches bei einem gegebenen Umfange die grösste Fläche einschliesst.

Es sei 2s der gegebene Umfang, x die eine, y die andere, mithin $2s-x-y$ die dritte Seite, und F die Fläche dieses Dreieckes, so ist bekanntlich: $F^2=s(s-x)(s-y)(x+y-s)$; max. (F) mithin auch max (F^2) erfordert, dass:
beim variablen x . . . . $-s(s-y)(x+y-s)+(s-x)(s-y).s=0$, od. $s-x=x+y-s$,
„ „ y . . . . $-s(s-x)(x+y-s)+(s-x)(s-y).s=0$, od. $s-y=x+y-s$
stattfindet.

Die Auflösung $x=y=\frac{2s}{3}$ dieser Gleichungen gibt an, dass das Dreieck gleichseitig sein muss, um bei gegebenem Umfang die grösste Fläche einzuschliessen.

3. Es soll in eine gegebene Kugelfläche ein gerader Kegel gezeichnet werden, von welchem a) das Volumen, b) die Mantelfläche ein Max. ist.

Es sei r der Halbmesser der gegebenen Kugelfläche, x der Halbmesser der Grundfläche des gesuchten Kegels, y die Höhe, s die Seitenlinie, so ist bei a) zum Maximum zu machen: $F=\pi.\frac{x^2y}{3}$ worin nur scheinbar 2 Veränderliche x und y vorkommen; denn wird die Höhe y verlängert (Fig. 13), bis sie die Kugelfläche in D trifft, so folgt aus dem rechtwinkligen $\triangle$ CAD:
$y(2r-y)=x^2$ demnach $F=\frac{\pi y^2}{3}(2r-y)$, welcher Ausdruck den Maximalwert: max. $F=\frac{32}{81}r^3\pi$, für $x=\frac{2r}{3}\sqrt{2}$ annimmt.

Soll b) die Mantelfläche den grösstmöglichen Wert annehmen, so ist: $F=\pi xs$, wobei wieder $x^2=y(2r-y)$ und $s=\sqrt{2ry}$ ist.
$F=\pi\sqrt{2ry-y^2}.\sqrt{2ry}=\pi y(4r^2-2ry)^{\frac{1}{2}}$ wird ein Max., wenn $y=\frac{4r}{3}$ d. i. $x=\frac{2r}{3}\sqrt{2}$ gesetzt wird; d. h. der Kegel, dessen Volumen am grössten ist, hat auch die grösste Mantelfläche.

III. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Die Werte von x, y, z ..., durch welche eine gegebene Function mehrerer Variablen zu einem Max. od. Min. werden soll, sind in den seltensten Fällen völlig unabhängig von einander; gewöhnlich sind sie an eine Bedingung (wie im letzten Beispiele) gebunden, welche wieder durch eine Gleichung ausgedrückt wird. Es kommt nun darauf an, die Werte von x, y, z ... zu finden, welche erstens der Bedingungsgleichung genügen, und zweitens die Function F zu einem Max. od. Min. machen.

Der Weg, welcher sich zur Auflösung dieser Probleme darbietet, soll zuerst an einem speciellen Beispiele gezeigt werden.

1. Man construire einen senkrechten Cylinder, der bei einem gegebenen Inhalt die kleinste Oberfläche besitzt, und zwar:

α) wenn nebst der Mantelfläche beide Kreisflächen,

β) wenn nur die eine Kreisfläche mit zur Oberfläche gerechnet wird.

Es sei der Halbmesser der Basis — der, sowie die Höhe veränderlich angenommen werden muss — = x, und die Höhe = z; so ist die verlangte Oberfläche: $F(x, z) = 2\pi xz + 2\pi x^2$, wo zwischen x und z die Bedingungsgleichung $\pi x^2 z = a^3$ besteht. Aus letzterer kann $z = \frac{a^3}{\pi x}$ bestimmt, und in F substituirt werden; dadurch erhält man $F = \frac{2\pi a^3}{x} + 2\pi x^2$, worin x allein unabhängig erscheint und F dann zum Min. macht, wenn $\frac{2a^3}{x^2} = 4\pi x$ oder $x = \frac{a}{\sqrt[3]{2\pi}} = \frac{a}{2\pi}\sqrt[3]{4\pi^2}$ gesetzt wird; für diesen Fall ist $z = \frac{a^3}{\pi x^2} = \frac{a}{\pi}\sqrt[3]{4\pi^2} = 2x$ und min. $(F) = 3a^2\sqrt[3]{2\pi}$.

Soll beispielsweise aus Blech ein hohler Cylinder sammt Boden und Deckel angefertigt werden, so wird man diesem die gleichseitige Form geben müssen, wenn man bei einem bestimmten Inhalt die grösste Ersparnis an Material erzwecken will.

β) Für den zweiten Fall ist $F(x, z) = 2\pi xz + \pi x^2$, und ausserdem die Bedingung: $\pi x^2 z = a^3$, daraus $z = \frac{a^3}{\pi x^2}$ in F substituirt gibt: $F = \frac{2a^3}{x} + \pi x^2$, welcher Ausdruck zum Min. wird, sobald $\frac{2a^3}{x^2} = 2\pi x$, also $x = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}}$, $z = \frac{a}{\sqrt[3]{\pi}} = x$ gesetzt wird. min. $(F) = 3a^2\sqrt[3]{\pi}$ d. h. soll der hohle Cylinder keinen Deckel erhalten und bei einem bestimmten Inhalt den geringsten Aufwand an Material erfordern, so muss die Höhe dem Halbmesser der Basis gleich genommen werden.

Aus der Auflösung dieser 2 Beispiele ergibt sich folgende Regel: Enthält die vorgelegte Function F zwei oder drei Veränderliche, die nicht von einander unabhängig, sondern durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, so kann man diese Bedingungsgleichung, wenn der Grad derselben es gestattet, benutzen, um eine Veränderliche durch die übrigen ausdrücken, und dann die Werte in die Function einsetzen. Diese wird dadurch eine Function einer oder zweier Veränderlichen, welche von einander unabhängig sind, und kann dann irh Max. oder Min. durch das bereits bekannte Verfahren gefunden werden.

Wie aber, wenn die Auflösung der einen Bedingungsgleichung unausführbar wäre oder grosser Rechnungen benötigen würde? In diesem Falle betrachte man die 2 oder 3 Veränderlichen als von einander unabhängig und bilde aus der vorgelegten Function F und der einen Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ den zusammengesetzten Ausdruck: $V = F + \lambda\varphi$ worin λ ein noch unbestimmt gelassener Coefficient ist, und untersuche, unter welchen Bedingungen V ein Maximum oder Minimum wird, man erhält 2 oder 3 Gleichungen (je nach der Anzahl der Veränderlichen) in denen der Coefficient λ vorkommt; wird dieser der in allen Gleichungen nur in der ersten Potenz vorkommen kann, aus denselben eliminirt, so reichen die erhaltenen Gleichungen in Verbindung mit der gegebenen Bedingungsgleichung hin, die Werte der Veränderlichen x, y, z zu finden, welche zum Max. od. Min. machen und gleichzeitig der Gleichung $\varphi = 0$ Genüge leisten.

Nach dieser Methode würde sich die Auflösung des letzten Beispieles folgendermassen gestalten: $F = 2\pi xz + 2\pi x^2$, die Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ lautet: $\varphi = \pi x^2 z - a^3$; mithin die zusammengesetzte Function: $V = 2\pi xz + 2\pi x^2 + \lambda(\pi x^2 z - a^3)$, worin x und z als unabhängige Variable zu betrachten sind.

Beim variablen x... muss $2\pi z + 4\pi x + \lambda . 2\pi xz = 0 \ldots m)$
„ „ z... „ $2\pi x + \lambda . \pi x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots n)$
} erfüllt sein;

daraus $-\lambda = \frac{z+2x}{xz}$, und auch: $-\lambda = \frac{2}{x}$, daher $\frac{z+2x}{xz} = \frac{2}{x}$ od. $2x = z$:

bei β) ist $F = 2\pi xz + \pi x^2$; $\varphi = \pi x^2 z - a^3$, $V = 2\pi xz + \pi x^2 + \lambda . (\pi x^2 z - a^3)$

so lange x als variabel gedacht wird, hat man $2\pi z + 2\pi x + \lambda . 2\pi xz = 0 \ldots . m)$
so lange z als variabel gedacht wird, hat man $2\pi x + \lambda . \pi x^2 = 0 \ldots\ldots\ldots n)$
} zu setzen.

Die Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen liefert: $-\lambda = \frac{z+x}{xz} = \frac{2}{x}$, oder $x = z$; in beiden Fällen dieselben Resultate, wie früher.

Anmerkung. Da die constanten Glieder der Bedingungsgleichung $\varphi = 0$ bei Bildung der Gleichungen m) und n) kein Glied liefern, so brauchen wir solche constante Glieder, wenn selbe additiv oder subtractiv gesetzt sind, in die zusammengesetzte Function V gar nicht aufzunehmen, und können unbeschadet der weiteren Rechnung im ersten Falle: $V = 2\pi xz + 2\pi x^2 + \lambda . \pi x^2 z$,
und im zweiten Falle: $V = 2\pi xz + \pi x^2 + \lambda . \pi x^2 z$ setzen.

Nach dieser äusserst einfachen Methode wollen wir noch andere Aufgaben ähnlicher Art auflösen.

2. In einen gegebenen Kreis das Rechteck zu zeichnen, von welchem *a*) der Umfang, *b*) der Inhalt ein Maximum ist.

Im ersten Falle ist $F = 2x + 2y$ (siehe Fig. 14), wenn x und y die Seiten des zu suchenden Rechteckes sind; diese Unbekannten sind aber an die Bedingung gebunden, dass jedesmal $x^2 + y^2 = 4r^2$, wo r den Radius des gegebenen Kreises bedeutet. Die Regel sagt: man bilde die zusammengesetzte Function $V = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2)$ (dabei wurde das constante Glied $4r^2$ weggelassen) und betrachte darin x von y unabhängig; soll V Maximum werden, muss $\left.\begin{matrix} 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \end{matrix}\right\}$ also

$-\lambda = \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, od. $x = y$ sein; wegen $2x^2 = 4r^2$, ist $x = r\sqrt{2}$, max. $(F) = 4r\sqrt{2}$

b) zur Bestimmung des Rechteckes vom grössten Inhalt dienen die Gleichungen: $F = xy$, und $x^2 + y^2 = 4r^2$; somit $V = xy + \lambda(x^2 + y^2)$
wegen $\left.\begin{matrix} y + \lambda . 2x = 0 \\ x + \lambda . 2y = 0 \end{matrix}\right\}$ ist $x = y = r\sqrt{2}$ wie früher, und max. $(F) = 2r^2$
von allen Rechtecken, welche einem Kreise eingeschrieben werden, hat das Quadrat den grössten Umfang, sowie auch den grössten Inhalt.

3. Es soll aus einem cylindrischen Baumstamme der Balken von rechteckigem Querschnitte geschlagen werden, dessen Tragfähigkeit am grössten ist.

Es sei r der Halbmesser des Querschnittes des gegebenen Baumes, x die Breite, y die Höhe des daraus zu hauenden viereckigen Balkens, so kann zufolge der Voraussetzung, dass die Tragfähigkeit der Breite und dem Quadrate der Höhe proportional ist, das Tragvermögen F ausgedrückt werden durch $F = k . xy^2$ wenn k die Festigkeit eines Stabes vom Querschnitte $= 1$ bezeichnet, wobei $x^2 + y^2 = 4r^2$ (Fig. 14).

Soll $V = kxy^2 + \lambda(x^2 + y^2)$ ein Max. werden, so müssen x und y aus den Gleichungen: $\left.\begin{matrix} ky^2 + \lambda . 2x = 0 \\ 2kxy + \lambda . 2y = 0 \end{matrix}\right\}$ bestimmt werden; dies geschieht

durch Elimination von $-\lambda = \frac{ky}{2x} = kx$; dh. $y^2 = 2x^2$;

nun ist $3x^2 = 4r^2$, also $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, sodann $y = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$, und max. $(F) = \frac{16r^3}{3\sqrt{3}} . k.$

Um den Querschnitt dieses stärksten Balkens zu construiren, theilt man den Durchmesser AB in 3 Theile, zieht von C und D die auf AB Senkrechten CE und DG, und zeichnet das Viereck AEBG; die grössere Seite gibt die Höhe, die kleinere die Breite des vierkantigen Balkens an.

4. Von allen Dreiecken, welche denselben Inhalt haben, dasjenige zu finden, welches den kleinsten Umfang hat.

Sind x, y, z, die Seiten des Dreieckes, so ist $F = x + y + z$, und $\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = b^2$ oder $s(s-x)(s-y)(s-z) = b^4$ die Nebenbedingung.

Die aus der zusammengesetzten Function:
$V = x + y + z + \lambda(s-x)(s-y)(s-z)s$ abgeleiteten Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\lambda . s(s-y)(s-z)(-1)=0 \\ 1+\lambda . s(s-x)(s-z)(-1)=0 \\ 1+\lambda . s(s-y)(s-x)(-1)=0 \end{array}\right\} \text{geben: } \lambda = \frac{1}{s(s-y)(s-z)} = \frac{1}{s(s-x)(s-z)} = \frac{1}{s(s-y)(s-x)}$$

oder $s . y = s - x$, und $s - z = s - x$ d. h. $x = y = z$ d. h. von allen Dreiecken, welche denselben Flächeninhalt haben, hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

5. Es sei unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden, deren Oberfläche a^2 ist, dasjenige zu bestimmen, welches den grössten Inhalt hat.

Wenn x, y, z die 3 Seiten des Parallelepipedes bezeichnen, so ist $F = xyz$, wobei xyz von einander abhängig sind, so dass $2(xz + xy + yz) = a^2$ Statt hat.

Soll $V = xyz + 2\lambda(xz + xy + yz)$ den grössten Wert erhalten, so müssen die Werte von x, y, z aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} yz + 2\lambda(z+y) = 0 \\ xz + 2\lambda(x+z) = 0 \\ xy + 2\lambda(x+y) = 0 \end{array}\right\} \text{ bestimmt werden.}$$

Die Elimination von $-2\lambda = \frac{yz}{z+y} = \frac{xz}{x+z} = \frac{xy}{x+y}$, gibt $x = y = z = \frac{a}{\sqrt{6}}$, d. h. das gesuchte Parallelepiped ist ein Würfel, und max. $(F) = \frac{a^3}{36}\sqrt{6}$.

6. Es soll der gerade Cylinder bestimmt werden, dessen Volumen Maximum ist, wenn *a*) die gesammte Oberfläche, *b*) die Mantelfläche nebst einer Grundfläche gegeben ist.

Wird mit x der Radius der Basis, mit y die Höhe des gesuchten Cylinders bezeichnet, so soll $F = \pi x^2 y$ ein Max. werden und gleichzeitig x und y die Nebenbedingung: $2\pi xy + 2\pi x^2 = b^2$ erfüllen.

$V=\pi x^2y+\lambda(2\pi xy+2\pi x^2)$ wird Max. für die Werte von x und y, welche aus den Gleichungen: $\left.\begin{array}{r}2\pi xy+\lambda(2\pi y+4\pi x)=0\\ \pi x^2+\lambda.2\pi x=0\end{array}\right\}$ durch Elimination von $-\lambda=\frac{xy}{y+2x}=\frac{x}{2}$ resultiren d. h.: $y=2x$, welche Gleichung mit Verbindung mit der gegebenen Bedingungsgleichung, die Werte: $y=b\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$, $x=\frac{b}{\sqrt{6\pi}}$ und max. $(F)=\frac{b^3}{6}\sqrt{\frac{2}{3\pi}}$ liefert.

Bei *b*) ist $F=\pi x^2y$, dagegen $V=\pi x^2y+\lambda(2\pi xy+\pi x^2)$; $x=y=\frac{b}{\sqrt{3\pi}}$ max. $(F)=\frac{b^3}{3\sqrt{3\pi}}$.

7. Aus einem gegebenen geraden Kegel den grössten Cylinder zu schneiden.

Bezeichnet man mit r den Radius der Basis, mit h die Höhe des Kegels; mit x den Radius der Basis, mit y die Höhe des Cylinders so ist: $F=\pi x^2y$, worin aber x und y nicht willkührlich, sondern an die Bedingung $r:h=x:h-y$ oder $hx-rh+ry=0$ gebunden sind

Die Regel sagt: man bilde die zusammengesetzte Function $V=\pi x^2y+\lambda(hx+ry)$ betrachte einmal x, dann y allein veränderlich setze somit: $2\pi xy+\lambda.h=0$

als auch: $\pi x^2+\lambda.r=0$ und eliminire daraus $-\lambda=\frac{2\pi xy}{h}=\frac{\pi x}{r}$

d. i. $2yr=hx=rh-ry$ daraus $y=\frac{h}{3}$, also $x=\frac{2r}{3}$, und max. $(F)=\frac{4r^2h}{27}$

8. Wie verhalten sich Radius und Seitenhöhe eines geraden Kreiskegels vom gegebenen Volumen zu einander, wenn die Oberfläche möglichst klein ist.

Die in Hinsicht des Minimums zu untersuchende Function ist $F=\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}$ (wenn x den Radius der Basis, y die Höhe des Kegels bedeutet) und $\frac{\pi x^2y}{3}=a^3$ die Nebenbedingung. Das Min. des Ausdruckes $V=\pi x^2+\pi x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+\lambda.\frac{\pi x^2y}{3}$ tritt für solche Werte von x und y ein, die den Gleichungen

$2\pi x+\pi(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+\pi x.\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)+\lambda.\frac{2\pi x}{3}y=0$

$\pi x.\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2y+\lambda.\frac{\pi x^2}{3}=0$ Genüge leisten.

Wegen $-\lambda=\frac{3\left(2x+\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{2xy}$ und $-\lambda=\frac{3y}{x\sqrt{x^2+y^2}}$

ist $2x\sqrt{x^2+y^2}=y^2-2x^2$, oder wenn diese Gleich. quadrirt wird: $5x^2=y^2$; daher $s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9x^2}=3x$; mithin $x:s=1:3$; und min. $(F)=a^2\sqrt[3]{72\pi}$ für $x=a\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi\sqrt{2}}}$.

9. Den geraden Kegel zu bestimmen, dessen Volumen ein Max. ist, wenn *a*) die Gesammtoberfläche, *b*) die Mantelfläche gegeben ist:

Die in Hinsicht des Max. zu untersuchende Function ist:

$F=\frac{\pi x^2 y}{3}$, und $\pi x^2+\pi x\sqrt{x^2+y^2}=b^2$ die Nebenbedingung.

Aus $V=\frac{\pi x^2 y}{3}+\lambda[\pi x^2+\pi x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]$ bildet man:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\pi xy}{3}+\lambda[2\pi x+\pi(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+\pi x.\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.(2x)]=0\\&\frac{\pi x^2}{3}+\lambda.\pi x.\frac{1}{2}(x^2+y^2).^{-\frac{1}{2}}2y=0\end{aligned}\right\}\text{ und durch Gleichstellung}$$

der zwei Werte von $-\lambda=\frac{-2\pi xy}{3\left[2\pi x+\pi\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\pi x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]}$ und

$-\lambda=\frac{\pi x^2\sqrt{x^2+y^2}}{3\pi xy}$, die Gleichung:

$2xy^2=2x^2\sqrt{x^2+y^2}+x(x^2+y^2)+x^2$ oder $y^2-2x^2=2x\sqrt{x^2+y^2}$; durch Quadriren dieser Gleichung erhält man $y^4=8x^2y^2$, od. $y=2x\sqrt{2}$ und mit Benützung der Bedingungsgleichung,

$x=\frac{b}{2\sqrt{\pi}}$, $y=b\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ und max. $(F)=\frac{b^3}{12}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Bei *b*) ist $F=\frac{\pi x^2 y}{3}$, die Bedingungsgleichung: $\pi x\sqrt{x^2+y^2}=c^2$,

somit $V=\frac{\pi x^2 y}{3}+\lambda.\pi x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$; daraus die Gleichungen:

$\frac{2\pi xy}{3}+\lambda[\pi(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+\pi x.\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)]=0$, $\frac{\pi x^2}{3}+\lambda.\pi x.\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2y)=0$

mithin $-\lambda=\frac{2xy}{3\left[\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]}$ und auch $-\lambda=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{3y}$

folglich nach Gleichstellung dieser 2 Ausdrücke: $y^2=2x^2$; und mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung $x=\frac{c}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$

$y=c\sqrt[4]{\frac{4}{3\pi^2}}$, max. $(F)=\frac{c^3}{3}\sqrt[4]{\frac{4}{27\pi^2}}$.

10. Es soll das gerade dreiseitige Prisma bestimmt werden, dessen Volumen ein Maximum und dessen Grundflächen die Winkel α, β, γ enthalten, wenn a) die Gesammtoberfläche b) die Mantelfläche nebst einer Grundfläche eine gegebene Grösse hat.

Ist y die gesuchte Höhe des Prisma, und x der Radius des dem Dreiecke A B C mit den Winkeln α, β, γ und den denselben gegenüberliegenden Seiten a, b, c umschriebenen Kreises, so ist bekanntlich $x = \frac{abc}{4F}$, wo F die Fläche der Basis des Prisma bedeutet; daraus $F = \frac{abc}{4x} = \frac{a.a\frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha}.a\frac{\sin.\gamma}{\sin.\alpha}}{4x} = \frac{a^3 \sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma.}{4x\sin^3\alpha}$. Da nun (wie aus Fig. 15 zu ersehen) $a = 2x\sin\alpha$, mithin $a^3 = 8x^3\sin^3\alpha$, somit die Basis $F = 2x^2\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$, so ist der eines Maximums fähige Ausdruck $E = 2x^2y\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma = 2x^2y.\ p$, wo p statt: $\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$ steht.

Der Bedingung gemäss soll die Oberfläche einer gegebenen Grösse gleich sein, d. i.

$m^2 = 4px^2 + (a+b+c)y = 4px^2 + \frac{a}{\sin\alpha}(\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma)y =$
$= 4px^2 + 2xys$ wo s statt: $\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma$ gesetzt wurde.

Aus dem zusammengesetzten Ausdrucke

$V = 2x^2yp + \lambda.(4px^2 + 2sxy)$ erhält man:

für's variable x .... $4pxy + \lambda(8px + 2ys) = 0$
„ „ y .... $2px^2 + \lambda.2xs = 0$
} mithin $-\lambda = \frac{2pxy}{4px+ys} = \frac{px}{s}$

d. i. $x = \frac{sy}{4p}$, daher aus $\frac{3s^2y^2}{4p} = m^2$, $y = \frac{2m}{s}\sqrt{\frac{p}{3}}$, und $x = \frac{m}{2p}\sqrt{\frac{p}{3}}$

$\text{max.}(F) = \frac{m^3}{3s}\sqrt{\frac{p}{3}} = \frac{m^3}{3(\sin.\alpha+\sin.\beta+\sin.\gamma)}.\sqrt{\frac{\sin.\alpha.\sin\beta.\sin.\gamma}{3}} =$
$= \frac{m^3}{3}\sqrt{\frac{1}{6}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$.

β) $F = 2\pi x^2y$, dazu die Bedingung: $2px^2 + 2sxy = n^2$, also
$V = 2\pi x^2y + \lambda(2px^2 + 2sxy)$; woraus $4pxy + \lambda(4px + 2sy) = 0$
$2px^2 + \lambda.2sx = 0$
} abgeleitet

und $-\lambda = \frac{2pxy}{2px+sy} = \frac{px}{s}$ gefunden wird; daraus $x = \frac{ys}{2p}$ und mit Beziehung auf die Bedingungsgleichung: $y = \frac{n}{s}\sqrt{\frac{2p}{3}}$, $x = \frac{n}{2p}\sqrt{\frac{2p}{3}}$;

$\text{max.}(F) = \frac{n^3}{3s}\sqrt{\frac{2p}{3}} = \frac{n^3}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$.

11. Es soll die regelmässige Pyramide bestimmt werden, deren Grundfläche ein regelmässiges Sechseck und deren Volumen ein Max. ist, wenn a) die Gesammtoberfläche, b) die Mantelfläche eine gegebene Grösse hat.

Bezeichnet man mit x die Seite der Basis, mit y die Höhe der Pyramide, so ist das Volumen der Pyramide gegeben durch: $F = \frac{x^2y}{2}\sqrt{3}$, wobei x und y an die Abhängigkeit:

$\frac{3x^2}{2}\sqrt{3} + 3x\sqrt{y^2 + \frac{3x^2}{4}} = b^2$ gebunden sind.

$V = \frac{x^2y}{2}\sqrt{3} + \lambda\left(\frac{3x^2}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{x^2y^2 + \frac{3x^4}{2}}\right)$ liefert die 2 Gleichungen

$xy\sqrt{3} + \lambda\left[3x\sqrt{3} + 3.\frac{1}{2}\left(x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.(2xy^2 + 3x^3)\right] = 0$ und

$\frac{x^2}{2}\sqrt{3} + \lambda\left[3.\frac{1}{2}\left(x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.(2x^2y)\right] = 0$, aus diesen ergibt sich:

$$-\lambda = \frac{xy\sqrt{3}}{3x\sqrt{3} + \frac{6xy^2 + 9x^3}{2\sqrt{x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}}}}, \text{ und } -\lambda = \frac{x^2\sqrt{3}.\sqrt{x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}}}{2.3x^2y}$$

Durch Gleichstellung dieser 2 Ausdrücke erhält man:

$3y^2 - \frac{9}{2}x^2 = 3\sqrt{3}.\sqrt{x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}}$ und daraus durch Quadriren:

$9y^4 = 54x^2y^2$ d. i. $y^2 = 6x^2$.

In Folge dieser Relation lautet die Bedingungsgleichung:

$3x\sqrt{6x^2 + \frac{3x^2}{4}} = b^2 - \frac{3x^2}{2}\sqrt{3}$ welche beim Quadriren die Form:

$x^4 + \frac{3\sqrt{3}.b^2}{54}.x^2 = \frac{b^4}{54}$ annimmt; mithin $x^2 = \frac{b^2}{6\sqrt{3}}$, $y^2 = \frac{b^2}{\sqrt{3}}$ und

$\text{max. } (F) = \frac{b^3}{12\sqrt[4]{3}}$.

Bei β) ist $F = \frac{x^2y}{2}\sqrt{3}$ und Nebenbedingung: $m^2 = 3x\sqrt{y^2 + \frac{3x^2}{4}}$,

daher $V = \frac{x^2y}{2}\sqrt{3} + \lambda.3\sqrt{x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}}$ und die Gleichungen aus denen $-\lambda$ zu eliminiren ist:

$$\left.\begin{aligned} xy\sqrt{3} + \lambda.3.\tfrac{1}{2}\left(x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}(2xy^2 + 3x^3) = 0 \\ \frac{x^2}{2}\sqrt{3} + \lambda.3.\tfrac{1}{2}\left(x^2y^2 + \frac{3x^4}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}.(2yx^2) = 0 \end{aligned}\right\} \text{d. i. } 4x^2y^2 = 2xy^2 + 3x^3$$

und $y^2 = \frac{3x^2}{2}$; somit wegen $m^2 = \frac{9}{2}x^2$, $x = \frac{m}{3}\sqrt{2}$, $y = \frac{m}{\sqrt{3}}$, $\text{max.}(F) = \frac{m^3}{9}$.

12. Es soll innerhalb eines gegebenen Dreieckes ein Punkt 0 gefunden werden, so dass aus den 3 Perpendikeln auf die Seiten ein Parallelepiped construirt werden kann, welches a) die kleinste Diagonale, b) die grösste Oberfläche, c) den grössten Inhalt haben soll.

Sind xyz die Senkrechten auf die Seiten a, b, c, so soll bei

a) $F = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ein Max. und ausserdem $\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}=q^2$ (Fläche des Dreieckes) erfüllt werden.

Dies wird dadurch erreicht, dass man untersucht, unter welchen Bedingungen: $V=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}+\lambda(ax+by+cz)$ ein Max. wird; dazu ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x+\lambda.\,a=0 \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,2y+\lambda.\,b=0 \\ \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,2z+\lambda.\,c=0 \end{array}\right\} \text{ also}$$

$$-\lambda=\frac{x}{a\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{b\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{c\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

d. i. $\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}$ zu setzen, und daraus x, y, z zu bestimmen.

Sind aber mehrere Verhältnisse gleichartiger oder unbenannter Zahlen einander gleich, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder, zur Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede; (wird in der Folge von dieser Regel Gebrauch gemacht, wird dies durch ein $\times$ angedeutet). Darnach

$$\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2q^2}{a^2+b^2+c^2},$$

mithin: $x=\frac{2aq^2}{a^2+b^2+c^2}$, $y=\frac{2bq^2}{a^2+b^2+c^2}$, $z=\frac{2cq^2}{a^2+b^2+c^2}$ und

$$\text{max. } (F)=\frac{2q^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

b) die zweite Aufgabe verlangt, dass $F=2(xy+xz+yz)$ gesetzt und die Bedingungsgleichung $ax+by+cz=2q^2$ erfüllt werde.

Wir haben: $V=2(xy+xz+yz)+\lambda(ax+by+cz)$ und daraus:

$$\left.\begin{array}{l} 2(y+z)+\lambda.\,a=0 \\ 2(x+z)+\lambda.\,b=0 \\ 2(x+y)+\lambda.\,c=0 \end{array}\right\} \text{ d. h. } -\frac{\lambda}{2}=\frac{y+z}{a}=\frac{x+z}{b}=\frac{x+y}{c} \text{ oder}$$

$$-\frac{\lambda}{2}=\frac{x(y+z)}{ax}=\frac{y(x+z)}{by}=\frac{z(x+y)}{cz}=\frac{2(xy+xz+yz)}{ax+by+cz}.$$

Werden die 3 sich daraus ergebenden Gleichungen: $y+z=\frac{aF}{2q^2}$, $x+z=\frac{bF}{2q^2}$, $x+y=\frac{cF}{2q^2}$ in der Weise combinirt, dass man je 2 addirt

und davon die dritte subtrahirt, so erhält man für $x = \frac{(b+c-a)}{4q^2} F$, $y = \frac{(a+c-b)}{4q^2} F$, $z = \frac{(a+b-c)}{4q^2} F$; um schliesslich daraus die Grösse F zu eliminiren, multiplicirt man je 2 dieser Gleichungen mit einander $xy = \frac{(b+c-a)(a+c-b)}{16q^4} F^2$; $xz = \frac{(b+c-a)(a+b-c)}{16q^4} F^2$, $yz = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{16q^4} F^2$, und verbindet diese Gleichungen durch die Addition: so dass $\frac{F}{2} = \frac{F^2}{16q^4}(2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2)$, also $F = \frac{8q^4}{2(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)}$ und nach Substitution dieses Wertes in die Ausdrücke für x, y, z, $x = \frac{2(b+c-a)q^2}{2(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)}$, $y = \frac{2(a+c-b)q^2}{2(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)}$, $z = \frac{2(a+b-c)q^2}{2(ab+ac+bc)-(a^2+b^2+c^2)}$ und $\max.(F) = \frac{8q^4}{2(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)}$ wird.

c) Bei der 3. Frage ist $F = xyz$ und $V = xyz + \lambda(ax+by+cz$ wird x allein variabel gedacht, muss . . . $yz + \lambda.a = 0$
„ y „ „ „ „ $xz + \lambda.b = 0$ } stattfinden)
„ z „ „ „ „ $xy + \lambda.c = 0$

daraus

$$-\lambda = \frac{yz}{a} = \frac{xz}{b} = \frac{xy}{c} \text{ od. } \frac{xyz}{ax} = \frac{xyz}{by} = \frac{xyz}{cz} = \frac{3xyz}{ax+by+cz} = \frac{3xyz}{2q^2}$$

wegen $\frac{yz}{a} = \frac{3xyz}{2q^2}$ ist $x = \frac{2q^2}{3a}$
„ $\frac{xz}{b} = \frac{3xyz}{2q^2}$ „ $y = \frac{2q^2}{3b}$ } mithin $\max.(F) = \frac{8q^6}{27abc}$.
„ $\frac{xy}{c} = \frac{3xyz}{2q^2}$ „ $z = \frac{2q^2}{3c}$

13. Es soll in eine gegebene Kugelfläche (vom Radius r) ein gerades dreiseitiges Prisma gezeichnet werden, von welchem die Grundflächen die Winkel α, β, γ enthalten und a) das Volumen, b) die Gesammtoberfläche, c) die Mantelfläche nebst einer Grundfläche, d) die Mantelfläche ein Maximum ist.

Unter Beibehaltung der im Beispiele 10 vorkommenden Grössen, ist für das Volumen des Prisma: $F = 2x^2y \sin.\alpha. \sin.\beta. \sin.\gamma$, die Nebenbedingung aber: $y^2 + 4x^2 = 4r^2$ deshalb $V = 2y^2yp + \lambda(y^2+4x^2)$, worin p statt $\sin.\alpha. \sin.\beta. \sin.\gamma$ steht.

Aus dieser zusammengesetzten Function entspringen die Gleichungen:

$4xyp + \lambda . 8x = 0$
$2x^2p + \lambda . 2y = 0$ } woraus durch Elimination von $-\lambda : y^2 = 2x^2$ folgt.

Wird diese Relation bei der Bedingungsgleichung berücksichtigt, so erhält man $x = \frac{2r}{\sqrt{6}}$, $y = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ und max. $(F) = \frac{8r^3}{3\sqrt{3}}$ sin. α. sin. β. sin. γ.

Bei b) ist $F = 4x^2$ sin. α. sin. β. sin. $\gamma + (a + b + c)\, y =$

$= 4x^2p + \frac{a}{\sin.\alpha}(\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma)\, y = 4px^2 + 2xy\,(\sin.\alpha + \sin.\beta + \sin.\gamma) =$

$= 4px^2 + 2xys$, wo s statt sin. α + sin. β + sin. γ gesetzt wurde.

Der aus der gegebenen Function und der gegebenen Bedingungsgleichung zusammengesetzte Ausdruck: $V = 4px^2 + 2s.\, xy + \lambda\,(y^2 + 4x^2)$ gibt

beim variablen x ... $8px + 2y.\, s + 8x.\, \lambda = 0$
„ „ y ... $2xs + 2y.\, \lambda = 0$ } $-\lambda = \frac{4px + ys}{4x} = \frac{xs}{y}$

$\frac{4px^2 + xys}{4x^2} = \frac{xys}{y^2} \times \frac{4px^2 + 2xys}{4r^2} = \frac{2px^2 + xys}{2r^2}$.

Die Verbindung von $\frac{xs}{y} = \frac{2px^2 + xys}{2r^2}$ gibt: $2x = \frac{2r^2s + y^2s}{py}$

mithin $4x^2 = \frac{4r^4s^2 - 4r^2s^2y^2 + y^4s^2}{p^2y^2}$: für diesen Wert geht die Bedingungsgleichung über in: $y^4 - 4r^2y^2 + \frac{4r^4s^2}{s^2 + p^2} = 0$, woraus sich für $y^2 = 2r^2\left\{1 \mp \frac{p}{\sqrt{p^2 + s^2}}\right\}$, demzufolge für $x^2 = \frac{r^2}{2}\left\{1 \mp \frac{p}{\sqrt{p^2 + s^2}}\right\}$, ergibt.

Zur Entscheidung, welches Zeichen beizubehalten ist, um das Max. der Oberfläche zu erhalten, setzen wir die Worte für x^2 und y^2 in F ein, so wird aus

$F = 4p\,\frac{r^2}{2}\left\{1 \mp \frac{p}{\sqrt{p^2+s^2}}\right\} + 2s\,\sqrt{r^4\left\{1 \mp \frac{p}{\sqrt{p^2+s^2}}\right\}\left\{1 + \frac{p}{\sqrt{p^2+s^2}}\right\}} =$

$= 2pr^2\left\{1 \mp \frac{p}{\sqrt{p^2 + s^2}}\right\} + \frac{2r^2s^2}{\sqrt{p^2 + s^2}}$ klar, dass nur das untere Zeichen F zu einem Max. macht; u. z. max. $(F) = 2r^2\,(p + \sqrt{p^2 + s^2})$, für $y^2 =$

$= 2r\left\{1 - \frac{p}{\sqrt{p^2 + s^2}}\right\}$, und $x^2 = \frac{r^2}{2}\left\{1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 + s^2}}\right\}$.

c) $F = 2px^2 + 2s.\, xy$, und $V = 2px^2 + 2s.\, xy + \lambda\,(y^2 + 4x^2)$; daraus

$4px + 2s.\, y + \lambda . 8x = 0$
$2s.\, x + \lambda . 2y = 0$ } $-\lambda = \frac{2px + ys}{4x} = \frac{xs}{y}$ oder

$$\frac{2px^2 + sxy}{4x^2} = \frac{s.xy}{y^2} \times \frac{px^2 + s.xy}{2r^2}.$$

Wird der aus der Gleichung $\frac{xs}{y} = \frac{px^2 + xys}{2r^2}$ sich ergebende Wert von $x = \frac{2sr^2 - y^2 s}{p.y}$; zunächst quadrirt und in die Bedingungsgleichung $4x^2 + y^2 = 4r^2$ eingesetzt, die hieraus resultirende Gleichung $y^4 - 4r^2y^2 + \frac{16r^4s^2}{4s^2 + p^2} = 0$ aufgelöst, so findet man für $y^2 = 2r^2 \left\{1 \pm \frac{p}{\sqrt{4s^2 + p^2}}\right\}$ und sodann für $x^2 = \frac{r^2}{2}\left\{1 \mp \frac{p}{\sqrt{4s^2 + p^2}}\right\}$, worin jedoch — wie die Untersuchung zeigt — nur das untere Zeichen beizubehalten ist, so dass $y^2 = 2r^2\left\{1 - \frac{p}{\sqrt{4s^2 + p^2}}\right\}$, $x^2 = \frac{r^2}{2}\left\{1 + \frac{p}{\sqrt{4s^2 + p^2}}\right\}$ und max. $(F) = r^2(p + \sqrt{p^2 + 4s^2})$;

Bei d) ist $F = 2xys$, $V = 2xys + \lambda(4x^2 + y^2)$; und max. $(F) = 2r^2s = 2r^2$ (sin. α sin. β sin. γ), für $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $y = r\sqrt{2}$.

14. Es soll in eine gegebene Kugelfläche ein Cylinder gezeichnet werden, von welchem a) das Volumen, b) die Gesammtoberfläche, c) die Mantelfläche nebst einer Grundfläche, d) die Mantelfläche ein Max. ist.

Wenn r den Halbmesser der gegebenen Kugelfläche, x den Halbmesser der Basis des gesuchten Cylinders, y die Höhe bedeutet, so ist bei a) $F = \pi x^2 . y$, wo zwischen x und y die Beziehung stattfindet $4x^2 + y^2 = 4r^2$. Aus der zusammengesetzten Function: $V = \pi x^2 . y + \lambda(4x^2 + y^2)$ haben wir so viele Gleichungen zu bilden, als Unbekannte sind:

also $\left.\begin{matrix} 2\pi xy + \lambda . 8x = 0 \\ \pi x^2 + \lambda . 2y = 0 \end{matrix}\right\} - \lambda = \frac{\pi y}{4} = \frac{\pi x^2}{2y}$, d. i. $\frac{y}{2} = \frac{x^2}{y}$ oder

$\frac{y^2}{2y} = \frac{4x^2}{4x} \times \frac{y^2 + 4x^2}{6y} = \frac{2r^2}{3y}$ aus $\frac{y}{2} = \frac{2r^2}{3y}$ folgt $3y^2 = 4r^2$, $y = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ und $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$, max. $(F) = \frac{4r^3\pi}{3\sqrt{3}}$.

b) Bei der zweiten Frage ist $F = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, somit $V = 2\pi x^2 + 2\pi xy + \lambda(4x^2 + y^2)$;

die daraus entspringenden Gleichungen: $\left.\begin{matrix} 4\pi x + 2\pi y + \lambda . 8x = 0 \\ 2\pi x + \lambda . 2y = 0 \end{matrix}\right\}$ geben

durch Elimination von $-\lambda$: $\frac{2x + y}{4x} = \frac{x}{y}$ oder

$$\frac{2x^2 + xy}{4x^2} = \frac{xy}{y^2} \times \frac{2x^2 + 2xy}{4x^2 + y^2} = \frac{x^2 + xy}{2r^2}.$$

aus $\frac{x}{y} = \frac{x^2 + xy}{2r^2}$ ist $x = \frac{2r^2 - y^2}{y}$; setzen wir diesen Wert von x in: $\frac{x}{y} = \frac{2x^2 + xy}{4x^2}$ so erhalten wir die biquadratische Gleichung:

$y^4 - 4r^2y^2 + \frac{16}{5} r^4 = 0$, woraus sich für y^2 zwei Werte ergeben, nämlich $y^2 = 2r^2 \pm \sqrt{\frac{4r^4}{5}} = \frac{r^2}{5}(10 \pm 2\sqrt{5})$, mithin auch für $x^2 = \frac{4r^4 - 4r^2y^2 + y^4}{y^2} = \frac{r^2}{10}(5 \mp \sqrt{5})$ zwei Werte; welcher von ihnen F zum Max. macht, ersehen wir aus der Substitution dieser Werte in F; wir erhalten

$$F = 2\pi \cdot \frac{r^2}{10}(5 \mp \sqrt{5}) + 2\pi r^2 \sqrt{\frac{1}{10}(5 \mp \sqrt{5})\frac{1}{5}(10 \pm 2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{5}(5 \mp \sqrt{5}) + 2\pi r^2 \sqrt{\frac{4}{5}} = \pi r^2 \left\{1 \mp \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right\},$$ woraus ersichtlich, dass für den Fall des Max. das untere Zeichen beizubehalten, dass somit $x^2 = \frac{r^2}{5}(10 - 2\sqrt{5})$ und $y^2 = \frac{r^2}{10}(5 + \sqrt{5})$ zu setzen ist; und max. $(F) = \pi r^2 (1 + \sqrt{5})$.

Bei c) ist $F = 2\pi xy + \pi x^2$, $V = 2\pi xy + \pi x^2 + \lambda(y^2 + 4x^2)$, daraus die erforderlichen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 2py + 2\pi x + \lambda \cdot 8x = 0 \\ 2\pi x + \lambda \cdot 2y = 0 \end{array}\right\} \quad -\lambda = \frac{\pi(x+y)}{4x} = \frac{\pi x}{y}$$

daher $\frac{x+y}{4x} = \frac{x}{y} = \frac{xy + x^2}{4x^2} = \frac{xy}{y^2} \times \frac{2xy + x^2}{4r^2}$, aus $\frac{x}{y} = \frac{2xy + x^2}{4r^2}$ ist $x = \frac{4r^2 - 2y^2}{y}$; wird dieser Wert in die Gleichung $\frac{x+y}{4x} = \frac{x}{y}$ oder $y^2 + xy = 4x^2$ gesetzt, so erhält man die biquadratische Gleichung: $17y^4 - 68r^2y^2 + 64r^4 = 0$, und aus $y^4 - \frac{68}{17} r^2 \cdot y^2 + \frac{64}{17} r^4 0 =$ die Wurzeln: $y^2 = 2r^2 \left\{1 \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\right\}$, welche in $x^2 = \frac{16r^4 - 16r^2y^2 + 4y^4}{y^2}$ zu substituiren sind; dadurch wird $x^2 = \frac{r^2}{34}(17 \mp \sqrt{17})$. Welcher dieser zwei Werte F zu Max. macht, ersieht man wieder aus der Einsetzung dieses gefundenen Resultates in F;

$$F = 2\pi \sqrt{\frac{r^2}{34}(17 \mp \sqrt{17}) 2r^2 \left\{1 \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\right\}} + \pi \cdot \frac{r^2}{34}(17 \mp \sqrt{17}) =$$

$$= 2\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{1}{17}} + \frac{\pi r^2}{2}\left\{1 - \frac{1}{\pm\sqrt{17}}\right\} = \frac{16\pi r^2}{2\sqrt{17}} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2\sqrt{17}},$$

$$\max.(F) = \frac{\pi r^2}{2}(1+\sqrt{17}) \text{ für } x^2 = \frac{r^2}{34}(17+\sqrt{17}) \text{ und}$$

$$y^2 = 2r^2\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{17}}\right\}.$$

IV. Trigonometrische Functionen.

Die trigonometrischen Functionen sin. x, cos. x, haben $+1$ als grössten, -1 als kleinsten Wert, und sind deshalb vorzugsweise geeignet das Vorkommen solcher Maxima od. Min. anzuzeigen; z. B.

1. Ein Dreieck, von welchem 2 Seiten gegeben sind, so zu zeichnen, dass der Inhalt am grössten wird. Sind a und b die Seiten, γ der unbekannte von a und b eingeschlossene Winkel, so ist bekanntlich $F = \frac{ab}{2}$ sin. γ, welcher Ausdruck dann ein Max. wird, wenn der veränderliche Factor sin. γ den grössten Wert $+1$ annimmt, was bei $\gamma = 90^0$ eintritt.

2. Ein Dach von gegebener Breite soll eine solche Höhe erhalten, dass auf demselben ein Körper in der kürzesten Zeit herabgleitet. (Vorausgesetzt, dass auf die Reibung keine Rücksicht genommen wird.)

Ist a (Fig. 16) die gegebene Breite des Daches, y die gesuchte Höhe, γ der Neigungswinkel, t die Zeit des Herabgleitens, so ist nach der Formel für den Fall auf der schiefen Ebene $(s = \frac{gt^2}{2}$ sin. $\alpha)$ $AC = \frac{gt^2}{2}$ sin. γ d. i. $\frac{a}{\cos.\gamma} = \frac{g}{2}t^2 . \sin.\gamma$, somit $t^2 = \frac{2a}{g \sin.\gamma . \cos.\gamma} = \frac{4a}{g \sin.2\gamma}$, und $t = 2\sqrt{\frac{a}{g . \sin.2\gamma}}$ wird ein Min. werden, wenn der Nenner $g \sin.2\gamma$ den grössten Wert annimmt, was für sin $2\gamma = 1$ d. i. $2\gamma = 90^0, \gamma = 45^0$ eintritt; für diesen Wert ist: min. $(t) = 2\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Etwas schwieriger scheint die Untersuchung in dem Falle zu sein, wenn der eines Max. oder Min. fähige Ausdruck nicht blos die einzelnen Factoren sin. x, sin. (ax), sin. $(c \pm dx)$ oder cos. x, cos. (ax), cos. $(c \pm dx)$, sondern auch Producte oder Quotienten derselben enthält; z. B. wann wird sin. x . sin. $(a + x)$ oder sin. x . cos. $(a + x)$ ein Maximum oder Minimum?

In einem solchen Falle müssen wir den Wert für x, welcher den gegebenen Ausdruck zum Max. od. Min. macht, aus derjenigen Gleichung bestimmen, die wir erhalten, wenn wir in der vorgelegten Function f (x) das x ... durch $x + h$ ersetzen, f $(x + h)$ entwickeln und nach Potenzen von h ordnen, und jenes Glied gleich Null setzen, welches

als Coefficient bei h in der ersten Potenz steht. Wir erhielten im Allgemeinen: $f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$, wo A, B, C..... von h unabhängig sind. Anstatt einfach $A = 0$ zu setzen, können wir zuerst die Differenz: $f(x+h) - f(x) = Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$ beiderseits durch die unendlich kleine Grösse h dividiren, und nach vollendeter Division:

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A + Bh + Ch^2 + \ldots \ldots h = 0$ setzen.

Dadurch erhalten wir $\left.\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|_{h=0} = A$; wo der Regel gemäss $A = 0$, also $\left.\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|_{h=0} = 0 \ldots (4)$ zu setzen und diese Gleichung nach x aufzulösen ist.

Was wird also aus $\left.\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right|_{h=0}$, wenn

α) $f(x) = \sin. x$.

$$\frac{\sin.(x+h) - \sin. x}{h} = \frac{2 \sin. \frac{h}{2} \cos.\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin. \frac{h}{2} . \cos.\left(x + \frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}$$

je mehr sich h der Null nähert, desto mehr nähert sich $\frac{\sin. \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ der Einheit; denn dividiren wir in die Gleichheit: $\sin. \alpha = \sin. \alpha = \sin. \alpha$

die Ungleichheit: $\sin. \alpha < \alpha < \text{tg}. \alpha$,

so folgt: $1 > \frac{\sin. \alpha}{\alpha} > \cos \alpha$, je näher α der Null kommt, desto mehr geht von den Grenzen 1 und $\cos \alpha$ die letztere in 1 über; da der Quotient $\frac{\sin. \alpha}{\alpha}$ zwischen diesen Grenzen 1 und 1 liegt, so ist auch $\left.\frac{\sin. \alpha}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = 1$, wenn α unendlich klein ist, was durch das sogenannte „Substitutionszeichen“ $|_{\alpha=0}$ angedeutet ist. Wird demnach bei der vorgelegten Function die Aenderung h der Null gleichgesetzt, so ist

$\left.\frac{\sin.(x+h) - \sin. x}{h}\right|_{h=0} = \cos. x$. d. h. bei $f(x) = \sin. x$ ist $f'(x) = \cos. x$

β) $f(x) = \sin. (ax)$

$$\frac{\sin.(ax+ah)-\sin.(ax)}{h}=\frac{2\sin.\frac{ah}{2}\cos.\left(ax+\frac{ah}{2}\right)}{h}=\frac{\sin.\frac{ah}{2}}{\frac{h}{2}}\cos.\left(ax+\frac{ah}{2}\right)$$

ist nun h sehr klein, so lässt sich statt des $\sin.\frac{ah}{2}$ einfach der Bogen $\frac{ah}{2}$ setzen, daher $\sin.\frac{(ax+ah)-\sin.(ax)}{h}\Big|_{h=0}=\frac{\frac{ah}{2}}{\frac{h}{2}}\cos.\left(ax+\frac{ah}{2}\right)=a.\cos.(ax)$.

d. h. ist $f(x)=\sin.(ax)$, dann $f'(x)=a.\cos.(ax)$ . . . . . m)

γ) $f(x)=\cos.x$; $\frac{\cos.(x+h)-\cos.x}{h}=\frac{-2\sin.\frac{h}{2}.\sin.\left\{x+\frac{h}{2}\right\}}{h}=-\frac{\sin.\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin.\left\{x+\frac{h}{2}\right\}$

und $\frac{\cos.(x+h)-\cos.x}{h}\Big|_{h=0}=-\sin.x$

δ) $f(x)=\cos.(ax)$; $\frac{\cos.(ax+ah)-\cos.(ax)}{h}=\frac{-\sin.\frac{ah}{2}}{\frac{h}{2}}\sin.\left\{ax+\frac{ah}{2}\right\}$; und

$\frac{\cos.(ax+ah)-\cos.(ax)}{h}\Big|_{h=0}=\frac{-\frac{ah}{2}}{\frac{h}{2}}\sin.\left\{ax+\frac{ah}{2}\right\}=-a\sin.(ax)$.

d. h. ist $f(x)=\cos.(ax)$, dann $f'(x)=-a\sin.(ax)$ . . . . n)

Aus m) ergibt sich die Regel: die erste Ableitung des Sinus eines Bogens ist gleich dem Cosinus desselben Bogens multiplicirt mit der ersten Ableitung des Bogens selbst.

Aus n): die erste Ableitung des Cosinus eines Bogens ist gleich dem negativen Sinus desselben Bogens multiplicirt mit der ersten Ableitung des Bogens selbst. — Im Uebrigen bleiben die Regeln dieselben, wie bei den früheren Functionen; deshalb ist, wenn $f(x)=\sin^2 x$, $f'(x)=2\sin.x.\cos.x$; denn:

$$\frac{\sin.(x+h)-\sin.x}{h}=\frac{[\sin.(x+h)+\sin.x].[\sin.(x+h)-\sin.x]}{h}=$$

$$=\frac{2\sin.\left\{x+\frac{h}{2}\right\}\cos.\frac{h}{2}.2\sin.\frac{h}{2}.\cos.\left\{x+\frac{h}{2}\right\}}{h}=2\cos.\frac{h}{2}\frac{\sin.\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin.\left\{x+\frac{h}{2}\right\}\cos.\left\{x+\frac{h}{2}\right\};$$

somit $\frac{\sin.^2(x+h)-\sin.^2x}{h}\Big|_{h=0}=2\sin.x.\cos.x$.

Nach diesen entwickelten Regeln lassen sich leicht folgende Aufgaben lösen:

3. Wann wird $F(x) = \sin. x. \sin. (a + x)$ ein Maximum oder Minimum?

Der gegebene Ausdruck (ein Product zweier veränderlicher Factoren) wird für solche Werte von x ein Maximum oder Minimum, welche aus der Gleichung $F' = 0$; d. i. aus

$\cos. x. \sin. (a + x) + \sin. x. \cos. (a + x) = 0$, oder $\sin. (a + 2x) = 0$ gewonnen werden; letztere Gleichung liefert $a + 2x = \pi, 2\pi, 3\pi \ldots\ldots n\pi$

deshalb $x = \frac{\pi - a}{2}, \frac{2\pi - a}{2}, \frac{3\pi - a}{2} \ldots\ldots \frac{n\pi - a}{2}$

für $x = \frac{\pi - a}{2}$ ist $F(x) = \sin. \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) \sin. \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos.^2 \frac{a}{2}$ ... ein Max.

für $x = \pi - \frac{a}{2}$, „ $F(x) = \sin. \left(\pi - \frac{a}{2}\right) \sin. \left(\frac{a}{2} + \pi\right) = -\sin.^2 \frac{a}{2}$ ... ein Min.

für $x = \frac{3\pi - a}{2}$ ist $F(x)$ abermals Max.

dagegen „ $x = 2\pi - \frac{a}{2}$ „ „ „ Min.

d. h. es wechseln Maxima und Minima mit einander ab.

4. Wann wird $F(x) = \sin. x. \cos. (a + x)$ ein Max. od. Min?

Für solche Werte von x, welche die erste Ableitung:

$\cos. x. \cos. (a + x) - \sin. x. \sin. (a + x)$ zu Null machen; aus

$\cos. x. \cos. (a + x) - \sin. x. \sin. (a + x) = 0$, od. $\cos. (a + 2x) = 0$ resultirt für

$a + 2x = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \ldots\ldots$ oder $x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}, \frac{3\pi}{4} - \frac{a}{2}, \frac{5\pi}{4} - \frac{a}{2} \ldots\ldots$

für $x = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}$ ist $F(x) = \sin. \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \cos. \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)\right] =$

$= \sin.^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$ ..... Maximum

für $x = \frac{3\pi}{4} - \frac{a}{2}$ ist $F(x) = \sin. \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \cos. \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) =$

$\sin. \left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] \cos. \left[\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)\right] = \sin.^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$. Min.

auch hier wechseln Maxima und Minima ab.

5. Einen gegebenen Winkel α in einen Kreis als Peripheriewinkel so einzutragen, dass die Summe der zwei Schenkeln, die gleichzeitig Sehnen des Kreises sind, ein Maximum ist.

So lange der Mittelpunkt des Kreises noch nicht zwischen den Schenkeln des Winkels liegt, wird die Summe der Sehnen durch weitere Drehung des Winkels gegen den Mittelpunkt durch Vergrösserung

beider zunehmen. Das Maximum $F = AB + AC$ .. Fig. 17 wird erst dann eintreten, wenn eine Sehne wieder kleiner wird, d. i. wenn sie über den Mittelpunkt hinweggegangen ist. Diesfalls ist:

$F = AB + AC = 2r \cos.x + 2r \cos.y$, wo $x + y = \alpha$; also $V =$
$2r[\cos.x + \cos.y] + \lambda.(x + y)$, und

daraus $\left.\begin{array}{l} -2r \sin.x + \lambda = 0 \\ -2r \sin.y + \lambda = 0 \end{array}\right\}$ somit $-\lambda = 2r \sin.x = 2r.\ \sin.y$
d.i. $\sin.x = \sin.y$, und da diese Winkel stets spitz sind: $x = y = \frac{\alpha}{2}$. $\max.(F) = 4r \cos \frac{\alpha}{2}$.

6. Ein Körper ist mit der Geschwindigkeit c unter dem Neigungswinkel α in die Höhe geworfen. Wie gross ist die Fläche, welche von diesem Bogen und der Horizontallinie begrenzt wird, und wann ist diese Fläche ein Maximum?

Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c in einer Richtung die mit dem Horizonte den Winkel α bildet, vom Punkte A aus in die Höhe geworfen, so gelangt er in t Sekunden nach einem Orte, welcher von A um den Horizontalabstand $x = ct.\ \cos.\alpha$, und um den Vertcalabstand $y = ct \sin.\alpha - \frac{gt^2}{2}$ entfernt ist. Da das Ziel mit dem Anfangspunkte der Bewegung in derselben Horizontalebene liegt, so ist der Verticalabstand bei dem Punkte $= 0$, also $ct \sin.\alpha = \frac{gt^2}{2}$, oder $t = \frac{2c \sin.\alpha}{g}$, daher die sogenannte Wurfweite: $x = \frac{c^2}{g} \sin.(2\alpha)$

Die Zeit, in welcher der geworfene Körper den grössten Verticalabstand, d. i. die grösste Wurfhöhe hat, ist $t = \frac{c}{g} \sin.\alpha$ die Wurfhöhe selbst: $y = \frac{c^2}{2g} \sin^2\alpha$. Nun ist der Flächeninhalt des zwischen zwei zusammengehörigen Coordinaten (Wurfhöhe und halbe Wurfweite) eingeschlossenen Parabelstückes gleich $\frac{2}{3}$ des Productes aus diesen Coordinaten; daher die gesuchte Fläche zwischen dem Parabelbogen und der Horizontallinie: $F = \frac{c^4}{3g^2} \sin^2\alpha.\ \sin.(2\alpha)$.

F wird ein Maximum für solche Werte von α, die sich aus der Gleichung $2 \sin.\alpha \cos.\alpha \sin.2\alpha + 2 \sin.^2\alpha.\ \cos.(2\alpha) = 0$ d. i. aus

$\cos\alpha.\ \sin(2\alpha) + \sin.\alpha \cos.(2\alpha) = 0$ oder $tg.\ 2\alpha + tg\,\alpha = 0$ ergeben;

letztere Gleichung gibt aber: $\frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} + tg.\ \alpha = 0$, oder $tg^2\ \alpha = 3$, somit. $tg.\ \alpha = \sqrt{3}$ und $\alpha = 60^0$;

7. In einen gegebenen Kreis (mit Radius r) ist ein grösstes Dreieck einzuschreiben.

Ist 0 (Fig. 18) der Mittelpunkt des Kreises, ABC das gesuchte Dreieck, x und y die Winkel, welche die AO mit den Dreiecksseiten AC, AB bildet, so ist wegen des gleichschenklichen Dreieckes AOB . . $AB = 2r \cos. y$, ebenso $AC = 2r \cos. x$, die Höhe $BD = AB \sin.(x+y) = 2r \cos. y \sin.(x+y)$, mithin der Flächeninhalt des Dreieckes:

$$F = \frac{AC}{2} \; h = 2r^2 \cos. x. \cos. y. \sin.(x+y).$$

wird x variabel gedacht, dann muss:

$$-2r^2 \sin. x. \cos. y. \sin.(x+y) + 2r^2 \cos. x. \cos. y. \cos.(x+y) = 0$$

wird y variabel gedacht, dann muss:

$$-2r^2 \cos. x. \sin. y. \sin.(x+y) + 2r^2 \cos. x. \cos. y. \cos.(x+y) = 0$$

oder $\left.\begin{aligned} \cos. x \cos.(x+y) - \sin. x. \sin.(x+y) &= 0 \\ \cos. y \cos.(x+y) - \sin. y. \sin.(x+y) &= 0 \end{aligned}\right\}$ erfüllt sein.

d. i. $\left.\begin{aligned} \cos.(2x+y) &= 0 \\ \cos.(x+2y) &= 0 \end{aligned}\right\}$ daher: $\left.\begin{aligned} 2x+y &= 90^0 \\ x+2y &= 90^0 \end{aligned}\right\}$ woraus folgt $x = y = 30^0$

das gesuchte Dreieck ist das gleichseitige. $\max(F) = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$.

8. Um einen Kreis (mit Radius r) soll ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben werden, welches den kleinsten Flächeninhalt hat.

Wird der Winkel an der Spitze mit 2φ bezeichnet, so ist die Höhe des gesuchten Dreieckes: $h = DO + OC = r + \frac{r}{\sin.\varphi}$ (Fig. 19) und die halbe Basis: $\frac{AB}{2} = \left(r + \frac{r}{\sin.\varphi}\right) \text{tg.}\,\varphi$. mithin die Fläche

$$F = r^2 \left(1 + \frac{1}{\sin.\varphi}\right)^2 \text{tg.}\,\varphi = r^2 (1+\sin\varphi)^2 \sin.^{-1}\varphi. \cos.^{-1}\varphi. \text{ F wird Max.}$$

für solche Werte von φ, die sich aus der Gleichung: $2r^2(1+\sin.\varphi).\sin.^{-1}\varphi + r^2(1+\sin.\varphi)^2(-1)\sin.^{-2}\varphi + r^2(1+\sin.\varphi)^2 \sin.^{-1}\varphi \cos.^{-2}\varphi(-\sin.\varphi) = 0$

d. i. aus $\frac{2r^2(1+\sin.\varphi)}{\sin.\varphi} - \frac{r^2(1+\sin.\varphi)^2}{\sin.^2\varphi} + \frac{r^2(1+\sin.\varphi)}{\cos.^2\varphi} = 0$

oder $2\sin.\varphi(1-\sin.^2\varphi) + (1+\sin.\varphi)\sin.^2\varphi = (1+\sin.\varphi)\cos.^2\varphi$ ergeben. letztere Gleichung gibt aber $2\sin.\varphi = 1$, also $\sin.\varphi = \frac{1}{2}$, d. h. $\varphi = 30^0$ u. $2\varphi\,60^0$ Das gesuchte Dreieck ist das gleichseitige. $\min.(F) = 3\sqrt{3}\, r^2$!

9. Von allen Vierecken, die man aus gegebenen Seiten bilden kann, ist dasjenige am grössten, um welches sich ein Kreis beschreiben lässt. Sind a, b, c, d die gegebenen Seiten, x der von a und b, y der von c und d eingeschlossene Winkel, so soll die Fläche: $F = \frac{ab}{2} \sin. x + \frac{cd}{2} \sin. y$ ein Maximum sein, wenn zwischen x und y die Relation: $a^2 + b^2 - 2ab - \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cos. y$ oder $2cd \cos. y\, 2ab \cos. x = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$ besteht.

Der Regel gemäss bilde man die zusammengesetzte Function $v = \frac{ab}{2}\sin x + \frac{cd}{2}\sin y + \lambda(2cd\cos y - 2ab\cos x)$, betrachte darin x und y von einander unabhängig und bestimme ihre Werte aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{ab}{2}\cos.x - \lambda.2ab\sin.x = 0 &\quad \lambda = \frac{\text{cotg.}x}{4}\\ \frac{cd}{2}\cos.y - \lambda.2cd\sin.y = 0 &\quad \lambda = -\frac{\text{cotg.}y}{4},\end{aligned}\right\} \text{ d. i. } \text{cotg.}x + \text{cotg.}y = 0 \text{ oder}$$

$$\frac{\cos.x}{\sin.x} + \frac{\cos.y}{\sin.y} = \frac{\cos.x.\sin.y + \cos.y.\sin.x}{\sin.x.\sin.y} = \frac{\sin.(x+y)}{\sin.x\sin.y} = 0;\ \text{d. h.}$$

$\sin.(x+y) = 0$ also $x + y = 180^0$. Das gesuchte Viereck ist ein Sehnenviereck (Fig. 20).

10. In der Ebene des Dreieckes ABC (Fig. 21) soll der Punkt O so bestimmt werden, dass $\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2$ ein Minimum werde.

Bezeichnet man die Dreiecksseiten mit a, b, c die denselben gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ und setzt $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$, $\sphericalangle AOB = \varepsilon$ somit $\sphericalangle OAC = \alpha - \varepsilon$, so ist

$$\left.\begin{aligned}y^2 &= c^2 + x^2 - 2cx\ \cos.\varepsilon\\ z^2 &= c^2 + x^2 - 2bx\cos.(\alpha - \varepsilon)\end{aligned}\right\} \text{ also}$$

$F = x^2 + y^2 + z^2 = 3x^2 + b^2 + c^2 - 2cx\cos.\varepsilon - 2bx\cos.(\alpha - \varepsilon)$

worin sowohl x, als auch $\sphericalangle\varepsilon$ variabel ist.

wird x variabel gedacht, muss: $bx - 2c\cos.\varepsilon - 2b\cos.(\alpha - \varepsilon) = 0$
„ x „ „ „ $2cx\sin.\varepsilon - 2bx\sin.(\alpha - \varepsilon) = 0$ } erfüllt sein.

Werden diese Gleichungen in der Form: $3x = c\cos.\varepsilon + b\cos.(\alpha - \varepsilon)$
$0 = c\sin.\varepsilon - b.\sin.(\alpha - \varepsilon)$ }

quadrirt und addirt, so erhält man für:

$$9x^2 = b^2 + c^2 + 2bc\,[\cos.\varepsilon\cos.(\alpha - \varepsilon) - \sin.\varepsilon.\sin.(\alpha - \varepsilon)] =$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc\cos.\alpha, \text{ somit für } x = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos.a.}$$

Auf gleiche Weise findet man für $y = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos.\beta}$

$z = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos.\gamma}$.

β) Wo muss der Punkt O liegen, damit die Summe seiner Entfernungen von den Ecken ein Minimum ist?

Für diesen Fall ist, unter Beibehaltung obiger Bezeichnungen,

$F = x + y + z = x + (x^2 + c^2 - 2cx\cos.\varepsilon)^{\frac{1}{2}} + [b^2 + x^2 - 2bx\cos.(\alpha - \varepsilon)]^{\frac{1}{2}}$.

Die Gleichungen, denen Genüge geleistet werden muss:

$$1 + \frac{1}{2}\left(c^2 + x^2 - 2cx\cos.\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x - 2c\cos\varepsilon\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[b^2+x^2-2bx\cos.(\alpha-\varepsilon)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2x-2b\cos.(\alpha-\varepsilon)\right]=0$$

$$\text{und}\frac{1}{2}\left(c^2+x^2-2cx\cos.\varepsilon\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2cx\sin.\varepsilon\right)+$$

$$+\left[b^2x^2-2bx\cos.(\alpha-\varepsilon)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[-2bx\sin.(\alpha-\varepsilon)\right]=0$$

d. i. $1+\frac{x-c\cos.\varepsilon}{y}+\frac{x-b\cos(\alpha-\varepsilon)}{z}=0;\ \frac{c\sin.\varepsilon}{y}+\frac{b\sin.(\alpha-\varepsilon)}{z}=0$

aber $c\sin.\varepsilon = BD$, und $b\sin.(\alpha-\varepsilon) = CE$, wenn BD und CE senkrecht auf die verlängerte AO gezogen wird, daher

$\frac{BD}{y}=\frac{CE}{z}$ Diese Quotienten sind aber die Sinus der spitzigen Winkel $\measuredangle$ BOD und COE, und da ihre Sinus gleich sind, so sind auch diese beiden Winkel, folglich auch ihre Nebenwinkel $\measuredangle$ BOA = AOC gleich: $\measuredangle$ BOD = COE;

Die erste Gleichung gibt: $\frac{c\cos.\varepsilon-x}{y}+\frac{b\cos.(\alpha-\varepsilon)}{z}=1$ oder (auf die Figur bezogen): $\frac{OD}{y}+\frac{AE}{z}=1$; die Quotienten $\frac{OD}{y}$ und $\frac{AE}{z}$ sind wieder die Cosinus der beiden gleichen Winkel BOD und COE; da ihre Summe = 1, so ist jeder $=\frac{1}{2}$ d. h. $\measuredangle$ BOD = COE = 60^0 und BOC = 120^0.

Der fragliche Punkt hat also eine solche Lage, dass jeder der drei um ihn liegenden Winkel = 120^0 ist.

Soll z. B. von einem innerhalb des Dreieckes ABC liegenden Punkt, den man beliebig wählen darf, an die drei Punkt A, B, C, eine Röhrenleitung geführt werden, so wird man die kleinste Anzahl von Röhren benötigen, wenn man als Vereinigungspunkt den eben bestimmten Punkt O wählt.

11. Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, von welchem a) der Umfang, b) der Inhalt ein Minimum ist.

a) Bezeichnet man den Halbmesser des gegebenen Kreises mit r, die Winkel des gesuchten Dreieckes mit x, y, z, den Umfang mit F, und den Halbmesser des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises mit R, so ist

$$F=a+b+c=a+\frac{a\sin.y}{\sin.x}+\frac{a\sin.z}{\sin.x}=\frac{a}{\sin.x}(\sin.x+\sin.y+\sin.z)=$$

$$=\frac{a}{\sin.x}\cdot 4\cos.\frac{x}{2}\cdot\cos.\frac{y}{2}\cdot\cos.\frac{z}{2};\ \text{wegen}\ \measuredangle D=x,\ \text{ist aus}\ \triangle BCD\ldots.a=$$

$$=2R\sin.x;\ \text{demnach}\ F=8R\cos.\frac{x}{2}\cdot\cos.\frac{y}{2}\cdot\cos.\frac{z}{2}.$$

Um eine Relation zwischen den Winkeln oder Seiten des gesuchten Dreieckes und zwischen dem Radius des gegebenen Kreises zu finden, erinnern wir uns an die Formel: $r = \frac{2f}{a+b+c}$, welche uns aus den Seiten a, b, c und aus der Fläche f eines Dreieckes, den Radius des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises liefert;

$$r = \frac{2f}{a+b+c} = \frac{ab \,.\, \sin. z}{F} = \frac{4R^2 \sin. x \,.\, \sin. y}{8R \cos.\frac{x}{2} \,.\, \cos.\frac{y}{2} \,.\, \cos.\frac{z}{2}} =$$

$= 4R \sin.\frac{x}{2} \,.\, \sin.\frac{y}{2} \,.\, \sin.\frac{z}{2}$ . . . . . ist die Bedingungsgleichung, an welche x, y, z gebunden sind.

Die zusammengesetzte Function:

$V = 8R \cos.\frac{x}{2} \,.\, \cos.\frac{y}{2} \,.\, \cos.\frac{z}{2} + \lambda .\ 4R \sin.\frac{x}{2} \sin.\frac{y}{2} \sin.\frac{z}{2}$ liefert, wenn wir einmal x, dann y, oder z allein als variabel betrachten die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -4R \sin.\tfrac{x}{2} \,.\, \cos.\tfrac{y}{2} \,.\, \cos.\tfrac{z}{2} + \lambda \,.\, 2R \cos.\tfrac{x}{2} \,.\, \sin.\tfrac{y}{2} \,.\, \sin.\tfrac{z}{2} &= 0 \\ -4R \cos.\tfrac{x}{2} \,.\, \sin.\tfrac{y}{2} \,.\, \cos.\tfrac{z}{2} + \lambda \,.\, 2R \sin.\tfrac{x}{2} \,.\, \cos.\tfrac{y}{2} \,.\, \sin.\tfrac{z}{2} &= 0 \\ -4R \cos.\tfrac{x}{2} \,.\, \cos.\tfrac{y}{2} \,.\, \sin.\tfrac{z}{2} + \lambda \,.\, 2R \sin.\tfrac{x}{2} \,.\, \sin.\tfrac{y}{2} \,.\, \cos.\tfrac{z}{2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ aus denen durch Elimination von

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\sin.\frac{x}{2}\cos.\frac{y}{2}\cos.\frac{z}{2}}{\cos.\frac{x}{2}\sin.\frac{y}{2}\sin.\frac{z}{2}} = \frac{\cos.\frac{x}{2}\sin.\frac{y}{2}\cos.\frac{z}{2}}{\sin.\frac{x}{2}\cos.\frac{y}{2}\sin.\frac{z}{2}} = \frac{\cos.\frac{x}{2}\cos.\frac{y}{2}\sin.\frac{z}{2}}{\sin.\frac{\alpha}{2}\sin.\frac{y}{2}\cos.\frac{z}{2}}$$ die Relation:

$\text{tg}.\frac{x}{2}\text{cotg}.\frac{y}{2}.\text{cotg}.\frac{z}{2} = \text{cotg}.\frac{x}{2}\text{tg}.\frac{y}{2}\text{cotg}.\frac{z}{2} = \text{cotg}.\frac{x}{2}\text{cotg}.\frac{y}{2}\text{tg}.\frac{z}{2}$ oder

$\text{tg}.\frac{x}{2}\text{cotg}.\frac{y}{2} = \text{cotg}.\frac{x}{2}\text{tg}.\frac{y}{2}$ und $\text{tg}.\frac{y}{2}\text{cotg}.\frac{z}{2} = \text{cotg}.\frac{y}{2}\text{tg}.\frac{z}{2}$ entspringt,

aus $\text{tg}^2\frac{x}{2} = \text{tg}^2\frac{y}{2}$ ergibt sich $\frac{x}{2} = \frac{y}{2}$, also $x = y$

„ $\text{tg}^2\frac{y}{2} = \text{tg}^2\frac{z}{2}$ „ „ $\frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ „ $y = z$ mithin $x = y = z = 60^0$

und min. $(F) = 3R\sqrt{3}$, oder wegen $r = \frac{R}{2}$, min. $(F) = 6r\sqrt{3}$.

β) $F = \frac{a}{b} \sin z = \frac{a^2 \sin y \,.\, \sin z}{2 \sin x} = 2R^2 \sin x \sin y \,.\, \sin z$, und Nebenbedingung $x = 4R \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{z}{2}$.

Der aus beiden zusammengesetzte Ausdruck:

$V = 2R^2 \sin x \,.\, \sin y \,.\, \sin z + \lambda \,.\, 4R \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{z}{2}$ liefert die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 2R^2 \cos x \sin y \sin z + \lambda . 2R \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} = 0 \\ 2R^2 \sin x . \cos y . \sin z + \lambda . 2R \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} = 0 \\ 2R^2 \sin x . \sin y . \cos z + \lambda . 2R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ mithin}$$

$$-\lambda = \frac{R \cos x \sin y . \sin z}{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}} = \frac{R \sin x . \cos y . \sin z}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}} = \frac{R \sin x . \sin y . \cos z}{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}},$$

werden je zwei dieser Ausdrücke einander gleichgesetzt, und die Sinus der ganzen Winkel, durch Sinus und Cosinus der halben Winkel ausgedrückt, so erhält man: $\cos y . \cos^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{y}{2} . \cos z$, und $\cos^2 \frac{x}{2} \cos z = \cos^2 \frac{z}{2} \cos x$ oder $\cos y \frac{1 + \cos z}{2} = \frac{1 + \cos y}{2} \cos z$, und $\frac{1 + \cos x}{2} \cos z = \frac{1 + \cos z}{2} \cos x$, d. i. $\cos y = \cos z$, oder $y = z$, und $\cos z = \cos x$, oder $z = x$; mithin $x = y = z = 60^0$, und min $(F) = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 = 3\sqrt{3} R .^2$.

Hradisch, im Mai 1877.

Jos. Gajdeczka.

Schulnachrichten.

I. Personalstand des Lerkörpers und Lerfächerverteilung.

a) Veränderungen.

In diesem Schuljare erfur gegenüber den vorangegangenen der Status des Lerkörpers einen verhältnissmässig geringen Wechsel.

An Stelle des in den Sommerferien von 1876 aus dem Lerkörper getretenen Supplenten Carl Gebauer wurde mit h. L.-Sch.-R.-Erl. vom 30. October 1876, Z. 26.347 der Leramtscanditat Andreas Gubo zum Supplenten bestellt. Mit Ende des II. Semesters schied ferner der Supplent Josef Ružička; statt seiner wurde mit h. L.-Sch.-R.-Erl. vom 29. Jänner 1877, Z. 309 der Supplent des deutschen Staats-Gymnasiums in Olmütz zur Dienstesleistung zugewiesen.

b) Beurlaubungen

von längerer Dauer fanden nicht statt.

Der Unterricht wurde in nachstehender Weise erteilt:

1. von den wirklichen Lerern und Supplenten;

Nr.	Name und Charakter	lerte im I. Semester	wöchentl. Stundenzal	lerte im II. Semester	wöchentl. Stundenzal	Anmerkung
1	**Vincenz Bienert,** k. k. Director	Griechisch VIII.	5	wie im I. Sem.	5	
2	**Michael Schenk,** k. k. Professor u. emer. Director	Mathematik III. V. VII. VIII. Physik III. VII. VIII.	21	wie im I. Sem.	21	Vorstand der VIII. Cl. Custos des physikal. Cabinetes
3	**Karl Leybold,** k. k. Professor	Zeichnen im Realgymnasium	19	wie im I. Sem.	19	Custos der Sammlungen für den Zeichenunterricht
4	**Josef Indrák,** k. k. Professor	Latein II. a. VI. Griechisch IV.	18	wie im I. Sem.	18	Vorstand der II. a. Cl. Custos der Lererbibliothek
5	**Ignaz Tkač,** k. k. Professor	Latein u. Deutsch IV. Griechisch VI. Böhmisch f. Slav. II. III. Abth.	18	wie im I. Sem.	18	Vorstand der IV. Cl.
6	**Franz Perútka,** k. k. Professor, Katechet u. Exhortator	Religion in allen Klassen	16	wie im I. Sem.	16	

Nr.	Name und Charakter	lerte im I. Semester	wöchentl. Stundenzal	lerte im II. Semester	wöchentl. Stundenzal	Anmerkungen
7	**Heinrich Götzl,** k. k. Professor	Deutsch VI. VII. Geschichte III. VI. VII. Phil. Propäd. VII. VIII.	19	wie im I. Sem.	19	Vorstand der VII. Cl. u. Custos der geographischen Lermittel
8	**Eduard Dudik,** k. k. Gymn. Lerer	Französisch III. IV. Geschichte IV. V. VIII.	18	wie im I. Sem.	18	Custos der Schülerbibliothek
9	**Ludwig Schlögl,** k. k. Gymn. Lerer	Naturgeschicht I. a. b. II. a. b. V. VI. Böhm. f. Dtsch III. IV. Abth.	20	wie im I. Sem.	20	Custos des naturhistorischen Cabinetes
10	**Eduard Kučera,** k. k. Gymn. Lerer	Latein I. a. Deutsch I. a. VIII. Böhm. f. Dtsch. I. II. Abth.	18	wie im I. Sem.	18	Vorstand der I. a. Cl.
11	**Josef Strommer,** k. k. Gymn. Lerer	Latein u. Dtsch. III. Griechisch III. VII.	17	wie im I. Sem.	17	Vorstand der III. Cl.
12	**Josef Gaideczka,** k. k. Gymn. Lerer	Mathematik I. a. b. II. a. b. IV. VI. Physik IV.	21	wie im I. Sem.	21	Custos des chemischen Laboratoriums
13	**Gustav Hejna,** k. k. Gymn. Lerer	Latein. V. VIII. Deutsch V. Böhm. f. Slav. IV. Abth.	16	wie im I. Sem. u. Böhm. f. Sl. I. Abth.	18	Vorstand der V. Cl.
14	**Andreas Gubo,** suppl. Gymn. Lerer	Geographie u. Geschichte I. a. b. II. a. b. Dtsch. II. a.	17	wie im I. Sem.	17	
15	**Johann Lukasch,** suppl. Gymn. Lerer	Latein II. b. VII. Deutsch II. b.	17	wie im I. Sem.	17	Vorstand der II. b. Cl.
16	**Josef Ružička,** suppl. Gymn. Lerer	Lat. u. Deutsch I. b. Griechisch V. Böhmisch f. Slav. I. Abt.	18		—	Vorstand der I. b. Cl. im I. Sem.
17	**Franz Appelt,** suppl. Gymn. Lerer		—	Lat. u. Dtsch. I. b. Griechisch V.	16	Vorstand der I. b. Cl. im II. Sem.

2. von den Nebenlerern:

1. Herr Jakob Grünwald, mosaische Religion in 8 Classen zu je 1 wöch. Stunde.
2. Herr Carl Leybold, Kalligraphie im R.-G. und Freihandzeichnen im O.-G. — je 2 wöch. Stunden.
3. Herr Josef Indrák, Stenographie im O.-G. in 2 Cursen — je 2 wöch. Stunden.
4. Herr Ignaz Tkač, Französisch (nichtobl.) im O.-G. in 2 Cursen — je 2 wöch. Stunden.
5. Herr Josef Strommer, Gesang in 2 Cursen — je wöch. 2 Stunden.

Josef Kaiserlich, Schuldiener.

II. Lerplan.

a) Obligate Lergegenstände.

I. Classe.

Ordinarius: Abth.: A Herr Eduard Kučera.
Abth.: B Herr Franz Appelt.

1. Religion: *a)* katholisch: 2 St. w. Die Glaubenslere, die Lere von den Gnadenmitteln, die Sittenlere. Franz Perútka.
b) mosaisch: 1 St. w. Geschichte des israel. Volkes von Josua bis Samuel. Das Buch „Schaufetim" im Urtexte. Hebräische Grammatik. Die 7 Formen der vollständigen Zeitwörter. Jakob Grünwald.
2. Latein: 8 St. w. Regelmässige Formenlere, die wichtigsten Pronomina, die Cardinal- und Ordinalzalwörter, die 4 regelmässigen Conjugationen mit Einschluss der Deponentia. Gebrauch des Infinitivs und Conjunctivs in den wichtigsten Fällen. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus Rožek's Lesebuche. Memoriren von Vocabeln. Im II. Semester jede Woche eine Schul- und eine Hausarbeit.
Abth. A: Eduard Kučera.
Abth. B: Franz Appelt.
3. Deutsch: 3 St. w. Der einfache und erweiterte Satz; die Redeteile. Mündliche und schriftliche Uebungen mit Berücksichtigung der Orthographie. Uebungen im mündlichen Wiedererzälen des Gelesenen. Richtiges Aussprechen und Betonen. Sachliche Erklärung mit grammatischen Bemerkungen. Vortrag memorirter Gedichte und Lesestücke. Uebungen in den einfachsten Formen schriftlicher Darstellung. Kleine Erzälungen nach gelesenen oder mündlich mitgeteilten Mustern. Inhaltsangabe von Lesestücken. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit.
Abth. A: Eduard Kučera.
Abth. B: Franz Appelt.
4. Geographie: 3 St. w. Die wichtigsten Begriffe aus der mathematischen und physikalischen Geographie. Die Erdteile in Bezug auf die horizontale und verticale Gliederung, Bewässerung, Klima, Producte und Bevölkerung. Uebungen im Kartenlesen und Kartenzeichnen.
Abth. A und B: Andreas Gubo.
5. Mathematik: 3 St. w. Die 4 Rechnungsarten in unbenannten und benannten, ein- und mernamigen ganzen Zalen und Decimalbrüchen. Abgekürzte Multiplication und Division. Teilbarkeit, gr. gem. Mass; kl. gem. Vielfache; gemeine Brüche. (Haus- und Schularbeiten.) Abth. A und B: Josef Gajdeczka.

6. Naturgeschichte: 3 St. w. Zoologie mit besonderer Berücksichtigung der Säugethiere und Insecten.

Abth. A und B: Ludwig Schlögl.

7. Zeichnen: 4 St. w. Geometrische Anschauungslere als Grundlage des gesammten Zeichenunterrichtes. Zeichnen ebener geometrischer Gebilde aus freier Hand nach den Vorzeichnungen auf der Tafel und mit kurzen zum Verständnis nötigen Erklärungen.

Abth. A und B: Carl Leybold.

II. Classe.

Ordinarius: Abth. A: Herr Josef Indrák,
Abth. B: Herr Johann Lukasch.

1. Religion: α) katholisch: 2 St. w. Die Liturgik. Franz Perútka.
β) mosaisch: 1 St. w. Das erste Buch Samuel im Urtexte. Israels Geschichte von Samuel bis zum Tode Saul's. Hebräische Grammatik Cl. I. Jakob Grünwald.

2. Latein: 8 St. w. Wiederholung und Ergänzung der regelmässigen Formenlere; Unregelmässigkeiten in Declination, Genus und Conjunction; die notwendigsten syntaktischen Regeln; das Particip, der Abl abs. — Uebersetzungen aus Rožek's Uebersetzungsbuche. — Jede Woche eine Haus- und eine Schulaufgabe.

Abth. A: Josef Indrák.
Abth. B: Joh. Lukasch.

3. Deutsch: 3 St. w. Der zusammengesetzte Satz; Satzverbindung, Satzgefüge, Periode. Stetige Wiederholung der Formenlere, Wortbildung, Ableitung, Zusammensetzung. Lectüre von Musterstücken aus dem Lesebuche. Vortrag memorirter poetischer und prosaischer Lesestücke in Verbindung mit mündlicher Nacherzälung. Orthographische Uebungen, besonders mit Rücksicht auf Fremdwörter. Alle 4 Wochen 3 schriftliche Aufgaben.

Abth. A: Andreas Gubo.
Abth. B: Johann Lukasch.

4. Geographie und Geschichte: 4 St. w. Specielle Geographie von Asien und Afrika, eingehende Beschreibung der verticalen und horizontalen Gliederung Europa's und seiner Stromgebiete, an die Anschauung und Besprechung der Karte geknüpft, specielle Geographie von Süd- und Westeuropa; kartographische Uebungen. Uebersicht der Geschichte des Altertums.

Abth. A und B: Andreas Gubo.

5. Mathematik: 3 St. w. α) Arithemetik: Wiederholung der 4 Rechnungsarten mit gemeinen Brüchen; Lere von den Verhältnissen und Proportionen, letztere mit möglichstem Festhalten des Charakters einer Schlussrechnung, mit Anwendung auf praktische Rechnungsfälle. Procent — Zins — Discontrechnung. Das Wichtigste aus der Münzkunde.

   β) Geometrie: Linien, Winkel, die geradlinigen, ebenen geometrischen Gebilde, deren Congruenz und Eigenschaften; die einfachsten Constructionen der Parallelogramme; Ausmessung der drei- und merseitigen Figuren. Schul- und Hausarbeiten.

   Abth. A und B: Josef Gaideczka.

6. Naturgeschichte: 3 St. w. α) Mineralogie: Vorfürung der wichtigsten Mineralien und ihrer hervorragendsten, auf empirischem Wege erkennbaren Eigenschaften. — β) Botanik: Vorfürung der wichtigsten Pflanzen, lebend oder in Bildern mit Berücksichtigung der Blütezeit. Abth. A und B: Ludwig Schlögl.

7. Zeichnen: 4 St. w. Das geometrische Ornament, Elemente des Flachornaments. Zeichnen räumlicher geometrischer Gebilde, aus freier Hand nach perspectivischen Grundsätzen durchgefürt an Drat- und Holzmodellen. Abth. A und B: Carl Leybold.

III. Classe.

Ordinarius: Herr Josef Strommer.

1. Religion: α) katholisch: 2 St. w. Die Geschichte der Offenbarung des alten Bundes. Franz Perútka.

   β) mosaisch: 1 St. w. Zweites Buch Samuel im Urtexte. Israels Geschichte vom Regierungsantritte David's bis nach dessen Tode. Hebräische Grammatik wie Cl. I. Jakob Grünwald.

2. Latein: 6 St. w. Uebersichtliche Wiederholung der gesammten Formenlere mit Einschluss der griechischen Declination. Systematische Einübung der Casuslere unter Anwendung des Uebungsbuches von Rožek. Lectüre: Auswal aus Corn. Nepos. Alle 14 Tage eine Schul-, alle 8 Tage eine Hausarbeit.

   Josef Strommer.

3. Griechisch: 4 St. w. Die regelmässige Formenlere bis zum Perfectstamm incl. mit entsprechenden Uebungen. Im II. Semester alle 14 Tage eine Schularbeit. Josef Strommer.

4. Französisch: 4 St. w. Die Regeln der Aussprache und des Lesens mit Inbegriff der Lere vom Accent; die gesammte Formenlere der flexiblen Redeteile; einige wichtigere syntaktische Regeln.

Aneignung eines entsprechenden Wörter- und Phrasenvorrates mittels des Memorirens. Schulübungen. Alle 8 Tage eine Haus-, alle 14 Tage eine Schularbeit. Eduard Dudík.

5. Deutsch: 3 St. w. Wiederholung der Satzlere und eingehende Behandlung des Periodenbaues. Lectüre mit sachlicher und sprachlicher Erklärung aus dem Lesebuche. Uebungen im mündlichen Vortrage. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit.
Josef Strommer.

6. Geographie und Geschichte: 3 St. w. Specielle Geographie der mittel- und nordeuropäischen Staaten, Amerika's und Australien's. Kartenzeichnen. Uebersicht der geschichtlichen Ereignisse des Mittelalters mit besonderer Berücksichtigung der vaterländischen Geschichte. Heinrich Götzl.

7. Mathematik: 3 St. w. α) Arithmetik: Die vier Grundrechnungen mit allgemeinen Zalen. Entwickelung der zweiten und dritten Potenz; Quadrat- und Kubikwurzelausziehung; Anleitung zur abgekürzten Multiplication und Division.
β) Geometrie: Gleichheit, Verwandlung, Teilung und Messung der ebenen geradlinigen Figuren; Messung des Kreises, Kreisringes und Kreisausschnittes; Construction der Parabel, Ellipse und Hyperbel. 10 Schulaufgaben. Michael Schenk.

8. Physik: 3 St. w. Allgemeine Eigenschaften und Aggregatformen der Körper, Einfluss der Wärme auf die Veränderungen im Volumen und der Aggregatform, Wärmeleitung. Magnetismus. Die wichtigsten Tatsachen aus der Statik und Dynamik fester Körper. Elemente der Hydrostatik. Michael Schenk.

9. Zeichnen: 4 St. w. Uebungen im Ornamentzeichnen nach Entwürfen auf der Schultafel, nach farblosen wie auch nach polychromen Musterblättern, wobei auf die classischen, griechischen und römischen Vorbilder besondere Rücksicht genommen wird. Gedächtnissübungen. Carl Leybold.

IV. Classe.

Ordinarius: Herr Ignaz Tkač.

1. Religion: α) katholisch: 2 St. w. Die Geschichte der Offenbarung des neuen Bundes. Franz Perútka.
β) mosaisch: 1 St. w. Das erste Buch der Könige im Urtexte. Israels Geschichte von der Regierung Salomo's bis zum Tode Jehosaphat's. Hebräische Grammatik wie Cl. I.
Jakob Grünwald.

2. Latein: 6 St. w. Lere vom Gebrauche der Tempora und Modi. Römischer Kalender, Prosodie, Elemente der Metrik. Entsprechende Beispiele aus Rožek's Uebungsbuch. Lectüre de b. g. I, II, IV.; aus Ovids Metamorphosen 400 Verse. Häusliche Präparation und Memoriren. Alle 14 Tage eine Schul- und alle 8 Tage eine Hausarbeit. Ignaz Tkač.
3. Griechisch: 4 St. w. Wiederholung der regelmässigen Formenlere; die Verba auf μι, die unregelmässigen Verba; die wichtigsten Regeln der elementaren Syntax. Alle 14 Tage eine Haus- oder eine Schulaufgabe. Josef Indrák.
4. Französisch: 4 St. w. Wiederholung der Formenlere; die unregelmässigen, defectiven und unpersönlichen Zeitwörter; vollständige Syntax des Nom und Pronom. Lere vom Gebrauche der Zeiten und Modi, der Participien und Negationspartikeln; Lere von der Interpunction. Wechselgespräche und Declination. Uebungen, Haus- und Schularbeiten wie in Cl. III. Eduard Dudík.
5. Deutsch: 3 St. w. Wiederholung der Hauptsätze der Syntax und der Formenlere. Hauptpunkte der deutschen Prosodie und Metrik. Lectüre von Musterstücken aus dem Lesebuche. Tropen und Figuren. Memoriren und Vortrag von Gedichten. Geschäftsaufsätze. Alle 14 Tage eine Haus- oder eine Schulaufgabe. Ignaz Tkač.
6 Geographie und Geschichte: 3 St. w. Uebersicht der Geschichte der Neuzeit mit steter Hervorhebung jener Begebenheiten und Persönlichkeiten, welche für die Geschichte des Habsburgischen Gesammtstaates eine besondere Wichtigkeit haben. Specielle Geographie und vaterländische Geschichte der österr.-ungar. Monarchie nach Hannak. Eduard Dudík.
7. Mathematik: 3 St. w.: α) Arithmetik: Zusammengesetzte Verhältnisse und Proportionen nebst Anwendung auf kaufmännische Rechnungen. Zinseszinsrechnug in ihrer Anwendung auf Lebensversicherungen. Gleichungen des ersten Grades mit einer und mit zwei Unbekannten nebst ihrer Anwendung auf praktische Aufgaben.

   β) Geometrie: Stereometrische Anschauungslere; Berechnungen der Oberflächen und des kubischen Inhaltes der Körper mit zalreichen Aufgaben. Haus- und Schulaufgaben. Josef Gajdeczka.
8. Naturwissenschaften: α) Physik: Das Wichtigste aus der Lere vom Magnetismus, Elektricität, Akustik, Optik.

   β) Chemie: Uebersicht der wichtigsten Grundstoffe und ihrer Verbindung mit besonderer Berücksichtigung ihres natürlichen Vorkommens. Josef Gajdeczka.

9. Zeichnen: 3 St. w. Studien nach dem plastischen Ornament, sowie nach geeigneten schwierigen ornamentalen Musterblättern, wobei die menschliche Figur in den Kreis der Uebungen einbezogen wird. Die Einteilung des Regelkopfes, Gedächtnisübungen, wie auch fortgesetzte perspektische Darstellungen geeigneter Objecte. Carl Leybold.

V. Classe.

Ordinarius: Herr Gustav Hejna.

1. Religion: *a)* katholisch: 2 St. w. Die Apologetik. Fr. Perútka.
b) mosaisch: 1 St. w. Israels Geschichte vom J. 332 bis 70 v. Chr. Aus dem Buche der Psalmen 17 Capitel. Hebräische Grammatik. Die 7 Formen der vollkommenen und mangelhaften Zeitwörter. Jakob Grünwald.
2. Latein: 6 St. w. Tempus- und Moduslere. Grammatisch-stilistische Uebungen. Lectüre: I. Sem. T. Livius lib. I. XXI. II. Sem. Ovid Met. I. 163—415, III. 511—733, VI. 146—312, VIII. 260—545. Fast. II. 687—710, IV. 419—618, V. 419—492, VI. 349—394, VI. 419—454. Trist. el. 4. IV. el 10. Privatlectüre: Auswal aus den Met. und Fast. Alle 14 Tage eine Schularbeit. Gustav Hejna.
3. Griechisch: 5 St. w. Die Casuslere und die Lere von den Präpositionen. Lectüre: Xenophon. Auswal aus Schenkl's Chrestomathie. Hom. Il. I. II. Privatlectüre: Hom. Il. IV. Alle Monate 1 Schularbeit. Franz Appelt.
4. Deutsch: 2 St. w. Lectüre von Musterstücken aus Egger's Lesebuche mit sachlichen und sprachlichen Erläuterungen; im Anschlusse daran die Lere von den poetischen Formen und den Dichtungsarten. Uebungen im mündlichen Vortrage. Alle 14 Tage eine Haus- oder Schularbeit. Gustav Hejna.
5. Geographie und Geschichte: 4 St. w. Geschichte des Altertums bis auf Augustus mit steter Berücksichtigung der hiemit im Zusammenhange stehenden geographischen Daten. Eduard Dudík.
6. Mathematik: 4 St. w. α) Algebra: Die 4 Grund-Rechnungsoperationen mit absoluten ganzen Zalen und mit algebraischen ganzen Zalen. Dekadische ganze Zalen. Teilbarkeit der Zalen. Grösstes gemeinschaftliches Mass. Kleinstes gemeinschaftliche Vielfache. Gemeine Brüche. Decimalbrüche. Verhältnisse und Proportionen. β) Geometrie: Die Planimetrie. 10 Schularbeiten. Hausaufgaben im Anschlusse an den Unterricht. Michael Schenk.

7. Naturgeschichte: 2 St. w. α) Mineralogie in Verbindung mit Geognosie. β) Botanik mit besonderer Berücksichtigung der Organographie, Systematik und geographischen Verbreitung der Pflanzen.
Ludwig Schlögl.

VI. Classe.

Ordinarius: Herr Josef Gajdeczka.

1. Religion: α) katholisch: 2 St. w. Die besondere Glaubenslere.
Franz Perútka.

β) mosaisch: Israels Geschichte, vom Jahre 70 bis 1038 nach Chr. Hebräische Grammatik wie Cl. V. Psalmen aus dem 2. Buche 18. Capitel. Jakob Grünwald.

2. Latein: 6 St. w. Ergänzung der Syntax, verbunden mit stil. Uebungen nach Süpfle. Lectüre: Sallust's Jugurtha; Cicero in Cat. I. IV. Vergil I. II. III. Alle 14 Tage eine Schularbeit.
Jos. Indrák.

3. Griechisch: 5. St. w. Tempus- und Moduslere nach Dr. Curtius. Lectüre: Hom. Il. VI. VII. VIII. IX. Herod. V. Privatlectüre: Hom. Il. XVIII, Herod. VI. Monatlich eine Schularbeit.
Ignaz Tkáč.

4. Deutsch: 3 St. w. Literaturgeschichte von der ältesten Zeit bis Herder. Mittelhochdeutsche Grammatik und Lectüre nach Reichel's Lesebuche. Lectüre und eingehende Erklärung der betreffenden Lesestücke aus Egger. Vortragsübungen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Heinrich Götzl.

5. Geographie und Geschichte: 3 St. w. Schluss des Altertums. Geschichte des Mittelalters mit besonderer Hervorhebung der vaterländischen Geschichte. Entsprechende Geographie.
Heinrich Götzl.

6. Mathematik: 3 St. w. *a*) Algebra: Potenzen und Wurzeln in Anwendung auf ein- und mergliedrige algebraische Ausdrücke. Imaginarien; Logarithmen; Gleichungen des 1. Grades mit einer und mereren Unbekannten.

b) Geometrie: Stereometrie mit zalreichen Rechnungsanwendungen. Trigonometrie. Haus- und Schularbeiten.
Josef Gajdeczka.

7. Naturgeschichte: 2 St. w. Zoologie mit erläuternden Demonstrationen, besonderer Berücksichtigung des anatomischen Baues der Haupttypen und der geographischen Verbreitung. Ludwig Schlögl.

VII. Classe.

Ordinarius: Herr Heinrich Götzl.

1. Religion: α) katholisch: 2 St. w. Die allgemeine und besondere kath. Sittenlere. Franz Perútka.

β) mosaisch: 1 St. w. Geschichte des israelitischen Volkes von 1038 bis 1780 n. Chr. Hebräische Grammatik. Alle Formen der vollkommenen und mangelhaften Zeitwörter. Erklärung einiger Capitel aus den Psalmen. Jakob Grünwald.

2. Latein: 6 St. w. Wiederholung, Ergänzung und Erweiterung der Syntax. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus Süpfle. Lectüre: 1. Sem. Cicero pro Milone, pro Ligario. Privatlectüre: Cic. pro Archia 2. Sem. Vergil, Aen. III. VI. IX. Privatlecture: Vergil, Aen. V. Alle 14 Tage eine Schulaufgabe.

Joh. Lukasch.

3. Griechisch: 4 St. w. Lere vom Infinitiv, Particip und den Negationen. Lectüre: Demosth. Ph. I. II. III., Hom. Odyss. I. Soph. Antigone. Alle 4 Wochen eine Schularbeit.

Josef Strommer.

4. Deutsch: 3 St. w. Literaturgeschichte von Herder bis Rückert und Platen. Lectüre und eingehende Erklärung der betreffenden Lesestücke aus Egger II. 1 und 2. Von grösseren Dichtungen wurden gelesen: Lessing's „Nathan der Weise"; Göthe's „Iphigenie auf Tauris" und Schiller's „Wallenstein's Tod". Vortragsübungen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Heinrich Götzl.

5. Geographie und Geschichte: 3 St. w. Geschichte der Neuzeit bis zum J. 1871 mit besonderer Berücksichtigung der vaterländischen Geschichte. Entsprechende Geographie.

Heinrich Götzl.

6. Mathematik: 3 St. w. α) Algebra: Gleichungen des ersten Grades mit mereren Unbekannten. Quadratische Gleichungen mit einer und mit zwei Unbekannten. Unbestimmte Gleichungen. Arithmetische und geometrische Progressionen. Zinseszinsrechnungen.

β) Geometrie: Analytische Geometrie in der Ebene mit Einschluss der Kegelschnittslinien. 12 Schulaufgaben. Hausaufgaben im Anschlusse an den Unterricht. Michael Schenk.

7. Physik: 3 St. w. Allgemeine und besondere Eigenschaften der Körper. Grundleren der allgemeinen Chemie. Mechanik und Dynamik der festen Körper. Hydrostatik.

Michael Schenk.

8. Philosophische Propädeutik: 2 St. wöch. Formale Logik.

Heinrich Götzl.

VIII. Classe.

Ordinarius: Herr Michael Schenk.

1. Religion: α) katholisch: 2 St. w. Die Geschichte der Kirche Jesu Christi seit ihrer Stiftung bis auf unsere Tage. Franz Perútka.
β) mosaisch: 1 St. w. Israelitische Geschichte von 1870 bis zur Gegenwart. Erklärung 10 ausgewählter Kapitel aus dem Buche Jesaja. Hebräische Grammatik: das Zeitwort. Jakob Grünwald.

2. Latein: 6 St. w. Wiederholung der Syntax. Stilübungen nach Süpfle. Lectüre: Tacit. Annal. I. II. (cap. 1—26) Agricola als Privatlectüre. Horaz Oden I. 1. 2. 3. 7. 10. 12. 14. 22. 24. 29. 34. 35. 37. II. 1. 2. 3. 6. 7. 10. 13. 14. 15. 16. 17. 20. III. 1. 2. 3. 4. 5. 8. 29. 30. IV. 2. 3. 4. 7. 12. 15. Carmen saec. Epod. 2. 7. 9. Sat. I. 1. II. 6. Epist. I. 2. 10. Alle 14 Tage eine Schularbeit. Gustav Hejna.

3. Griechisch: 5 St. w. Wiederholung der schwierigen Partien aus der Syntax. Lectüre: Platons Apologie des Sokrates, Kriton. Sophokles, Elektra. Privatlectüre: Platon's Laches. Alle Monate eine Schularbeit. Vincenz Bienert.

4. Deutsch. 3 St. w. Lectüre Egger II. 2. Grillparzer's: „König Ottokar's Glück und Ende.“ Halm's: Camoens.“ Literaturgeschichte von der romantischen Schule bis auf die neueste Zeit, nebst Wiederholung der früheren Partien. Redeübungen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Eduard Kučera.

5. Geographie und Geschichte: 3 St. w. Vaterländische Geschichte; die oro-hydrographischen, statistischen und topographischen Verhältnisse der österreichisch-ungarischen Monarchie. Eduard Dudík.

6. Mathematik: 2 St. w. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Lehrsatz. Wiederholung der Hauptpartien des Lehrstoffes. Uebungen im Auflösen algebraischer und geometrischer Aufgaben. 9 Schulaufgaben. Michael Schenk.

7. Physik. 3 St. w. Magnetismus. Elektricität. Akustik. Optik. Grundlehren der Astronomie und der mathematischen Geographie. Michael Schenk.

8. Philosophische Propädeutik: 2 St. w. Empirische Psychologie. Heinrich Goetzl.

b. Böhmisch.

I. Abteilung: (1. und 2. Classe) für Deutsche: 2 St. w. Nomen und Declination. Das regelmässige Verb. Präparation und Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche. Vortragsübungen leichterer Stücke. Alle 14 Tage abwechselnd eine Haus- und eine Schulaufgabe.

Eduard Kučera

II. Abteilung: (3. und 4. Classe) für Deutsche: 2 St. w. Das unregelmässige Verb. Wiederholung der Formenlere mit besonderer Berücksichtigung der Unregelmässigkeiten. Ableitung der gewönlichsten Wörter. Sprachübungen und Memoriren passender Stücke. Lectüre und Uebersetzung aus dem Lesebuche. Alle 14 Tage eine Haus- und eine Schulaufgabe. Eduard Kučera.

III. Abteilung: (5. und 6. Classe) für Deutsche: 2 St. w. Tempus- und Moduslere. Periode. Wortbildung. Einübung von Phrasen mit Entgegenstellung der deutschen Ausdrucksweise. Lectüre von Lesestücken. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit.

Ludwig Schlögl.

IV. Abteilung. (7. und 8. Classe) für Deutsche: 2 St. w. Wiederholung der Syntax. Lectüre von Lesestücken. Kurzer Abriss der Literaturgeschichte. Alle 3 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Ludwig Schlögl.

I. Abteilung: (1. und 2. Classe) für Slaven: Gesammte Formenlere; die Lere vom einfachen Satze. Lectüre aus dem Lesebuche I. mit Erklärung. Memoriren und Vortrag kleiner Gedichte. Alle 14 Tage eine Haus- und eine Schulaufgabe.

I. Sem. Josef Ružička.
II. Sem. Gustav Hejna.

II. Abteilung. (3. und 4. Classe) für Slaven: 2 St. w. Wiederholung der Formenlere, besonders des Verbums. Gebrauch der Zeiten, Arten, Participien. Lectüre aus dem Lesebuch mit Erklärung. Satzlere (nach Zikmund). Vortrag von Gedichten. Alle 14 Tage eine Haus- oder eine Schulaufgabe. Ignaz Tkač.

III. Abteilung: (5. und 6. Classe) für Slaven: 2 St. w. Uebersicht der altczechischen Formenlere. Lectüre aus Jireček's Anthologie mit grammatischer und sachlicher Erklärung. Alle 14 Tage eine Haus- oder eine Schulaufgabe. Ignaz Tkač.

IV. Abteilung: (7. und 8. Classe) für Slaven: Neuere Literaturgeschichte verbunden mit der Lectüre ausgewählter Musterstücke. Alle 3 Wochen abwechselnd eine Haus- oder eine Schulaufgabe.

Gustav Hejna.

c. Freie Lehrgegenstände.

I. Kalligraphie: 2 St. w.

Deutsch-Current, englische Cursiv und Zierschriften; zugleich wurde für die Entwicklung einer schnellen, gut leserlichen Handschrift Sorge getragen. Karl Leybold.

II. Freihandzeichnen im O. G.: 2 St. w.

Fortgesetzte Uebungen nach Gypsmodellen, ornamentalen und figuralen Vorlagen, nach den Fähigkeiten der Schüler eingehalten. Karl Leybold.

III. Französische Sprache.

I. Abteilung: 2 St. w. Die Formenlere mit Inbegriff der unregelmässigen Verba. Die wichtigsten syntaktischen Regeln. Häusliche schriftliche Vorbereitung für die Uebersetzung der Beispiele aus der Grammatik. Alle 4 Wochen eine Haus- oder Schulaufgabe. Ignaz Tkač.

I. Abteilung: 2 St. w. Wiederholung der unregelmässigen Verba. Lectüre und grammatisch-syntaktische Erklärung einzelner Stücke aus der Chrestomathie mit französischer mündlicher Wiedergabe des Gelesenen. Alle 4 Wochen eine Haus- oder Schulaufgabe. Ignaz Tkač.

IV. Gesang.

I. Abteilung: 2 St. w. Die Theorie des Gesanges bis zur Umkerung der Intervalle. Einübung mererer zweistimmiger Lieder. Josef Strommer.

II. Abteilung: 2 St. w. Geübt und gesungen wurden 12 vierstimmige gemischte Chöre und 4 Männerchöre; auch der Kirchengesang wurde gepflegt. Josef Strommer.

V. Stenographie.

I. Curs.

2 St. w. Die Schriftzeichen, Orthographie, der Vocal als Inlaut und Anlaut, Verbindung der Consonantenzeichen; die Vorsilben und die Nachsilben; die Declination und Conjugation; die Partikeln und die Zalenbezeichnung; die Formkürzung — nach Faulmann's stenographischem Lehrgebäude. Leseübungen nach Faulmanns Anthologie. Uebungen im Schnellschreiben. Josef Indrák.

II. Curs.

2 St. w. Wiederholung der Form- und der Klangkürzung. Leseübung nach der „Schule der stenographischen Praxis“ von Faulmann. Uebungen im Schnellschreiben. Josef Indrák.

III. Lerbücher,

welche im Schuljare 1876/77 gebraucht wurden, nach Gegenständen u. Classen.

1. Religionslere: *a*) katholisch: Fischer, kath. Religionslere in I. — Fischer, kath. Liturgik in II. — Geschichte der göttlichen Offenbarung im alten Testamente (Bellmann) in III. — Geschichte der göttlichen Offenbarung im neuen Testamente (Bellmann) in IV. — Martin, allgem. Glanbenslere in V. — Martin, besondere Glaubenslere in VI. — Martin, kath. Sittenlere in VII. — Fessler, Geschichte der Kirche Christi in VIII.

   b) Mosaisch: Wessely, biblischer Katechismus; Pentateuch (Hebräischer Text) in I. — IV.; Hecht, Geschichte Israels, Pentateuch (hebräischer Text) in V. und VIII.
2. Lateinische Sprache: Schultz, kleine lat. Grammatik in I. — IV., Rožek, lat. Lesebuch I. in I. — Rožek, lat. Lesebuch II. in II. — Rožek, Uebungsbuch I.; Corn. Nepos von Koch in III. — Rožek, Uebungsbuch II.; Cäsar de b. g. von Hoffmann; Ovid v. Grysar in IV. — Schultz, grosse lat. Grammatik in V. — VIII; Süpfle, lat. Stilübungen II.; Livius von Hertz; Ovid v. Grysar in V. — Süpfle, lat. Stilübungen II.; Sallust v. Linker; Cäsar de b. c. von Hoffmann; Cicero von Klotz, Vergil von Paldamus in VI. — Süpfle, lat. Stilübungen III.; Cicero von Klotz; Vergil v. Paldamus, in VII. — Süpfle, lat. Stilübungen III; Tacitus von Halm; Horaz v. Stallbaum in VIII.
3. Griechische Sprache: Curtius, griech. Grammatik III. — VIII.; Hintner, griech. Elementarbuch in III. u. IV. — Schenkl, Chrestomathie aus Xenophon; Homer, Ilias von Hochegger in V.; Homer, Ilias von Hochegger; Herodot v. Dietsch in VI. — Homer, Odyssee, v. Pauly; Demosthenes v. Pauly; Sophokles v Dindorf in VII. — Plato v. Hermann; Sophokles v. Dindorf in VIII.
4. Französische Sprache: α) Obligat: Süpfle, französ. Grammatik in III. u. IV. — β) Nicht obligat: Süpfle, französ. Grammatik; Filek, Uebungsbuch im I. u. II. Curs.
5. Deutsche Sprache: Gurcke, deutsche Schulgrammatik in I. — IV.; Neumann u. Gehlen, deutsches Lesebuch I. in I. — Neumann und Gehlen, deutsches Lesebuch II. in II. — Neumann u. Gehlen, deutsches Lesebuch III. in III. — Neumann u. Gehlen, deutsches Lesebuch IV. in IV. — Egger, deutsches Lesebuch f. O.-G. 1. in V. — Egger, deutsches Lesebuch für O.-G. II. 1. Reichel, mittelhochdeutsches Lesebuch in VI. — Egger, deutsches Lesebuch f. O.-G. II. 1. in VII.; Egger, deutsches Lesebuch f. O.-G. II. 2. in VIII. —

6. Geographie u. Geschichte: Kozenn, Schulatlas in I. u. III.; Herr, Lerbuch der vergl. Erdbeschreibung in I. — Rhode, histor. Atlas in II., IV. — VIII.; Hannak, Geschichte des Altertums; Klun, Leitfaden der Geographie in II. — Hannak, Geschichte des Mittelalters; Klun, Leitfaden der Geographie in III. — Hannak, Geschichte der Neuzeit; Hannak, österr. Vaterlandskunde in IV. — Gindely, allg. Geschichte f. O.-G. I. in V. — Gindely, allg. Geschichte f. O.-G. II. in VI. — Gyndely, allg. Geschichte f. O.-G. III. in VII. — Hannak, österr. Vaterlandskunde in VIII.
7. Mathematik: Močnik, Arithmetik I. in I. u. II. — Močnik, geom. Anschauungslere I. in II. — Močnik, Arithmetik II. und geom. Anschauungslere II. in III. und IV. — Močnik, Algebra u. Geometrie f. O.-G. in V.—VIII. — Stampfer, Logarithmen in VI. —
8. Naturwissenschaften: Pokorny, Naturgesch. des Tierreiches in. I. — Pokorny, Naturgesceichte des Pflanzen- u. Mineralreiches in II. — Krist, Naturlere in III. — Schabus, Anfangsgründe der Naturlere; Hinterberger, Lerbuch der Chemie in IV. — Bill, Grundriss der Botanik; Kenngott, Lerbuch der Mineralogie in V. — Thomé, Zoologie in VI. — Pisko, Lerbuch der Physik f. O.-G. in VII. u. VIII.
9. Zeichnen: *a)* Obligat: Močnik, geometr. Anschauungslere in I. — Herdtel, Vorlagenwerk; Zahn, Vorlagen für Ornamente; Julien, Vorlagen; Grandauer, elementar. Zeichenschule; Gypsmodelle, Drahtmodelle in I.—IV. — *b)* Nicht obligat: Zahn, Vorlagen für Ornamente; Julien, Vorlagen; Gypsmodelle im O.-G.
10. Philos. Propädeutik: Lindner, Lerbuch der formalen Logik in VII. — Lindner, Lerbuch der Psychologie in VIII.
11. Böhmisch: *a)* Für Deutsche: Karlik, prakt. Grammatik im I. Curs. — Tomiček, Lerbuch d. böhm. Sprache; Tieftrunk, böhm. Lesebuch im II., III. u. IV. Curs. — Für Slaven: Tomiček, mluvnice; Jireček, čitanka im I. Curs. — Zikmund, mluvnice; Jireček obrazy z rakouskych zemi in II. Curse. — Květ, staročeská mluvnice; Jireček, anthologie I. in. III. Curs. — Jireček, anthologie: z novočeské literatury im IV. Curs.
12. Gesang: nach Peyscha. —
13. Stenographie: nach Faulmann im O.-G. —

IV. Themen zu deutschen Aufsätzen im Obergymnasium.

V. Classe.

I. Semester.

1. Τῆς ἀρετῆς ἱδρῶτα θεοὶ προπάροιθεν ἔθηκαν.
2. Die Gründung Roms (nach Livius).
3. Der Nibelungenhort (nach W. Jordan).
4. Kudruns Klage von Emanuel Geibel. Gedankengang.
5. Die Segnungen des Ackerbaues nach Schillers eleusischem Feste.
6. Ueber den Wert der Gesundheit.
7. Der Kampf der Horatier und Curiatier (nach Livius).
8. Die Nacht nach ihrer guten und bösen Seite.
9. Charakteristik des Ritters in Schillers Gedichte: Der Kampf mit dem Drachen.

II. Semester.

1. Das Wasser im Dienste des Menschen.
2. Lycaon nach Ovids Metamorphosen.
3. *a)* Das schlimmste Glied, das Menschen tragen,
   Ist die Zunge, hör' ich sagen.
   b) Wenn die Zunge das Rechte thut,
   So ist kein ander Glied so gut.

   Freidanks Bescheidenheit.
4. Das Leben eine Reise.
5. Ueber die Vaterlandsliebe.
6. Was ist dem Menschen das Meer und wie benützt er es?
7. Am Grabe lernt man denken, lieben, leben.
8. Wie beurteilt Thibaut d'Arc seine Tochter Johanna? Nach dem Prolog aus Schiller's „Jungfrau von Orleans."
9. Inhalt und Deutung des Gedichtes „Adler und Taube" von Göthe.

Gustav Hejna.

VI. Classe.

I. Semester.

1. Hätte nicht die Schrift den Zauberkreis gezogen,
   Viel Gold der Vorwelt wär in Wind wie Spreu verflogen.

   (Rückert.)
2. Die ältesten Culturzustände der Germanen.
3. Nichts ist also schwer und scharf,
   das nicht die Arbeit unterwarf.

   (Fischart.)
4. Warum konnten sich die Ostgothen nicht dauernd im Besitze Italiens behaupten?

5. In wie fern ist die Treue der Grundgedanke des Nibelungenliedes?
6. König Gunthers Brautfart. (Nach dem Nibelungenliede).
7. Der Spielmann im Nibelungen- und Kudrunliede.
8. Glücke ist rehte als ein bal:
   Swer stîget, der sol vürhten val.
   (Vrîdank).
9. Die Erziehung eines deutschen Ritters im 13. Jahrhunderte nach den betreffenden Stellen im Lesebuche.

II. Semester.

10. Welche Umstände haben auf die glanzvolle Entwicklung der mittelhochdeutschen Literatur besonders günstig eingewirkt?
11. Die Erhebung der Mark Oesterreich zum Herzogtume.
12. Erklärung des Walther'schen Gedichtes: „Deutschlands Ehre."
13. Der Kampf Rudolfs von Habsburg mit Ottokar von Böhmen.
14. Hans Sachs. Nach dem Gedichte „Hans Sachsens poetische Sendung" von Göthe.
15. Dass jedem gefällt sein Weis so wol,
    Des ist das Land der Narren voll.
    (Hans Sachs.)
16. „An die Dichtkunst" von Hagedorn; sachlich und literarhistorisch erläutert.
17. Erklärung der Klopstock'schen Ode: „Mein Vaterland."
18. Klopstock und Wieland. (Literaturhistorische Parallele).

Heinrich Götzl.

VII. Classe.

I. Semester.

1. Nur dem Ernst, den keine Mühe bleichet,
   Rauscht der Wahrheit tief versteckter Born.
   (Schiller.)
2. Lessings Bedeutung für das deutsche Drama.
3. Wie charakterisirt Lessing Nathan den Weisen in seinem gleichnamigen Drama?
4. Welche Umstände haben auf den Gang der Reformation in Deutschland fördernd eingewirkt?
5. Deutsche Reichszustände nach Göthes „Götz von Berlichlingen."
6. Wie schildert Göthe die Jugendfreundschaft im Dialage zwischen Orest und Pylades? (Iph. A. 2, Sc. 2).
7. Orest und Pylades in Göthes Iphigenie auf Tauris. (Charakterzeichnung.)
8. Erklärung des Götheischen Gedichtes: „Dichterweihe."
9. Kaiser Josef II. und Friedrich II. von Preussen. (Historische Palallele).

II. Semester.

10. Der Bildungsgang Schillers.
11. Wer mutig für sein Vaterland gefallen,
Der baut sich selbst ein ewig Monument
Im treuen Herzen seiner Landesbrüder.
(Körner.)
12. Welche Lebensbilder gibt Schiller in seinem Liede von der Glocke?
13. Zu welchen Zwecke und mit welchem Rechte vergleicht sich Wallenstein mit Cäsar? (Wallensteins Tod A. 2, Sc. 2.)
14. Wie lässt Schiller seinen Wallenstein zum Verrate gedrängt werden?
15. Dein eigen ist alles,
dein Heil, wie dein Unheil;
Es lenken die Lose
Dein Herz und dein Hang.
(Jordan.)
16. Das Wesen der romantischen Poesie nach dem Gedichte „Aufzug der Romanze“ von Tiek.
17. Ursachen der französischen Februarrevolution.
18. Der brave Mann denkt an sich selbst zuletzt,
Vertraut auf Gott und rettet den Bedrängten.
(Schillers Tell.)

Heinrich Götzl.

VIII. Classe.

1. Dulce et decorum pro patria mori.
2. Immer strebe zum Ganzen, und kannst du selber kein Ganzes Werden, als dienendes Glied schliess an ein Ganzes dich an.
(Göthe).
5. Welche Verdienste hat sich die romantische Schule um das deutsche Volk erworben?
4. Der Herbst, ein Bild des Alters.
5. Die Verdienste der Freiheitsdichter und die Befreiung Deutschlands.
6. Sokrates widerlegt die Anklage auf Atheismus (nach Platon's Apologie).
7. Lern' aus der Welt Jahrbüchern Gerechtigkeit (Platen).
8. Wer etwas lernen will, muss dazu drei Gaben,
Von oben her, von innen und von aussen haben.
9. Der Schild des Achilles und der Schild des Aeneas (Il. 18. 478—607; Aen. 8. 626—728).
10. Festhalten am eigenen Vaterlande: „Hier sind die starken Wurzeln deiner Kraft; dort in der fremden Welt stehst du allein.“
11. Dem Jüngling gehört die Zukunft, dem Manne die Gegenwart, dem Greise die Vergangenheit.

12. Gedankengang des Lenau'schen Gedichtes: Zum Jubelfeste des Erzherzogs Karl.
13. Welchen Anschauungen huldigt Friedr. Halm in der Schlussscene seines Drama's „Camoens" über den Beruf, die Wirksamkeit und den Erfolg des waren Dichters?
14. Ode „Ad sodales" von Horaz. Veranlassung und Begründung der freudigen Stimmung derselben.
15. Charakteristik Rudolfs von Habsburg in dem Drama „König Ottokars Glück und Ende" von Grillparzer.
15. Grosse Männer gehören der ganzen Menschheit. (Joh. v. Müller). — Maturitätsprüfungsarbeit. Eduard Kučera.

Themen zu böhmischen Aufsätzen.

III. sl. Curs.

I. Sem. 1. Pohled z vyšiny sv. Rocha.
2. Porovnání života s řekou.
3. Gutta cavat lapidem, non vi sed saepe cadendo.
4. Nemo propheta in patria.
5. Překlad z Xenoph. I, 7.
6. Překlad z Il. 6, 347—387.
7. Myšlenky na hrobě študujícího.
7. Člověk se nikdy nepřeučí.
9. Pod kopřivím vyrůstá jahoda;
a zdravé zrno daří se a zraje,
ač stojí vedle plodů špatnějších. (Shakespeare.)

II. Sem. 1. Mír a hojnost zbabělce rodí, nedostatek však je matka statnosti. (Shakespeare.)

2. Překlad *a)* Il. 1—28,
b) Herod 5, 1—9.
3. Užitek železnic.
4. Rukopis Zelenohorský.
5. Per aspera ad astra.
6. Užitek lesův.
7. Přečasto v sobě prostředek ten máme,
Jejž pošetile nebi přičítáme. (Shakespeare.)
8. Vlaslav a Čestmir.
9. Kdo nejde v před, jde zpět. Ignaz Tkač.

IV. sl. Curs.

I. Semester.

1. Která jsou nebezpečenství chudoby a bohatství?
2. Jak líčí Šafařík povahu Staroslovanův?
3. Jan za chrta dán. Povídka dle Snajdrovj básně.
4. Hledej přítele rukou hedbávnon a drž železnon.
5. Zlato je dobrý sluha, ale zlý pán.
6. Bouře v přírodě — strasti v životě.

II. Semester.

1. Vysvětlení básně: „Jakéž kouzlo Tě vodívá“ od Čelakovského, z Růže stolisté.“
2. O lásce k vlasti, (dle článku Nejedlého).
3. Proč nazýváme člověka pánem přírody?
4. Stav kultury české za času Karla IV.
5. Důležitost klášterů ve středním věku.
6. Kterých prospěchů poskytovaly Rekům hry národní? (Práce maturitní.)

V. Statistische Tabelle.

I. Frequenz			II.	III. Autname			IV. Classification						V. Schulgeld		VI.	VII. Confession			VIII. Muttersprache			IX. Studienrichtung am Realgymnas.		X. Anmerkung
							Reif zum Versetzen		Unreif zum Versetzen															
Zu Ende 1875/6	Anfangs 1876/7	Zu Ende 1876/7	Schulclasse	Repetenten	Aufgestiegen	Von aussen gekommen	m. Vorzug	I. Classe	zur Wiederholungs-Prüfung	II. Classe	III. Classe	Ungeprüft	zalend	befreit	Stipendisten	Katholiken	Evangelische	Israeliten	deutsch	slavisch	andere	Humanisten	Realisten	
250+8	277+5	264+4	I. A.	5	—	30	3	18	2	—	8	4	24	7	—	17	—	14	21	10	—	—	—	
			I. B.	6	—	28	1	21	5	3	2	2	28	4	—	19	—	13	19	13	—	—	—	
			II. A.	5	21	4+1	1	15	7	3	—	4+1	17+1	10	—	16+1	—	11	23+1	4	—	—	—	
			II. B.	6	23	2	1	19	4	4	—	3	14	14	1	21	—	7	9	19	—	—	—	
			III.	4	29+2	3	1	22	7+2	3	3	—	22+2	14	—	18+2	—	18	24+2	12	—	33+2	3	
			IV.	2	28+1	1	2	25	3	1	—	—+1	15+1	16	—	15+1	—	16	24+1	7	—	28+1	3	
			V.	3+1 *	20	2	3	13	7	2	—	1	19	6	1	14	—	11	13	11	1 Ungar	—	—	
			VI.	—	20	3	6	14	1	1	—	1	12	10	1	13	—	9	14	8	—	—	—	
			VII.	—	16	1	2	12	3	—	—	—	7	10	2	11	—	6	13	4	—	—	—	
			VIII.	1	13	1	2	12	—	—	—	1	9	6	2	10	—	5	9	6	—	—	—	
		Zusammen		32+1	170+3	75+1	22	171	39+2	17	13	16+2	167+4	97	7	154+4	—	110	169+4	94	1	61+3	6	
				277+5			278+4						264+4			264+4			264+4					

* Der Privatist in der V. Cl. wurde im II. Sem. öffentl. Schüler.

Taxen. Vaterland. Alter.

Classe	Aufnams-Taxen fl.	Aufnams-Taxen kr.	Lermittel-Beiträge fl.	Zeug.-Dup.-Taxen fl.	am Ende des II. Semesters: Stadt Hradisch	Mähren	Schlesien	Böhmen	Galizien	Inner-Oesterreich	Ungarn	Ausland
I. A.	63	—	35	—	8	18	—	1	—	1	2	1
I. B.	58	80	34	—	9	23	—	—	—	—	—	—
II. A.	10	50	31	2	9	14	1	1	1	1	1	—
II. B.	4	20	31	—	4	21	—	1	—	1	1	—
III.	6	30	40	—	13	22	—	—	—	3	—	—
IV.	—	—	30	—	3	27	—	—	—	2	—	—
V.	6	30	26	—	6	16	1	2	—	—	—	—
VI.	6	30	23	—	4	18	—	—	—	—	—	—
VII.	2	10	17	—	5	11	—	—	—	—	1	—
VIII.	4	20	15	1	4	10	1	—	—	—	—	—
Zusammen	161	70	282	3	65	180	3	5	1	8	5	1
					268							

Classe	Altersjare zu Ende des II. Semesters: 21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
I. A.	—	—	1	—	—	—	2	3	4	12	7	1	1
I. B.	—	—	—	—	—	—	3	5	5	7	7	5	—
II. A.	—	—	—	—	1	1	2	6	8	8	2	—	—
II. B.	—	—	—	—	1	2	5	7	8	4	1	—	—
III.	—	—	—	—	2	3	8	6	11	5	3	—	—
IV.	—	—	1	2	4	5	11	4	5	—	—	—	—
V.	—	1	—	3	2	5	16	4	—	—	—	—	—
VI.	—	—	1	7	6	4	4	—	—	—	—	—	—
VII.	—	2	1	6	7	1	—	—	—	—	—	—	—
VIII.	2	2	8	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—
Zusammen	2	5	12	20	24	21	45	35	41	36	20	6	1
							268						

Freie Lergegenstände

Frequenz im I. u. II. Semester

Classe	Böhmisch für: Deutsche I. S.	Deutsche II. S.	Slaven I. S.	Slaven II. S.	Französisch f. O. G.u.IV.Cl.: I. Curs I. S.	I. Curs II. S.	II. Curs I. S.	II. Curs II. S.	Gesang: I. Curs I. S.	I. Curs II. S.	II. Curs I. S.	II. Curs II. S.	Stenographie: I. Curs I. S.	I. Curs II. S.	II. Curs I. S.	II. Curs II. S.	Zeichnen f. O. G.: I. S.	II. S.
I. A.	8	9	12	7	—	—	—	—	12	12	—	—	—	—	—	—	—	—
I. B.	8	8	9	9	—	—	—	—	8	8	—	—	—	—	—	—	—	—
II. A.	7	9	5	3	—	—	—	—	6	6	7	6	—	—	—	—	—	—
II. B.	8	7	13	14	—	—	—	—	20	19	—	—	—	—	—	—	—	—
III.	6	5	9	9	—	—	—	—	3	3	16	16	—	—	—	—	—	—
IV.	5	5	5	5	17	14	—	—	—	—	7	5	—	—	—	—	—	—
V.	3	2	9	8	8	5	5	3	—	—	9	6	18	14	—	—	1	1
VI.	—	—	6	5	6	3	6	6	—	—	3	3	10	9	4	4	2	2
VII.	4	4	4	4	1	1	12	11	—	—	9	9	5	5	7	7	4	5
VIII.	2	—	5	6	—	—	2	1	—	—	11	9	—	—	7	4	3	3
Zusammen	51	49	77	70	32	23	25	21	49	48	62	54	33	28	18	15	10	11

Wiederholungsprüfung

Resultate am Anfange 1876/7.

Classe	Kalligraphie I. S.	Kalligraphie II. S.	erhielten die Bewilligung	Davon: bestanden die Präf.	bestanden nicht	nicht erschienen
I. A.	30	29	5	3	1	1
I. B.	21	19	6	4	2	—
II. A.	21	22	2	2	—	—
II. B.	11	17				
III.	19	19	5	1	2	2
IV.	9	15	4	4	—	—
V.	—	—	4	1	3	—
VI.	—	—	—	—	—	—
VII.	—	—	1	1	—	—
VIII.	—	—	—	—	—	—
Zusammen	111	121	27	16	8	3

VI. Vermerung der Lermittel.

A. Die Bibliothek.

Die Lererbibliothek erhielt folgenden Zuwachs: a) durch Ankauf: Zeller, Philosophie der Griechen I. — Curtius, Das Verbum der griechischen Sprache. 2 Bde. — Müller K. O. Geschichte der griechichen Literatur 2 Bde. — Plato, ed. Stallbaum — Plato III. v. Hermann — Schmiedt, griech. Synonymik I. — Lexer, mittelhochdeutsches Wörterbuch 13—15. Lfg. — Grillparzer's Werke 5 Bde. — Gude, Erläuterungen deutsch. Dichter. 5 Teil. — Pfeiffer, Klassiker des Mittelalters. 12 Bde. — Rosenkranz, Göthe u. seine Werke. — Strzemcha, Geschichte der deutsch. Nationalliteratur. — Ranke's Werke. 25—30 Bde. — Krones, österr. Geschichte 1.—13. Lfg. — Umlauft, österr. ungar. Monarchie — Giesebrecht, deutsche Kaiserzeit — Herbart's pädagogische Schriften. 2 Bd. — Peschel, Völkerkunde. — Weinhold, Vorschule für Experimentalphysik. — Jarbuch der Erfindungen von Gretschl. 4. bis 12. Jarg. — Krist, Naturlere. — Anast. Grün's Werke, 1. bis 3. Lfg. — Plato von Müller u. Steinhardt. II. und IV. — Bronn, Klassen und Ordnungen des Tierreichs III. 17. bis 48 Lfg. — Brehm's, illustrirtes Tierleben 1.—7. Lfg. — Mätzner, französ. Grammatik — Diez, Grammatik der roman. Sprachen. — Gérusez, literat. française. — Voltaire, siècle de Louis XIV. — Anděl, das geom. Ornament. — Zeitschriften: Zeitschrift für österr. Gymnasien. — Neue Jahrbücher f. Philologie und Pädagogik. — Sybel's histor. Zeitschrift. — Archiv für das Studium der neueren Sprachen. — der praktische Schulmann — Petermann's geographische Mitteilungen. — Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. — Kosmos. Mitteilungen der geogr. Gesellschaft in Wien, — Oesterr. Botanische Zeitschrift. — Verordnungsblatt.

b) Durch Geschenke: Vom k. k. Minist. f. Cultus u. Unterricht: Jahresbericht des k. k. Minist. f. Cult. u. Unterr. — Vom k. k. Schulbücher-Verlag: Hypsometrische Uebersichtskarte der österr. ungar. Monarchie. — Von der k. k. mähr. schles. Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues etc. Jargang 1876. — Von der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien: eine Anzal ihrer Publicationen v. 1875 u. 1876. — Von K. Winnikers's Verlagshandlung in Brünn: Pisko, Physik für Obergymnasien u. Oberrealschulen. — Von Ruprecht's Verlag in Göttingen: Corn. Nepotis etc. ed. Dr. Lattmann u. kleine lat. Schulgrammatik v. Dr. Lattmann. — Von Sallmayer's Verlag in Wien: Lerbuch der vergl. Erdbeschreibung f. Unt. Gym. I. u. II. Curs. — Von Hölzel's Verlag in Wien: Kozenn's Schulatlas. 22. Aufl. — Von Hölder's Verlag in Wien: Leitfaden zum geographischen Unterrichte v. Ptaschnik; Ler-

buch der Arithmetik etc. v. Schram; griech. Elementarbuch v. Hintner; Deutsches Lesebuch für d. I. Cl. der Gymn. v. Egger; Elementarbuch der franz. Sprache v. Filek v. Wittingshausen; Physik f. die oberen Kl. der Mittelsch. v. Handl; Geschichte des Altertums v. Hannak. — V. Graeser's Verlag in Wien: Grundriss der allg. Weltgeschichte v. Loserth. — von den Verfasser: österr. ungar. Länderskizzen v. Kraus: Malá slovesnost v. Bartoš. — Vom k. k. Gymn. Lerer Gaideczka Josef: englische u. deutsche Gespräche v. Hedley; englische Sprachlere v. Plate I.; Tierseele u. Menschengeist v. Körner; Gott in der Geschichte v. Bunsen 6 Bde.; vom k. k. Gymn. Prof. Schenk Michael: Gretschl's Jarbuch I.—II. Bd.

Die Lererbibliotek zält gegenwärtig 509 Werke in 886 Bänden, resp. Lieferungen; 10 Zeitschriften in 38 Bänden und 373 Heften, nebst 2601 St. Programmen.

Die Schülerbibliothek wurde vermert: a. Durch Ankauf: Payer, österr. ungar. Nordpolexpedition; Simrock, das Nibelungenlied; Wagner, Pflanzenfeinde; Pilz, Tierfreunde; Glaser-Klotz, Leben u. Eigentümlichkeiten in der niedern Tierwelt I. II.; Müller; höhere Tierwelt; Thomas, Buch der Entdeckungen; Müller, Kleid der Erde; Pösche, unsere lieben Hausfreunde; Schmied'sche Schriften, 40 Bdch.; Drobisch, Radetzky; Mensch, nach dem Nordpol; Andrae, Erzählungen; Herchenbach's Schriften, 30 Bdch.; Kulda, pohádky I. II. Turnowský, zlaté údolé; Volný, Maximilian; Vykolánuv dějepis; Wägner, Hellas I. b) Durch Geschenke: von Herrn Coll Franz Ritter von, k. k. Major: Walter, Scott, 66 Bde.

Die Schülerbibliothek enthält gegenwärtig nach Ausscheidung der unbrauchbaren Bücher für die Lectüre 552 Bände, an Schulbüchern 354 Bände, zsammen: 906 Bde.

B) Das physikalische Kabinet.

Von der mit Erl. des hochl. k. k. Landes-Schulrates vom 10. Nov. 1876 Z. 27511 u. vom 23. Febr. 1877 Z. 527 bewilligten Dotation im Betrage von 400 fl. ö. W. wurden folgende Anschaffungen bestritten:

1 Nonius linear. — 1 Quadrant mit Nonius. — 1 Rollenzug auf Stativ. — 1 Reversionspendel. — Communicirende Rören. — Apparat zum Nachweis des Druckes der Flüssigkeit nach aufwärts. — 3 einfache Piknometer. — 1 Zimmerbarometer. — Kautschukballon unter die Luftpumpe. — 1 kleiner Heronsball. — 1 Compressionsluftpumpe mit Compressionsgefäss. — 1 Thermometer. — 1 Apparat zur Bestimmung des Siedepunktes. — 1 Hebel-Pyrometer. — 6 Thermometerören. — 3 Stück Drahtgitter. — Glasbilder und Papierbilder zum

Stereoskop. — 1 Convexspiegel von Glas. — Wellenmaschine nac
Fessel. — 1 Siegellackstange für den Grundversuch der Elektricität. -
Pendelfleetroskope. — Apparat für positive und negative Elektricitä
— Probescheiben und Probekügelchen. — Eine Collection von Hollu
derkügelchen — Oberflächenconductor — Duplicator nach Bennet. -
Lane's Maasflasche. — Lane's Zerlegetafel. — Papierbusch. — 1 Ley
nerflaschen-Batterie. — 1 Katzenfell. — Isolirte Leitungsschnüre. -
Callan'sche Batterie 20 Elemente. — Messingklammern. — Kupferdral
— Voltameter. — Apparat für das elektrische Licht. — 1 Multiplicat
für thermo-elek. Ströme. — Ampere's Gestell. — 1 Geissler'sch
Ror mit Uranglas. — 1 Magnetnadel mit horizontaler Axe. -
1 Weingeistlampe. — Utensilien 8 St. — 1 kleine Hobelbank. -
Chemikalien. — vermert durch Geschenk: 1 Stereoskop ohne Bild
von Herrn Gymnasiallerer Gaideczka. 1 Eprouvetengestell aus Weis
blech von demselben. — 1 Sternkarte von Reuter von demselbe
Summe der Apparate: 211, Utensilien 22, Chemikalien 12 Stück.

C) Das chemische Cabinet.

Die Lermittelsammlung enthielt am Ende des Schuljares 18
164 Stück Chemikalien und Präparate, und aus 51 Inventarsnumme
für die verschiedenen Geräte.

Vermert wurde diese Sammlung heuer durch

a) Ankauf von: 1 Handwage, 1 Endiometer, 1 Platinschale,
Schreibdiamant, 1 Kautschukplatte, 1 Korkfeile, 2 Bürsten, 1 Sa
Bechergläser, 1 Satz Abdampfschalen, 6 Trichterrören; Marmor, Flu
spath, Eisenfeile, Kupferspähne, Jodkalium, Kollodium, Chlorofor
Aether, Schwefel, Kolenstoff.

b) durch beim Experimentiren erzeugte Krystalle von: Kupfe
vitriol, Bleinitrat, Kupfernitrat und Schwefel.

Der gegenwärtige Bestand umfasst: Chemikalien, Präparate: 1
Stück, verschiedene Geräte: 192 Stk.

D) Das naturhistorische Cabinet.

Vermerung im Schuljare 1876/7 durch Geschenke.

1. Von Herrn Johann Protzkar, Bürgermeister der königl. Stadt Un
Hradisch, 1 Canis vulpes L. und 1 Perdix graeca.
2. Von Herrn Michael Schenk, Professor des Gymn. 1 Taenia solium
3. Von Herrn Karl Leybold, Professor des Gymn. 1 Stück Marm
platte aus Pompeji.

4. Von Herrn Franz Christof, Telegraphenbeamter der Nordbahn 1 Mus rattus L. (weisse Species).
5. Von Herrn Franz Bank, Hilfsämter-Director beim k. k. Kreisgerichte in Teschen ein Herbarium mit 600 Pflanzen.
6. Von Franz Ritter von Coll, Schüler der VII. Cl. am Gymn. 1 Bacillus Rossii Fabr.
7. Von Victor Nečas, Schüler der V. Cl. am Gymn. 4 Stück Pflanzenversteinerungen.
8. Von Hugo Žiak Schüler der II.b. Cl. am Gymn. 7 Stück Mineralien.
9. Von Wilhelm Walaschek Schüler der II.b. Cl. am Gymn. 1 Taenia solium L.
0. Von Philipp Tobias Schüler der II.b. Cl. am Gymn. 1 Perdix graeca.
1. Von Rudolf Pospišil Schüler der I.b. Cl. am Gymn. 1 Cassis rufa L.
2. Von Eduard Küchler, Schüler der I.a. Cl. am Gymn. 1 Coluber Hungaricus.

Durch Ankauf: Gypsmodelle: 1. Kopf mit Durchschnittsfläche, auf elcher das Gehirn, die geöffnete Nasen-, Schlundkopf- und Kehlkopfhle sichtbar sind. — 2. Die Lungen mit dem Herzen, dessen vordere and abzuheben ist. — 3. Die Zähne in der aufgebrochenen linken nterkieferhälfte, Entwicklung und Bau derselben dargestellt.

Mineralien: 1) 1 Steinsalzkrystall von Wielička. — 2) 1 Onyx is Brasilien. — 3) 1 Aragonitkrystall aus Aragonien. — 4) 1 Quarzystall aus Boretta — 5) 1 Malachit aus Moldawa — 6) 1 Manganituse aus Illefeld in Thüringen. — 7) 6 Drahtkrystallmodelle.

Reparatur: Angeschafft 1 Pinna squamosa.

Die naturhistorische Sammlung enthält enthält gegenwärtig:

a) für Zoologie 3030 Objecte,
b) für Botanik 1785 „ und
c) für Mineralogie 1939 „

Ausserdem 7 Bilderwerke, 3 Reliefkarten, 22 diverse Objecte, 48 kroskopische Thier- und Pflanzenpräparate, 20 Utensilien.

E) Die geographische Lermittelsammlung.

a) Aus dem Lermittelfonde wurde angeschafft: Globus aus der brik Felkl in Prag; Kiepert, Imperium romanum; Sydow, politische rte von Nordamerika; Sydow, politische Karte von Südamerika.

b) Durch Geschenk erworben: vom k. k. Schulbücherverlag: psometrische Uebersichtskarte der österr. ungar. Monarchie.

Diese Lermittelsammlung besteht gegenwärtig aus 56 diverse Karten, 3 Globen u. 4 Atlanten.

F. Der Zeichensaal.

a) Angekauft wurde: Anděl, das geometrische Ornament; Anděl Grundsätze der perspectivischen u. Beleuchtungserscheinungen.

b) geschenkt wurde: von Herrn Johann Protzkar, Bürgermeiste der königl. Stadt Ung.- Hradisch, die Elementar-Zeichenschule vo Grandauer.

Die Lermittelsammlung für den Zeichenunterricht besitzt gege wärtig: 81 Stück diverse Modelle; 2 Hefte Landschaften: a) Sepia- Aquarellschule; 5 Hefte Figurenschule; 4 Werke für Freihandzeichne 156 Zeichenvorlagen von verschiedenen Meistern.

Für die der Anstalt gemachten Geschenke spricht der Direct hiemit den wärmsten Dank aus.

Lermittelfond pro 1876/7.

1. Cassarest von 1875/6	38 fl.	27 k
2. an Aufnamstaxen pro 1876/7	161 „	70
3. an Lermittelbeiträgen pro 1876/7	282 „	—
4. an Taxen für Zeugnis-Duplicate	3 „	—
5. Dotation für das phisik. Cabinet pro 1876 u. 1877 .	400 „	—
6. Dotation für das chem. Laboratorium pro 1876/7 .	100 „	—
7. für sonstige Unterrichtsbedürfnisse pro 1877 . . .	150 „	—
Summe:	1134 fl.	97 k

VII. Maturitätsprüfung.

Zur diesjärigen Maturitätsprüfung meldeten sich alle (15) Schül der VIII. Classe, 14 öffentliche und 1 ausserordentlicher.

Die Themen zu der vom 4. bis 8. Juni abgehaltenen schriftlich Prüfung lauten:

1. Aus dem Latein in's Deutsche: Cic. Tusc. disp. IV. cap. 1. §. 2–
   (Cum multis locis — et carmina.)
2. Aus dem Deutschen ins Latein: Süpfle, Aufgaben zu latein. St übungen. II. I. Nro. 217 u. 218: Sokrates, Selbstverteidigung v Gericht.
3. Aus dem Griechischen ins Deutsche: Plat. Phaed. c. 65: ταῦτ εἰπ ἐπεῖνος bis 116 D.: τριψάτω ὁ ἄνθρωπος.
4. Aus dem Deutschen: Grosse Männer gehören der ganzen Menschh (Joh. v. Müller).

5. Aus der Mathematik: a) Die Grundlinie a eines gleichschenkligen Dreieckes mit dem Basiswinkel β ist nach beiden Seiten um den Schenkel verlängert und die Endpunkte sind dann mit der Spitze verbunden. Wie gross sind die Seiten des neu entstandenen Dreieckes? a. = 15·368 cm; $\beta = 11^0\ 25'\ 36''$.

b) Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten a = 26m und b = 18m, jede ihrer Seitenkanten ist c = 38m. In welchem Abstande von der Spitze ist parallel der Grundfläche ein Schnitt zu legen, der die Pyramide in zwei inhaltsgleiche Stücke teilt?

c) Die Gleichung eines Kreises auf rechtwinklige Coordinaten bezogen sei $x^2 + y^2 = 16$, Die Gleichung einer Geraden sei $y = 2x + s$; es sollen die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser beiden Linien, die Länge der dadurch bestimmten Sene und ihr Abstand vom Mittelpunkte bestimmt werden.

d. $\sqrt[10]{\left(\frac{3x^2 + 3}{x + 3}\right)^7} = 2{\cdot}6390159.$

6. Aus dem Böhmischen: α) für Deutsche: Kaiser Maximilian auf der Martinswand v. A. W. Grube, ins Böhmische zu übersetzen. β Für Slaven: Kterých prospěchů poskytovaly Řekům hry národní?

Da die mündliche Prüfung erst am 26. und 27. Juli stattfindet, werden die Resultate der gesammten Prüfung erst im Programme des nächsten Schuljares bekannt gegeben werden.

VIII. Chronik.

Am 16. September 1876 wurde das Schuljar mit einem feierlichen Gottesdienste eröffnet.

Am 26. September starb Herr Johann Axmann, pens. Leiter der hierstädt. Knabenschule, vorher Lehrer am hies. Real.- u. Ober-Gymn. bez. vormaligen städt. Realschule.

Am 29. October verschied Herr Vincenz Jurenka, Gesanglerer an dieser Anstalt. — Der Leichenfeier der beiden Genannten wonten die Schuljugend, sowie der Lerkörper bei.

Am Namensfeste Sr. k. k. Apostolischen Majestät des Kaisers am 4. October wurde in der Pfarkirche ein solenner Gottesdienst abgehalten, dem die Schuljugend und der Lerkörper beiwonten. Darnach fand im Gymnasialgebäude eine Schulfeier statt, an der sich die k. k. Behörden die Gemeindevertretung und sonst ein zalreiches Publikum der Stadt beteiligten. Dieselbe schloss mit der Absingung der Volkshymne.

Mit h. L. Sch. R. Erl. 16. October. 1876 Z. 25287 wurde der k. k. Gymn. Lehrer Heinrich Götzl unter Zuerkennung des Titels k. k. Professor im Leramte bestätigt.

Am Namensfeste Ihrer Majestät der Kaiserin fand in der Pfarrkirche unter Beteiligung der Anstalt ein feierlicher Gottesdienst statt.

Am 12. December starb nach kurzer Krankheit der Schüler der I. Classe Josef Schwieger.

Am 3. März wurde eine Sterbe-Gedächtnisandacht für weiland Sr. Maj. Kaiser Franz I., sowie am 28. Juni eine solche für weiland Sr. Maj. Kaiser Ferdinand abgehalten; an denselben namen die Schüler mit dem Lerkörper Teil.

Mit h. L. Sch. R. Erl. v. 28. Mai 1877 Z. 12601 wurde dem Director Vincenz Bienert die dritte Quinquennal-Zulage zuerkannt.

Vom 1. bis zum 8. Juni wurde die Leranstalt vom Herrn k. k. Laudesschulinspector Theodor Wolf einer eingehenden Inspection unterzogen.

Am 21. u. 22. Juni besichtigte als Minist. Commissär der k. k. Professor Josef Grandauer den Zeichenunterricht der Anstalt.

Am 14. Juli wurde das Schuljar nach dem vormittägigen Unterrichte mit einem feierlichen Danksage-Amt geschlossen.

IX. Wichtige Erlässe.

1. H. L. Sch. R. Erl. v. 6. November 1876 Z. 27699 regelt die Honarare der geprüften u. ungeprüften Nebenlerer freier Gegenstände.

2. H. Min. Erl. v. 7. Nov. 1876 Z. 16861 (intim. m. h. L. Sch. R. Erl. v. 13. Nov. 1876 Z. 28493) gestattet, dass Schüler auf Grund des Studienerfolges in der Vorbereitungsclasse schon im ersten Sem. der ersten Gymn. Classe von der Schulgeldzalung befreit werden.

3. H. Min. Erl. v. 27. Nov. 1876 Z. 18740 (intim. m. h. L. Sch. R. Erl. v. 11. December 1876 Z. 30871) erteilt Weisungen über die praktische Ausbildung der Leramts-Canditaten.

4. H. Min. Erl. v. 25. Nov. 1876 Z. 18430 (intim. m. h. L. Sch. R. Erl. v. 9. Dec. 1876 Z. 30585) genemigt die Eröffnung einer Vorbereitungsclasse am hierort. Gymnasium vom Schuljahre 1877/8 angefangen.

5. H. Min. Erl. v. 23. März 1877 Z. 4231 (intim. m. h. L. Sch. R. Erl. v. 3. April 1877 Z. 7793) bestimmt, dass Schüler, welche die V. u. VI. Klasse weder als öffentliche Schüler noch als Privatisten

durchgemacht haben, sich auch aus Naturgeschichte der Maturitätsprüfung zu unterziehen haben.

6. H. L. Sch. R. Erl. v. 22. Mai 1877, Z. 11774 gibt bekannt die definive Verteilung des geographischen Unterrichtsstoffes für die II. u. III. Classe.

X. Unterstützung dürftiger Schüler.

7 Schüler und zwar: Theobald Zochlar II. Cl. Wenzel Burschik V. Cl.; Karl Mínařík VI. Cl.; Paul Dráhorád VII. Cl.; Karl Neumann VII. Cl.; Sigmund Brief VIII. Cl.; u. Johann Patka VIII. Cl. genossen Stipendien im Gesammtbetrage von 470 fl. ö. W.

Mit den Zinsen der hierstädtischen Protzkar-Stiftung wurden 6 dürftige Schüler mit dem Betrage von 36 fl. über Vorschlag des Lerkörpers beteilt.

XI. Rechenschaftsbericht

des

Studenten-Unterstützungsvereines in Ung. Hradisch sammt dem Mitglieder-Verzeichnisse.

Der Verein, für dessen Zustandekommen schon im December 1868 der damalige Gymnasialdirector H. Adolf Weichselmann und der nunmerige k. k. Oberfinanzrat in Brünn, H. Rudolf Sowa, die einleitenden Schritte getan hatten, trat im Juni 1870 ins Leben und betrug in der am 1. September 1870 abgehaltenen Generalversammlung die Zal der Mitglieder 94. Der Zweck dieses Vereins ist laut §. 1 der Statuten: die Unterstützung dürftiger und würdiger Schüler des Gymnasiums und die Bildung eines Fonds zur Sicherung dieses Zweckes. — Unterstützt wurden die Schüler teils mit Kleidern, teils mit Kost- und Schulgeld, meistens aber mit baren Beträgen, welche ihnen järlich zweimal eingehändigt wurden. Die Einnamen waren meistens ordentliche Beiträge der Mitglieder, oder auch ausserordentliche, unter denen besonders die Erträge der vom Gymnasium järlich veranstalteten Akademien zu nennen sind.

Die Einnamen im abgelaufenen bürgerlichen Jare (1876) bezifferten sich mit 375 fl. 17 kr. An Unterstützungen wurden verausgabt 310 fl., so dass 65 fl. 17 kr. für das nächste Jar übertragen werden konnten. Der Gründungsfond hat die Summe von 298 fl. 75 kr. erreicht.

Vincenz Bienert.
Präses.

Josef Indrák.
Cassier.

Mitglieder-Verzeichnis.

Fräulein Adametz Marie, Private.
Herr Anderle Franz, k. k. Landesgerichtsrat.
„ Aulich Robert, Hausbesitzer und Sparcassadirector.
„ Bienert Vincenz, k. k. Gymn.-Dir. und Bez.-Schulinspector.
„ Braun Hermann, Geschäftsmann.
„ Braun Josef, Geschäftsmann.
„ Braun Ignaz, Schnittwarenhändler.
„ v. Coll Franz, k. k. Major in Pension.
„ Czibulka Ignaz, k. k. Landesgerichtsrat.
„ Donath Heinrich, Tabakdistrictsverleger.
„ Donhoffer Gustav v., Privatier.
„ Fried Jakob, Spediteur.
„ Fried Joachim, Hausbesitzer.
„ Fröhlich Moritz, Dr. med.
„ Fürst Emanuel, Handelsmann u. Malzfabriksbesitzer.
„ Gajdeczka Josef, k. k. Gymn.-Professor.
„ Gallia Wilhelm, Fleischer.
„ Ganzwohl Josef, k. k. Notar, mähr. Landtagsabgeordnete etc
„ Götzl Heinrich, k. k. Gymn.-Professor.
„ Glaser Salomon, Hausbesitzer.
„ Hahn Josef, Geschäftsmann.
„ Halatschka Anton, k. k. Hofrat u. Kreisgerichtspräsident.
„ Herodek Alois, k. k. Ratssecretär.
„ Indrák Josef, k. k. Gymn.-Professor.
„ Janauer Albin, Hausbesitzer und Cafeesieder.
„ Janík Franz, städt. Cassier.
„ Jokl Heinrich, Lederhändler.
„ Jokl Jakob, Schneider.
„ Kaiser Johann, J.U.Dr., mähr.-schles. Landesadvocat.
„ Konarovský Ferdinand, Finanzwachcommissär.
„ Kopřiva Karl, k. k. Notar in Ung.-Ostrau.
„ Kornherr Karl, städt. Controllor.
„ Kračelík Leopold, Buchhändler.
„ Kratochvil Ferdinand, k. k. Oberfinanzrat.
„ Krebs Leopold. J.U.Dr., Advocatursconcipient.
„ Kříváček Rudolf, Handelsmann und Hausbesitzer.
„ Kučera Eduard, k. k. Gymn.-Professor.
„ Küchler Franz, Dr. med., Brunnenarzt in Luhatschowitz.
„ Künstler Franz, Notariatsconcipient.
„ Löw Bernhard, Geschäftsmann in Bisenz.

Herr Löw Michael, Geschäftsmann in Bisenz.
„ Löw Bernhard, Grundbesitzer in Altstadt.
„ Löwy Abraham, Spediteur.
„ Lukasch Johann, k. k. Gymn.-Professor.
„ Mannaberg Adolf, Med. Dr. u. Stadtphysikus.
„ Menzilles Julius, Geschäftsmann.
„ Müller Johann, Schnittwaarenhändler.
„ Neuber Eduard, k. k. Finanzbezirkscommissär.
„ Nitsch Heinrich, k. k. Notar in Göding.
„ Panek Josef, Hausbesitzer und Handelsmann.
„ Perútka Franz, k. k. Gymn.-Professor.
„ Pretzkar Johann, Bürgermeister der königl. Stadt Hradisch, mähr. Landtagsabgeordneter, Besitzer des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone und Sparcassadirectionsvorstand.
„ Radnitzký Johann, k. k. Bezirkshauptmann.
„ Richter Wilhelm, k. k. Haupt-Steuereinnehmer.
„ Riedl Adolf, k. k. Finanzrat.
„ Rosenbaum Simon, Compagnon und Fabriksgeschäftsleiter.
„ Rössner Johann, Gewerksarzt in Waltersdorf.
„ Rubý Josef, Hauptschullehrer, Besitzer d. goldenen Verdienstkreuzes.
„ Satzke Ernest, k. k. Landesgerichtsrat.
„ Schenk Michael, k. k. Gymn.-Professor, u. em. Director.
„ Schlögl Ignaz, Hausbesitzer und Gemeinderat.
„ Schmidt Ignaz, Hausbesitzer und Gemeinderat.
„ Schneider Ferdinand, k. k. Bezirksobercommissär.
Fräulein Schulmeister Caroline, Hausbesitzerin.
Herr Slunečko Mathias, Hausbesitzer.
„ Smíta Alois, Dr. med., Kreisphysikus.
„ Sonntag August, Hausbesitzer in Velehrad.
„ Stern Josef, Privatlehrer.
„ Stiasny Mathias, Forstdirector in Rožnau.
„ Stotschek Damian, Oberingenieur.
„ Strauss E., Bräuhauspächter.
„ Strauss Hermann, Hausbesitzer und Geschäftsmann.
„ Sträussler Moritz, Liqueur- und Essigfabrikant.
„ Strommer Josef, k. k. Gymn.-Professor.
„ Svrček Karl, städt. Secretär.
„ Sowa Rudolf, k. k. Oberfinanzrat in Brünn.
„ Tauss Salomon, Wundarzt.
„ Tkač Ignaz, k. k. Professor.

Herr Tögel Andreas, k. k. Steueramtscontrollor.
„ Tomanetz A., k. k. Finanzwachcommissär in Pension.
„ Trawniczek Leopold, Landesingenieur und Hausbesitzer.
„ Weissmann Jakob, Goldarbeiter.
„ Wieland Ferdinand, k. k. Oberlandesgerichtsrat und Staatsanwalt.
„ Winkler Josef, k. k. Staatsbuchhalter in Pension.
„ Winter Bernhard, Hausbesitzer.
„ Vodička Adalbert, Pfarrer.
„ Wolf Ludwig, Oberwundarzt.
„ Wolf Löw, Geschäftsmann in Bisenz.
„ Zauder Johann, Hausbesitzer und Gemeinderat.
„ Ziak Johann, k. k. Landesgerichtsrat in Pension.

Der Verein zählt somit 90 Mitglieder.

Allen Woltätern wird hiemit im Namen der dürftigen Schüler der wärmste Dank ausgesprochen.

XII. Voranzeige für das Schuljahr 1877/8.

Die Eröffnung des Schuljares 1877/8 findet am 16. September l. J. Vormittags mit einem feierlichen Hochamte in der Pfarrkirche statt. Die Aufname der Schüler erfolgt am 13., 14. und 15. September von 8—12 Uhr Vorm., und von 2—3 Uhr Nachm. in der Directions-Kanzlei. Die Schüler haben bei der Anmeldung in Begleitung der Eltern oder deren Stellvertreter zu erscheinen.

Jene Schüler, welche in die erste Classe aufgenommen zu werden wünschen, haben:

1. Durch den Tauf- oder Geburtsschein nachzuweisen, dass sie das neunte Lebensjar bereits zurückgelegt haben.

2. Sich einer im Sinne des h. Min. Erl. v. 14. März 1870, Z. 2370 abzuhaltenden Aufnamsprüfung zu unterziehen. Hierbei wird gefordert: Jenes Mass von Wissen in der Religion, welches in den ersten 4 Jarescursen der Volksschule erworben werden kann. Fertigkeit im Lesen und Schreiben der Unterrichtssprache und eventuell der lateinischen Schrift, Kenntniss der Elemente aus der Formenlere der Unterrichtssprache, Fertigkeit im Analysiren einfacher bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie und Interpunction und richtige Anwendung derselben beim Dictandoschreiben, Uebung in den 4 Grundrechnungsarten in ganzen Zalen.

Die Aufnamsprüfungen für die erste Classe finden am 14. und 15. September, die sonstigen Aufnams-, Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen für die übrigen Classen am 17. September (Montags) statt.

Jeder neu eintretende Schüler hat eine Aufnamstaxe von 2 fl. 10 kr., ausserdem jeder Schüler einen Lermittelbeitrag von 1 fl. zu entrichten.

Kundmachung!

Seiner Excellenz der Herr k. k. Minister für Cultus und Unterricht hat mit dem Erlasse vom 25. November 1876, Z. 18439 genemigt, dass am k. k. Real- und Obergymnasium in Ung.-Hradisch mit Beginn des Schuljares 1877/8 eine Vorbereitungsclasse eröffnet werde, welche zum Zwecke hat: Schülern namentlich slavischer Zunge, die Gelegenheit zu entsprechender Vorbildung für das Gymnasialstudium, insbesondere aber zur Uebung im Gebrauche der deutschen Sprache zu bieten und sie zu befähigen, im nächstfolgenden Schuljare dem in deutscher Sprache zu ertheilenden Unterrichte in der ersten Gymnasialclasse ungehindert zu folgen.

Zum Eintritte in diese Classe ist mindestens das zurückgelegte achte Lebensjar und der Nachweis jener Kenntnisse erforderlich, die in der dritten Volksschulclasse erworben werden können. Eltern und Vormünder, welche ihre Söne oder Mündel in diese Vorbereitungsclasse eintreten zu lassen beabsichtigen, haben diese Absicht in der Zeit vom 8. bis zum 15. September l. J. der Direction des k. k. Real- und Obergymnasiums in Ung.-Hradisch bekannt zu geben, worauf sie die weiters nötigen Auskünfte erhalten werden.

Ung.-Hradisch im Juli 1877.

K. k. Gymnasialdirection.

Fig. 1.

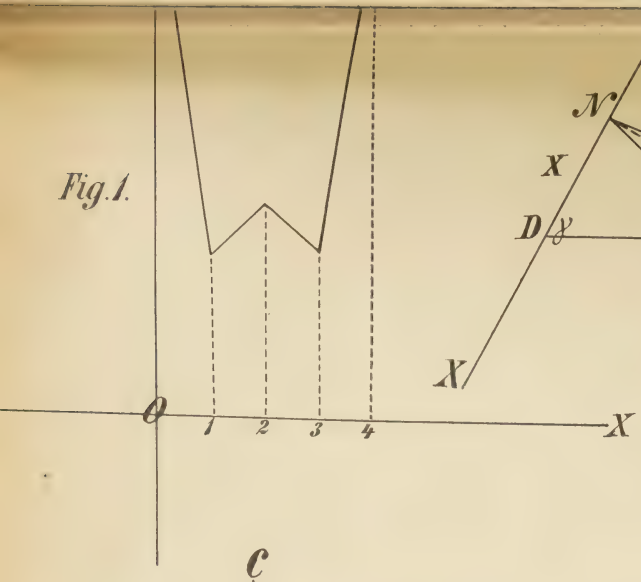


Fig. 2.

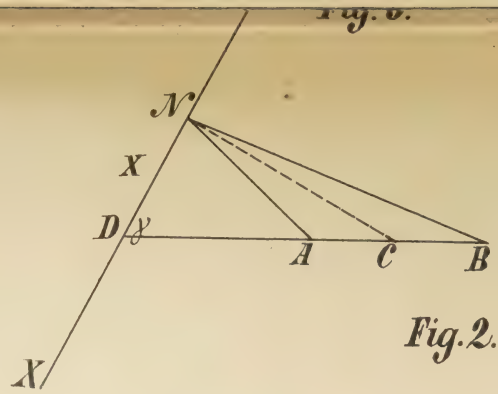


Fig. 3.

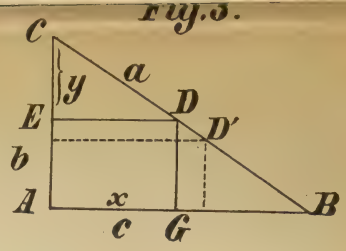
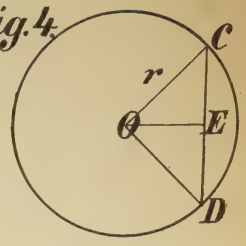


Fig. 4.



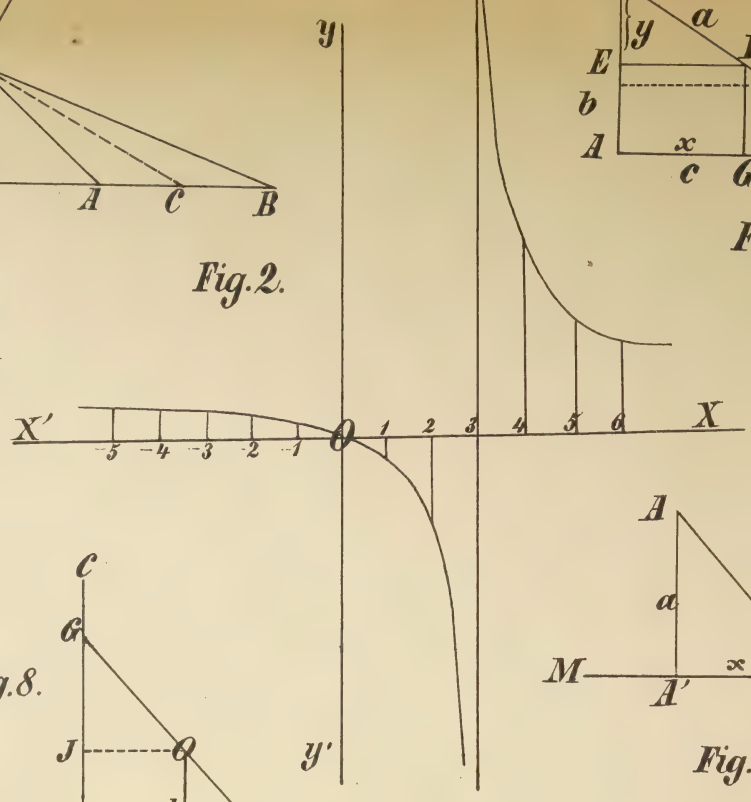


Fig. 6.

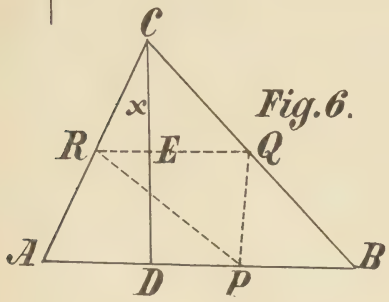


Fig. 8.

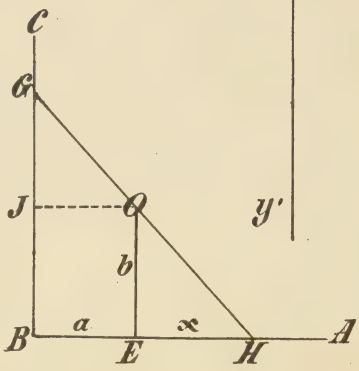


Fig. 7.

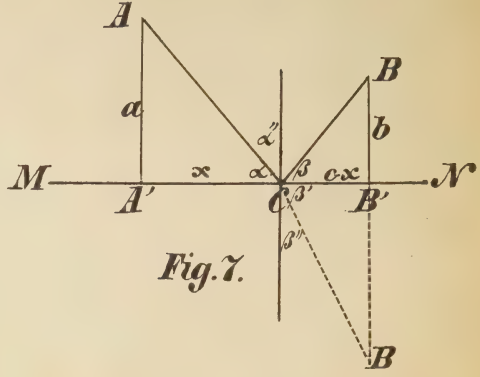


Fig. 11.

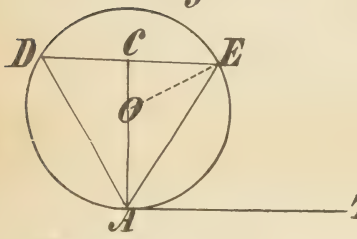


Fig. 10.

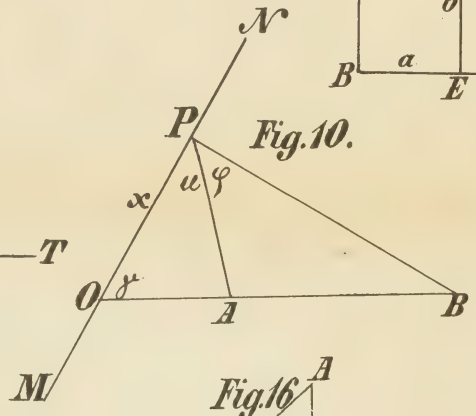


Fig. 9.

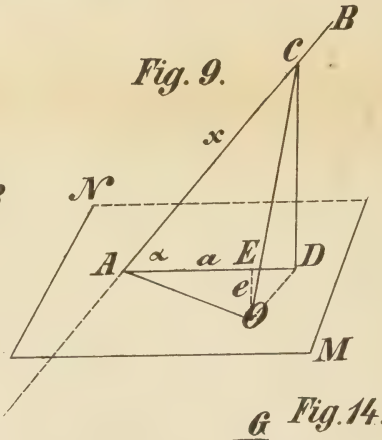


Fig. 12.

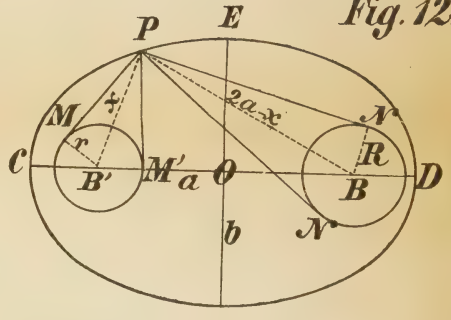


Fig. 15.

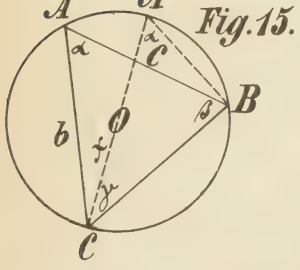


Fig. 16.

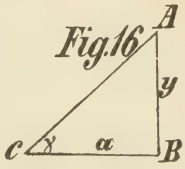


Fig. 14.

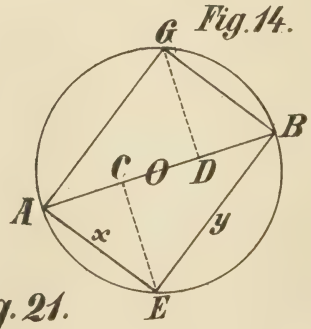


Fig. 19.

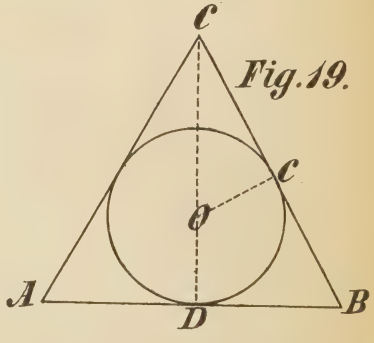


Fig. 18.

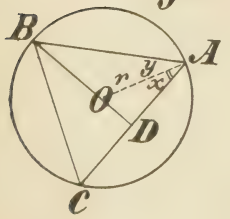


Fig. 13.

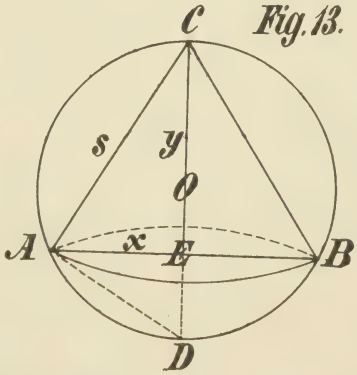


Fig. 21.

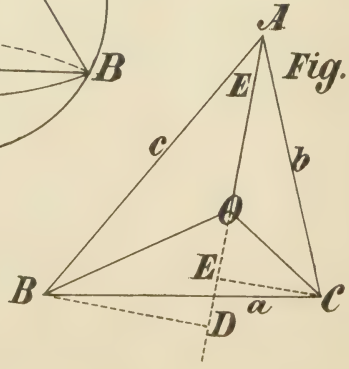


Fig. 17.

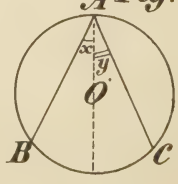


Fig. 20.

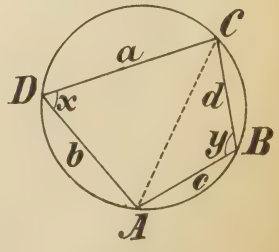
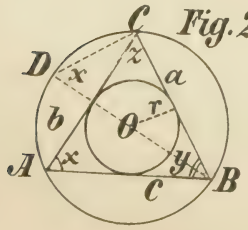


Fig. 22.



Artistisch. Institut von Karl Prochaska in Teschen.

JAHRESBERICHT

DES

REALGYMNASIUMS ZU STRALSUND

OSTERN 1894.

Im Namen des Lehrer-Kollegiums

herausgegeben

von dem Direktor

Prof. Dr. THÜMEN.

1. Über die Lösung von Gleichungen durch bestimmte Integrale. Vom Oberlehrer Dr. Franz Gauger.
2. Schul-Nachrichten. Vom Direktor.

STRALSUND

1894

DRUCK DER KÖNIGLICHEN REGIERUNGS-BUCHDRUCKEREI.

94. Progr.-No. 151.

Über die Lösung von Gleichungen durch bestimmte Integrale.

Vom Oberlehrer Dr. Franz Gauger.

Dr. J. D. G. Jacobi, Professor der Mathematik zu Königsberg, hat im zweiten Bande es Crelleschen Journales 1827 eine von Parseval — Mémoires des savans étrangers Band I 806 — angefangene Untersuchung über die Darstellung der Wurzeln einer Gleichung durch estimmte Integrale wieder aufgenommen und vervollständigt, doch setzt er dabei die Reellität er Koefficienten des Gleichungspolynoms voraus. Es blieb daher noch die Frage offen, wie diese ntegrale sich gestalten würden, wenn die Koefficienten komplexe Werte annehmen. Eine darauf ezügliche Untersuchung wurde für das Jahr 1881/82 von der Universität Greifswald als Preis-ufgabe gestellt. Die von Dr. Richert eingelieferte Lösung — veröffentlicht durch die Inaugural-issertation: „Über die Verallgemeinerung des Jacobischen Ausdruckes der Wurzeln einer Gleichung urch bestimmte Integrale“ Greifswald 1882 — hat nun zwar eine Verallgemeinerung gebracht, och wurde von der philosophischen Fakultät darauf hingewiesen, dass die in obiger Arbeit ewählte Lösungsart nicht die einfachste sei. Neben das ursprüngliche Polynom $f(z) = X + i\,Y$ at nämlich der Verfasser das konjugierte Polynom $f_1(z) = X - i\,Y$ gesetzt und durch Kom-ination beider die Lösung ausgeführt. Die Rechnung hat hierdurch an Übersichtlichkeit verloren, uch enthalten die Resultate neben Grössen, die von f(z) herrühren, noch ebensoviele, die von der ülfsfunktion $f_1(z)$ herstammen.

Zwar hatte sich der Verfasser „vorbehalten“, bei Gelegenheit auf diesen Gegenstand ırückzukommen, da mir jedoch nicht bekannt ist, dass dies bisher geschehen sei, so gebe ich ı dem Folgenden die einfachere Lösung. Ich schliesse mich dabei im Wesentlichen der ichertschen Bezeichnungsweise an.

I.

Die Gleichung

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots . c_n = 0. \qquad 1.$$

ann n von einander verschiedene Wurzeln

$$z_1, z_2, \ldots . z_n$$

aben, sodass

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots . . (z - z_n) \qquad 2.$$

ist.

Setzen wir mit Jacobi die Koefficienten c als reell voraus, so können die n Wurzeln entwed
auch reell sein, oder wenn einige von ihnen komplex sein sollten, so müssen auch die konjugie
komplexen Grössen als Wurzeln in die Gleichung eingehen. Nunmehr seien die Koefficient
c komplex, so lässt sich über die Art der Wurzeln nichts spezielles mehr aussagen.

Wir stellen uns

$$z = x + i\,y = r\,(\cos\rho + i\,\sin\rho) = r\,e^{i\rho} \qquad 3.$$

in üblicher Weise als Punkt in einer (x y)Ebene vor und

$$f(z) = X + i\,Y = R\,(\cos\zeta + i\,\sin\zeta) = R\,e^{i\zeta} \qquad 4.$$

als entsprechenden Punkt in einer anderen (XY)Ebene. Für die Wurzelwerte gelte:

$$z_\lambda = x_\lambda + i\,y_\lambda = r_\lambda(\cos\rho_\lambda + i\,\sin\rho_\lambda) = r_\lambda\,e^{i\rho_\lambda} \qquad 5.$$

worin λ die Werte von $1 \ldots\ldots n$ annehmen kann. Durch den grösseren Index sei hier zugle
der grössere Mod der Wurzel angedeutet, also

$$r_1 < r_2 < r_3 \cdot \ldots \cdot < r_p < r_{p+1} \cdot \ldots \cdot < r_n .$$

Wir schlagen um den Koordinatenanfang in der (xy)Ebene zwei konzentrische Kreise mit
Radien Mod z_p und Mod z_{p+1}. In diesem Kreisringe denken wir z variabel, schliessen
jedoch von den Peripherieen aus, d. h. also

$$r_p < r < r_{p+1}$$

Da sich f(z) als Produkt darstellt, so liegt es nahe den lg f(z) zu untersuchen. Innerhalb
Ringgebietes ist f(z) endlich, stetig und eindeutig und auch von 0 verschieden, also auch lg f
wenn man den Zweig wählt, für den lg 1 = 0 ist. Wir suchen nun lg f(z) in eine Potenzre
zu entwickeln. Es ist

$$f(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_p) \cdot (z - z_{p+1}) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \qquad 6$$

$$= z^p\left(1 - \frac{z_1}{z}\right)\left(1 - \frac{z_2}{z}\right) \ldots \left(1 - \frac{z_p}{z}\right)(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdots z_n \left(1 - \frac{z}{z_{p+1}}\right)$$
$$\left(1 - \frac{z}{z_{p+2}}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

$$\lg f(z) - \lg z^p = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdots z_n\right] + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \lg\left(1 - \frac{z_\lambda}{z}\right) + \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \lg\left(1 - \frac{z}{z_\lambda}\right)$$

Hierin können wir nun für die lg Reihen einführen, da durch obige Umformung die Konver
der Reihen gesichert ist. Man sieht, dass bis zum Index p die Entwickelungen nach negat
Exponenten, darüber hinaus nach positiven Exponenten von z fortschreiten werden.

Da $\lg(1 - \xi) = -\left(\frac{\xi}{1} + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} + \ldots\right)$ für Mod $\xi < 1$, so ist

$$\lg f(z) - \lg z^p = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdots z_n\right] - \frac{1}{z}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda - \frac{1}{2z^2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda^2 - \ldots\ldots$$
$$- z\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \frac{1}{z_\lambda} - \frac{z^2}{2}\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \frac{1}{z_\lambda^2} - \ldots\ldots$$

Um in den Koefficienten der z die reellen und imaginären Teile zu kennzeichnen, setze man

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda^q &= \Xi_q + i\,H_q \text{ und} \\ \sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n} \frac{1}{z_\lambda{}^q} &= \Xi'_q + i\,H'_q \end{aligned}\right\} \quad 8.$$

so ist

$$9. \qquad \lg f(z) - \lg z^p = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1} \cdot z_{p+2} \cdot \ldots \cdot z_n\right] - \frac{1}{z}\left(\overset{p}{\underset{1}{\Xi_1}} + i\overset{p}{\underset{1}{H_1}}\right) - \frac{1}{2z^2}\left(\overset{p}{\underset{1}{\Xi_2}} + i\overset{p}{\underset{1}{H_2}}\right) \ldots$$

$$- z\left(\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_1}} + i\overset{n}{\underset{p+1}{H'_1}}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_2}} + i\overset{n}{\underset{p+1}{H'_2}}\right) \ldots$$

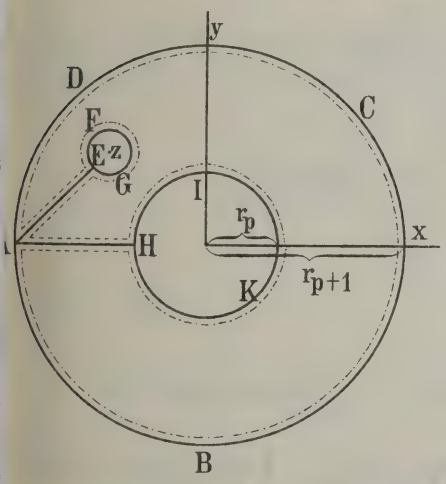
II.

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$\lg f(z) - \lg z^p = F(z)$$

und suchen F(z) auf eine zweite Weise in eine Potenzreihe zu entwickeln. Diese Funktion ist ebenfalls innerhalb des vorher festgesetzten Kreisringes synektisch. Wir untersuchen das Integral:

$$\int \frac{F(w)}{w - z} dw$$



w sei variabel innerhalb des Kreisringes, dann hat die Funktion unter dem Integralzeichen einen Ausnahmepunkt für $w = z$. Als Integrationskurve wollen wir eine geschlossene Kurve festsetzen, innerhalb deren die Funktion unter dem Integralzeichen endlich, stetig und eindeutig bleibt. Zu dem Zwecke schlagen wir um den Ausnahmepunkt einen Kreis mit dem Radius t und schliessen ihn von dem Integrationsgebiete aus. Ferner schlagen wir von dem äusseren Grenzkreise des Ringgebietes eine grade Brücke zum inneren Grenzkreise, sowie eine zweite vom äusseren Grenzkreise zu dem Kreise um den Punkt $w = z$ (siehe die Figur). Alsdann integriren wir, wie die Figur andeutet, über eine geschlossene Kurve zusammengesetzt aus Kreisen und graden Linien, welche den Grenzkreisen und Brücken benachbart sind. Cauchy's Fundamentaltheorem von den analytischen Funktionen ergiebt dann die Gleichung:

$$J(ABCDA) + J(AE) + J(EFGE) + J(EA) + J(AH) + J(HJKH) + J(HA) = 0$$

Die Integrale hin und zurück über die Brücken sind gleich, aber von entgegengesetzten Vorzeichen, fallen also aus. Es bleibt $J(ABCDA) + J(EFGE) + J(HJKH) = 0$.

Als positive Integrationsrichtung sei die im entgegengesetzten Sinne der Drehung des Uhrzeigers festgesetzt. Also ist

$$\int_{r_p+1}\frac{F(w)dw}{w-z}+\int_{t}\frac{F(w)dw}{z-w}+\int_{r_p}\frac{F(w)dw}{z-w}=0 \text{ oder}$$

$$\int_{t}\frac{F(w)dw}{w-z}=\int_{r_p+1}\frac{F(w)dw}{w-z}+\int_{r_p}\frac{F(w)dw}{z-w}$$

Wir untersuchen zuerst das linke Integral, wir setzen

$$w-z=te^{i\theta}$$

so ist $dw=ite^{i\theta}d\theta$ also ergiebt sich

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{F(z+te^{i\theta})\,ite^{i\theta}d\theta}{te^{i\theta}}=i\int_{-\pi}^{+\pi}F(z+te^{i\theta})\,d\theta$$

$$=i\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F(z+te^{i\theta})-F(z)\right]d\theta+i\int_{-\pi}^{+\pi}F(z)$$

Jetzt lassen wir den Radius t unendlich klein werden, so ergiebt sich wegen der Stetigkeit d Funktion F als Integralwert

$$2\pi i\,F(z). \qquad \text{Daher ist:}$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{r_p+1}\frac{F(w)dw}{w-z}+\int_{r_p}\frac{F(w)dw}{z-w}\right\}$$

Im ersten Integrale rechts ist Mod w > Mod z, also lässt sich entwickeln

$$\frac{1}{w-z}=\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{z^q}{w^{q+1}}$$

Im zweiten Integrale ist Mod z > Mod w, also

$$\frac{1}{z-w}=\sum_{q=0}^{q=\infty}\frac{w^q}{z^{q+1}} \qquad \text{Daraus ergiebt sich}$$

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{q=0}^{q=\infty}\int_{r_p+1}\frac{F(w)dw}{w^{q+1}}z^q+\sum_{q=0}^{q=\infty}\int_{r_p}F(w)\,w^q\,dw\,\frac{1}{z^{q+1}}\right\} \text{ oder}$$

$$F(z)=\sum_{q=0}^{q=\infty}a_q z^q+\sum_{q=1}^{q=\infty}\frac{b_q}{z^q} \qquad \textbf{10.} \qquad \text{wo}$$

$$a_q=\frac{1}{2\pi i}\int_{r_p+1}\frac{F(w)\,dw}{w^{q+1}} \text{ und } b_q=\frac{1}{2\pi i}\int_{p}F(w)w^{q-1}dw$$

Dieses ganz allgemeine Theorem rührt von Laurent her — Briot et Bouquet, Theorie des fonctio doublement périodiques No. 30 — und ist von Briot und Bouquet an der bezeichneten Stelle

etwas anderer Weise wie hier entwickelt worden. Es besagt, dass wenn F(w) innerhalb eines Kreisringes synektisch ist und z innerhalb desselben Ringes liegt, sich F(z) in eine Potenzreihe entwickeln lässt, welche nach steigenden und fallenden Potenzen von z fortschreitet.

III.

Die beiden in 9. und 10. entwickelten Potenzreihen sind für das vorgeschriebene Ringgebiet unbedingt konvergent und stetig und müssen für alle zulässigen Werte von z übereinstimmen, daraus folgt, dass die Koefficienten gleich hohen Potenzen dieselben sein müssen, also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r_p} w^{q-1}(\lg f(w) - \lg w^p)\,dw = -\frac{1}{q}\left(\underset{1}{\overset{p}{\Xi}}_q + i\,\underset{1}{\overset{p}{H}}_q\right) \qquad 11.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r_{p+1}} \frac{\lg f(w) - \lg w^p}{w^{q+1}}\,dw = -\frac{1}{q}\left(\underset{p+1}{\overset{n}{\Xi'}}_q + i\,\underset{p+1}{\overset{n}{H'}}_q\right) \qquad 12.$$

Für den Fall $q = o$ ergiebt die Vergleichung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{r_{p+1}} \frac{\lg f(w) - \lg w^p}{w}\,dw = \lg\left[(-1)^{n-p} z_{p+1}\cdot z_{p+2}\cdots z_n\right] \qquad 13.$$

Wir wollen nun in diesen Integralen, um auch auf der linken Seite die reellen und imaginären Teile zu trennen, Polarkoordinaten einführen. Dann ist zu setzen:

$$14.\quad \begin{cases} w = r\,e^{i\rho} \text{ wo } r_p < r < r_{p+1} & \text{also} \\ dw = i\,r\,e^{i\rho}\,d\rho & \text{und} \\ \lg w^p = p\lg w = p\lg r + i\,p\,\rho & \text{Ferner ist} \\ f(w) = R\,e^{i\zeta} & \text{also} \\ \lg f(w) = \lg R + i\,\zeta \end{cases}$$

Setzt man diese Werte ein in das Integral der Gleichung 11., so verwandelt sich dasselbe in

$$\frac{r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{iq\rho}\left(\lg R - p\lg r + i\,(\zeta - p\rho)\right)d\rho$$

Da hierin $p\lg r$ konstant in Bezug auf ρ ist und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{iq\rho}\,d\rho = \int_{-\pi}^{+\pi}(\cos p\rho + i\sin q\rho)\,d\rho = 0 \text{ für } q > 0$$

ist, so fällt das zweite Glied aus und Gleichung 11. nimmt die Form an:

$$\frac{r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\lg R\cos q\rho - (\zeta - p\rho)\sin q\rho + i\left[(\zeta - p\rho)\cos q\rho + \lg R\sin q\rho\right]\right\}d\rho$$

$$= -\frac{1}{q}\left(\underset{1}{\overset{p}{\Xi}}_q + i\,\underset{1}{\overset{p}{H}}_q\right)$$

Komplexe Grössen können aber nur gleich sein, wenn ihre reellen und imaginären Teile übereinstimmen, also muss sein:

$$\left.\begin{aligned} \overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}_q &= -\frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\lg R\cos q\rho - (\zeta - p\rho)\sin q\rho\}\,d\rho \\ \overset{p}{\underset{1}{H}}_q &= -\frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{(\zeta - p\rho)\cos q\rho + \lg R\sin q\rho\}\,d\rho \end{aligned}\right\} \quad 15.$$

In diesen Formeln lassen sich noch zwei Integrale ausführen. Wir erhalten durch partielle Integration:

$$\int \rho \sin q\rho\, d\rho = -\frac{\rho\cos q\rho}{q} + \frac{1}{q}\int \cos q\rho\, d\rho$$

$$= -\frac{\rho\cos q\rho}{q} + \frac{\sin q\rho}{q^2} \qquad \text{Also ist}$$

$$16.\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \rho \sin q\rho\, d\rho = \pm\frac{2\pi}{q},$$ wo das obere Zeichen gilt, wenn q ungrade, das untere Zeichen, wenn q grade ist.

In derselben Weise ergiebt sich partiell integriert:

$$\int \rho\cos q\rho\, d\rho = \frac{\rho\sin q\rho}{q} - \frac{1}{q}\int \sin q\rho\, d\rho$$

$$= \frac{\rho\sin q\rho}{q} + \frac{\cos q\rho}{q^2}$$

Führt man auch hier die Grenzen ein, so erhält man für beliebiges q

$$17.\quad \int_{-\pi}^{+\pi} \rho\cos q\rho\, d\rho = 0. \qquad \text{Nunmehr ist}$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{p}{\underset{1}{\Sigma}}_q &= \mp\frac{p\,q}{n} r^q - \frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\lg R\cos q\rho - \zeta\sin q\rho\}\,d\rho \qquad 18. \\ \overset{p}{\underset{1}{H}}_q &= -\frac{q r^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\{\zeta\cos q\rho + \lg R\sin q\rho\}\,d\rho \qquad 19. \end{aligned}\right\} \quad r_p < r < r_{p+1}$$

Das Integral der Gleichung 12. verwandelt sich durch die Werte 14. in

$$\frac{1}{2\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\lg R - p\lg r + i(\zeta - p\rho)}{e^{iq\rho}}\, d\rho$$

Hierin ist wieder $p\lg r$ konstant in Bezug auf ρ und

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-iq\rho} = \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos q\rho - i\sin q\rho)\, d\rho = 0 \text{ für } q > 0.$$

Also nimmt die Gleichung 12. die Form an:

$$\frac{1}{2\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\lg R\cos q\rho+(\zeta-p\rho)\sin q\rho+i\left[(\zeta-p\rho)\cos q\rho-\lg R\sin q\rho\right]\right\}d\rho=$$
$$-\frac{1}{q}\left(\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}}+i\overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}}\right)$$

Die Vergleichung der reellen und imaginären Teile ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}}&=-\frac{q}{2\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\lg R\cos q\rho+(\zeta-p\rho)\sin q\rho\right\}d\rho\\ \overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}}&=-\frac{q}{2\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{(\zeta-p\rho)\cos q\rho-\lg R\sin q\rho\right\}d\rho\end{aligned}\right\}\ \textbf{20.}$$

Also mit Berücksichtigung der Integrale 16. und 17.

$$\left.\begin{aligned}\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}}&=\pm\frac{pq}{nr^q}-\frac{q}{2\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\lg R\cos q\rho+\zeta\sin q\rho\right\}d\rho & &\textbf{21.}\\ \overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}}&=-\frac{q}{2\pi r^q}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\zeta\cos q\rho-\lg R\sin q\rho\right\}d\rho & &\textbf{22.}\end{aligned}\right\}\ r_p<r<r_{p+1}$$

Nun muss noch eine entsprechende Rechnung für die Gleichung 13. durchgeführt werden. Das Integral aus 13. ergiebt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\lg R-p\lg r+i(\zeta-p\rho)\right\}d\rho$$

Das zweite Glied fällt diesmal nicht aus, da

$$\int_{-\pi}^{+\pi}d\rho=2\pi,$$

dagegen verschwindet das letzte Glied, da

$$\int\rho\,d\rho=\frac{\rho^2}{2}\quad\text{also}\quad\int_{-\pi}^{+\pi}\rho\,d\rho=0.$$

Da nun nach 5.

$$z_{p+1}z_{p+2}\cdots z_n=r_{p+1}r_{p+2}\cdots r_n e^{i(\rho_{p+1}+\rho_{p+2}+\cdots\rho_n)}$$

so ergiebt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\lg R+i\zeta\right\}d\rho=p\lg r+\lg\left[(-1)^{n-p}r_{p+1}r_{p+2}\cdots r_n\right]+i\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n}\rho_\lambda$$

Sei $z_{p+1}z_{p+2}\cdots z_n=g+ih$ **23.**

so ist $$\sum_{\lambda=p+1}^{\lambda=n}\rho_\lambda=\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{g}$$

Nach Vergleichung der reellen und imaginären Teile ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \, d\rho &= 2\pi \lg\left[(-1)^{n-p} r^p r_{p+1} \cdot r_{p+2} \cdots r_n\right] \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \, d\rho &= 2\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{h}{g} \end{aligned}\right\} \quad r_p < r < r_{p+1} \qquad 24.$$

IV.

Um Formeln zu erlangen, welche für Punkte z innerhalb des kleinsten und ausserha des grössten Wurzelkreises Geltung haben, kann man die schon erhaltenen spezialisieren. W legen p bestimmtere Zahlenwerte bei.

Erster Fall: $0 < r < r_1$. Aus der Gleichung 6. ersieht man, dass in diesem Falle n $p = 0$ gesetzt zu werden braucht. Die lg der Faktoren in 7. lassen sich dann nur nach Potenz von z mit positiven Exponenten entwickeln. Die Koefficienten der Potenzen mit negativen E ponenten in 9. müssen der Null gleich sein, also

$$\overset{p}{\underset{1}{\Xi}}_q + i \overset{p}{\underset{1}{H}}_q = 0 \text{ d. h. } \overset{o}{\underset{1}{\Xi}}_q = 0 \text{ und } \overset{o}{\underset{1}{H}}_q = 0$$

Dies ist nur möglich, wie man aus 18. und 19. sehen kann, wenn

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \sin q\rho \, d\rho \text{ und}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \cos q\rho \, d\rho = -\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho \text{ ist.}$$

Dann ergiebt sich aus 21. und 22.

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{\underset{1}{\Xi'}}_q &= -\frac{q}{\pi r^q} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = -\frac{q}{\pi r^q} \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \sin q\rho \, d\rho \quad \textbf{25.} \\ \overset{n}{\underset{1}{H'}}_q &= -\frac{q}{\pi r^q} \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \cos q\rho \, d\rho = +\frac{q}{\pi r^q} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho \quad \textbf{26.} \end{aligned}\right\} \quad 0 < r < r_1$$

Die Integrale 24. verwandeln sich in folgende:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \, d\rho &= 2\pi \lg\left[(-1)^n r_1 \cdot r_2 \cdots r_n\right] \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \, d\rho &= 2\pi \operatorname{arc\,tg} \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}\right\} \quad 0 < r < r_1 \qquad \textbf{27.}$$

In Bezug auf diese letzte Gleichung ist zu bemerken: Wir hatten $z_p + 1 \cdot z_p + 2 \ldots z_n = g + i$ gesetzt. Für $p = 0$ enthält aber das Produkt auf der linken Seite sämtliche Wurzelwerte, i also gleich dem absoluten Gliede $c_n = a_n + i\, b_n$ der Gleichung 1.

V.

Zweiter Fall: $r_n < r < \infty$. Die Gleichung 6. zeigt, dass man für diesen Fall $p = n$ zu setzen hat. Die lg der Faktoren in 7. lassen sich dann nur nach Potenzen von z mit negativen Exponenten entwickeln, also müssen die Koefficienten der Potenzen mit positiven Exponenten verschwinden. Aus 9. ergiebt sich

$$\overset{n}{\underset{p+1}{\Xi'_q}} + i \overset{n}{\underset{p+1}{H'_q}} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \overset{n}{\underset{n+1}{\Xi'_q}} = \overset{n}{\underset{n+1}{H'_q}} = 0$$

dies ist nur möglich, wie aus 20. ersichtlich, wenn

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = -\int_{-\pi}^{+\pi} (\zeta - n\rho) \sin q\rho \, d\rho \text{ und}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (\zeta - n\rho) \cos q\rho \, d\rho = \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho$$

dann folgt aus 15. unter Berücksichtigung der Integrale 16 und 17:

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{\underset{1}{\Xi_q}} &= -\frac{q r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \cos q\rho \, d\rho = \mp 2 r^q + \frac{q r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \sin q\rho \, d\rho \\ \overset{n}{\underset{1}{H_q}} &= -\frac{q r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \cos q\rho \, d\rho = -\frac{q r^q}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \sin q\rho \, d\rho \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\textbf{28.} \\ &r_n < r < \infty \\ &\textbf{29.} \end{aligned}$$

Die Integrale 24. verwandeln sich in

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \lg R \, d\rho &= 2 n \pi \lg r \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta \, d\rho &= 0 \end{aligned}\right\} \quad r_n < r < \infty \quad \textbf{30.}$$

VI.

Wir haben nun schliesslich zu zeigen, wie die Wurzeln der Gleichung 1. durch unsere Integrale ausdrückbar sind. Dazu setzen wir mit Jacobi an:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} z_\lambda^q &= z_1^q + z_2^q + \ldots z_{p-1}^q + z_p^q = \overset{p}{\underset{1}{\Xi_q}} + i \overset{p}{\underset{1}{H_q}} \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} z_\lambda^q &= z_1^q + z_2^q + \ldots z_{p-1}^q \quad = \overset{p-1}{\underset{1}{\Xi_q}} + i \overset{p-1}{\underset{1}{H_q}} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen von einander subtrahiert ergeben:

$$z_p^q = \overset{p}{\underset{1}{\Xi_q}} - \overset{p-1}{\underset{1}{\Xi_q}} + i \left(\overset{p}{\underset{1}{H_q}} - \overset{p-1}{\underset{1}{H_q}} \right) \qquad \textbf{31.}$$

Genau auf dieselbe Weise erhält man

$$\frac{1}{z_p^q} = \underset{p}{\overset{n}{\Xi'_q}} - \underset{p+1}{\overset{n}{\Xi'_q}} + i\left(\underset{p}{\overset{n}{H'_q}} - \underset{p+1}{\overset{n}{H'_q}}\right) \qquad 32.$$

Die Werte der Ξ und H sind zu entnehmen aus den Formeln 18. 19. 21. 22. 25. 26. 28. Von speziellen Integralen haben wir gefunden 24. 27. und 30.

Die Jacobischen Resultate sind aus den unsrigen auf sehr einfache Weise wieder erhalten. Wenn die Koefficienten c_λ in Gleichung 1. reell sind, so können erstens die Wurzelwerte z_λ sämtlich reell sein, dann sieht man aus Gleichung 8. müssen die Werte H sofort verschwinden. Zweitens, wenn einige Wurzelwerte konjugiert komplex sind, so kommen in Gleichungen 8. Werte vor wie

$$(x + iy)^q + (x - iy)^q \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{(x+iy)^q} + \frac{1}{(x-iy)^q} = \frac{(x-iy)^q + (x+iy)^q}{(x^2+y^2)^q}$$

Entwickelt man diese Grössen nach dem binomischen Lehrsatze, so ist ersichtlich, dass die imaginären Teile sich wegheben müssen. Also auch für diesen Fall müssen die Gleichungen reell sein, d. h. die Werte H verschwinden.

Für reelle Koefficienten c_λ der Gleichung 1. fallen also die Formeln 19. 22. 26. 29. und die Gleichungen 18. 21. 25. 28. stimmen in der That mit den Jacobischen Resultaten überein, wenn man darin, was aus 4. folgt, R ersetzt durch $\sqrt{X^2+Y^2}$ sowie ζ durch arc tg

SCHUL-NACHRICHTEN.

I. Lehrverfassung.

1. Lehrgegenstände und deren Stundenzahl.

Lehrgegenstand.	Kl. VI.	Kl. V.	Kl. IV_1.	Kl. IV_2.	Kl. IIIB.	Kl. $IIIA_1$.	Kl. $IIIA_2$.	Kl. IIB_1.	Kl. IIB_2.	Kl. IIA.	Kl. I.	Zusammen.
Religion	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	23
Deutsch und Geschichtserzählungen	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	34
Lateinisch	8	8	7	7	4	4	4	3	3	3	3	54
Französisch	—	—	5	5	5	5	5	4	4	4	4	41
Englisch	—	—	—	—	3	3	3	3	3	3	3	21
Geschichte und Erdkunde	2	2	2 2	2 2	2 2	2 2	2 2	2 1	2 1	3	3	36
Rechnen und Mathematik	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	51
Naturbeschreibung . . .	2	2	2	2	2	2	2	2	2	—	—	18
Physik	—	—	—	—	—	—	—	2	2	3	3	10
Chemie und Mineralogie .	—	—	—	—	—	—	—	1	1	2	2	6
Schreiben	2	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
Zeichnen	—	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	20
Zusammen	25	25	29	29	30	30	30	30	30	30	30	318

2. Lehrer-Verzeichnis

Namen.	I.	IIA.	IIB1.	IIB2.
1. Prof. Dr. **Thümen**, Direktor.	Deutsch 3 Latein 3 Französisch 4			
2. Prof. Dr. **Schütte.**	Mathematik 5 Physik 3			Mathematik 5
3. Prof. Dr. **Lüdke.**		Latein 3 Französisch 4 Englisch 3	Französisch 4 Englisch 3	
4. Prof. Dr. **Gentzen.**		Mathematik 5 Physik 3	Mathematik 5 Physik 2	Physik 2
Oberlehrer: 5. Dr. **Bäker.**		Deutsch 3	Religion 2 Deutsch 3 Latein 3	(Religion 2) Deutsch 3 Latein 3
6. **Dietrich.**			Geschichte u. Erdk. } 3	Geschichte u. Erdk. } 3
7. Dr. **Badke.**	Englisch 3			Französisch 4 Englisch 3
8. Dr. **Düsing.**				
9. Dr. **Block.**				
10. Dr. **Gallert.**				
11. **Hübner.**	Chemie 2	Chemie 2	Naturbesch. 2 Chemie 1	Naturbesch. 2 Chemie 1
12. Dr. **Holtz.**	Geschichte 3	Geschichte 3		
13. **Lietz.**				
14. Dr. **Gauger.**	beurlaubt zu			
15. Dr. **Wehner.**	Religion 2	Religion 2		
16. Zeichenlehrer **Müller.**	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2
17. Technischer und Elementar-Lehrer **Kirchhoff.**				
	Singen Chor 4 Stunden			
18. Wissenschaftl. Hülfslehrer **Horn.**				
19. Schulamtskandidat **Gohdes.**				Religion 2

Winterhalbjahr 1893/94.

IIIA1.	IIIA2.	IIIB.	IV1.	IV2.	V.	VI.	Summe.
							10
		Mathematik 5 Naturbesch. 2					20
							17
Mathematik 5							22
							(19) 17
Religion 2 Deutsch 3 Latein 4 Geschichte u. Erdk. 4							19
Französisch 5 Englisch 3	Englisch 3						21
	Deutsch 3 Latein 4 Französisch 5			Französisch 5			17
		Religion 2 (Deutsch 3) Latein 4	Deutsch 3 Latein 7				(19) 16
		Französisch 5 Englisch 3	(Französ. 5) Geschichte u. Erdk. 4				(17) 12
Naturbesch. 2	Mathematik 5 Naturbesch. 2		Mathematik 4				23
	Geschichte u. Erdk. 4			Deutsch 3 Latein 7			20
		Geschichte u. Erdk. 4		Geschichte u. Erdk. 4	Deutsch u. Gsch.-Erz. 3 Latein 8 Erdkunde 2		21
Turnlehrer-Bildungsanstalt.							
	Religion 2		Religion 2	Religion 2		Deutsch u. Gsch.-Erz. 4 Latein 8	22
Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Schreiben 2 Zeichnen 2	Schreiben 2	24
					Religion 2 Rechnen 4 Naturbesch. 2 Singen 2	Religion 3 Rechnen 4 Erdkunde 2 Naturbesch. 2 Singen 2	27
ausserdem Turnen)							
			Mathematik 4 Naturbeschreibung 2				6
		Deutsch 3	Französisch 5				10

3. Übersicht der erledigten Lehraufgaben.

PRIMA.

Ordinarius: Der Direktor.

1. **Religion.** S.: Evangelium Johannis; W.: Glaubens- und Sittenlehre. 2 Std. Dr. Wehner.

2. **Deutsch.** S.: Goethes Gedichte und Dramen. W.: Lessings Leben; seine Dramen, Hamburgische Dramaturgie; Laokoon. Aufsätze und Vorträge; Anleitung dazu. 3 Std. Direktor.

Aufgaben für die Aufsätze:

1. a) In welchen Punkten vornehmlich unterscheidet sich des Euripides „Iphigenie unter den Tauriern" von dem gleichnamigen Stücke Goethes? b) Die Vorfabel zu Goethes „Iphigenie". 2. a) Die Bedeutung der Monologe in Goethes „Iphigenie". b) Charakteristik des Pylades in Goethes „Iphigenie". 3. a) Goethe und Karl August. b) Spanier und Niederländer in Goethes „Egmont". 4. a) Mit welchem Rechte nennt Iphigenie den Thoas einen edlen Mann? b) Der verschiedene Charakter der Handlung in Schillers Balladen. 5. Die Bedeutung des siebenjährigen Krieges für die Entwickelung Preussens. 6. Ästhetische Würdigung von Lessings „Miss Sara Sampson". 7. Was ist nach Tellheims Auffassung „Ehre"? 8. Welchen Zweck verfolgte Lessing in der „Hamburgischen Dramaturgie", und wie erreichte er diesen?

Reifeprüfung Michaelis 1893: Ist Goethes „Iphigenie" ein antikes oder modernes Stück? Ostern 1894: Nr. 8.

3. **Lateinisch.** Cicero in Catil. I; Sall. de coni. Cat. 1—40. Liv. XXII. Anfang. Vergil Aen. I. und II. in Auswahl. Alle 14 Tage eine schriftliche Übersetzung aus Sall. oder Livius. 3 Std. Direktor.

4. **Französisch.** Lectüre im S.: Mérope von Voltaire; W.: Molière, Les Précieuses ridicules und Souvestre; Les derniers paysants, Heft II (Weidm.-Sammlung); dazu ausgewählte Abschnitte aus Herrig und Burguy: La France littéraire. Gelegentliche Wiederholung der Syntax; Synonymik, Metrik; Sprechübungen. Extemporalien alle 14 Tage und Aufsätze. 4 Std. Direktor.

Aufgaben für die Aufsätze:

1. L'année 1815. 2. Quelles étaient les causes du départ de Goethe pour l'Italie? 3. Judo Naufrage (Nach Souv. Les dern. paysans). 4. Goethe en Italie. 5. Les guerres de 1864 et de 1866. 6. La première guerre de Silésie. 7. La Prusse en 1805 et 1806. 8. La deuxième guerre de Silésie.

Aufgabe für die Reifeprüfung Michaelis 1893: Nr. 4; Ostern 1894: Nr. 8.

5. **Englisch.** Lektüre: Shakespeares Merchant of Venice (Auswahl). Dickens: Christmas Carol. Prosaische und poet. Abschn. aus Herrig. Wiederholungen aus dem Gebiet der Formenlehre und Syntax mit Hinzunahme des Etymol. u. Sprachgeschichtlichen. Schriftliche Übungen verschiedener Art (Extemp., Diktate, kleine Aufsätze, Übersetzungen), Sprechübungen im Anschluss an das Gelesene und über gegebene Themata. Privatlektüre aus Herrig. 3 Std. Dr. Badke.

6. **Geschichte** und **Erdkunde.** Geschichte der französischen Revolution, der Koalitions- und Freiheitskriege im Zusammenhang ihrer Ursachen und Wirkungen; Überblick über die neueste Geschichte bis zur Gegenwart. Zusammenfassende Wiederholungen aus der europäischen Erdkunde (Pütz). 3 Std. Dr. Holtz.

7. **Mathematik.** Analytische Geometrie, Reihen und Funktionen. Vierwöchentlich eine häusliche Arbeit. 5 Std. Prof. Schütte.

Aufgaben für die Reifeprüfung Ostern 1893: Von zwei Orten A und B liegt der eine unter der geographischen Breite $p = 23^0\ 5'$, der andere unter $p_1 = 17^0\ 38'$, die Zeitdifferenz beträgt 4 h 45 m. Wie gross ist die direkte Entfernung? — Ein reguläres Achteck mit der Seite $a = 20$ cm rotiert um eine Seite; wie gross sind Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers? — Zur Konstruktion eines Dreiecks ist gegeben eine Seite a, dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises und der Radius ϱ_1 des der Seite a angeschriebenen Kreises. —

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{2z}{4},\ x^3+y^3=9.$$

Aufgaben für die Reifeprüfung Michaelis 1893. Zwei aneinander grenzende Strecken einer Geraden AB = 168,4 und BC = 412,6 erscheinen vom Punkte P aus unter den Winkelu $x = 19^0\ 5'$ und $y = 44^0\ 12'$. Wie weit ist P von A und B entfernt? — Von einem Punkte P mit den Coordinalen $\alpha = 3$ und $\beta = 1$ sind an einem Kreis von der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ die Tangenten gezogen; wie lauten die Gleichungen, wie gross sind die Tangenten? — Die Oberfläche eines geraden Cylinders ist $a^2\pi$, wie gross müssen Grundradius und Höhe sein, damit das Volumen im Maximum ist? —

$$\frac{y}{(x+y)^{3/2}} + \frac{\sqrt{x+y}}{y} = \frac{17}{4\sqrt{x+y}}; \quad x^2 = y + 5.$$

Aufgaben für die Reifeprüfung Ostern 1894: Zwei Sterne A und B haben die Deklinationen $\varphi = 16^0\ 22'$ und $\varphi_1 = 25^0\ 38'$, ihre Entfernung an der scheinbaren Himmelskugel ist $e = 31^0\ 34'$; welche Zeit verfliesst zwischen den Kulminationen? — Um den Mittelpunkt einer Ellipse von der Gleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ist ein Kreis geschlagen, der durch die Brennpunkte geht; wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche sich in dem einen Durchschnittspunkte an beide Kurven ziehen lassen? — Die Spitze eines geraden Kegels liegt im Mittelpunkte einer Kugel von dem Radius r, der Grundkreis hat den Radius 2r und berührt die Kugel; wie gross sind Volumen und Calotte des innerhalb des Kegels liegenden Kugelfaktors? —

$$x^3 y^3 - \frac{3}{2} x^2 y^2 - \frac{3}{2} xy + 1 = 0 \qquad x^2 + y^2 = 5.$$

8. **Physik.** Mechanik. Erweiterung der Wärmelehre. 3 Std. Prof. Schütte.

Aufgabe für die Reifeprüfung Ostern 1894: Der Wurf. — Unter welchem Winkel muss ein Körper mit der Geschwindigkeit v = 60 m geworfen werden, wenn er in der Entfernung w = 200 m zu Boden kommen soll?

9. **Chemie** und **Mineralogie.** Zink, Blei, Kupfer, Quecksilber, Edelmetalle. Analytisches und periodisches System. Ausgewählte Abschnitte aus der organischen und physiologischen Chemie. Stöchiometrische Aufgaben. Vierteljährlich ein häuslicher Aufsatz. 2 Std. Hübner.

Aufgabe für die Reifeprüfung Ostern 1893: Bestandteile und Hygiene der Luft.
Aufgabe für die Reifeprüfung Michaelis 1893: Bestandteile und Hygiene des Wassers.

10. **Zeichnen.** Ornamente nach Gipsmodellen. Zeichnen und Malen nach der Natur und nach Vorlagen. Übung im Skizzieren nach der Natur. 2 Std. Müller.

11. **Singen.** Vierstimmige Choräle, Motetten, Vaterlands-, Volkslieder. 2 Std. Kirchhoff.

OBER-SEKUNDA.

Ordinarius: Prof. Dr. Gentzen.

1. **Religion.** Apostelgeschichte. Dazu Abschnitte anderer neutestamentlicher Schriften. Wiederholung von Katechismus, Sprüchen und Liedern. 2 Std. Dr. Wehner.

2. **Deutsch.** Einführung in das Nibelungenlied unter Veranschaulichung durch Proben aus dem Urtext. Ausblick auf die nordischen Sagen und die grossen germanischen Sagenkreise, auf die höfische Epik und die höfische Lyrik. Dazu einzelne sprachgeschichtliche Belehrungen durch typische Beispiele. Zusammenfassender Rückblick auf die Arten der Dichtung. Lektüre des Egmont von Goethe und des Wallenstein von Schiller. Gelegentliches Auswendiglernen von Dichterstellen: Vorträge der Schüler über den Inhalt bedeutenderer mittelhochdeutscher Dichtungen und der gelesenen Dramen nach eigenen Ausarbeitungen. 3 Std. Dr. Bäker.

Aufgaben für die Aufsätze:

1. Wodurch wird Hagen veranlasst, Siegfried zu ermorden? 2. Wie kommt es, dass aus Kriemhild, dem liebenden Weibe, eine Rachefurie wird? 3. Wie kam es, dass die Hegemonie von den Spartanern auf die Athener überging? 4. Welche Rolle spielt Rüdiger von Bechlarn im Nibelungenliede? (Klassenarbeit.) 5. Welches Bild gewinnen wir bereits aus „Wallensteins Lager“ von dem Hauptheldeu der Wallenstein-Trilogie? 6. Mit welchem Rechte kann „Wallensteins Lager“ als Exposition zur ganzen Trilogie angesehen werden? 7. Wie stellen sich Octavio und

Max Piccolomini zu dem verräterischen Treiben Wallensteins? 8. Welche Schilderung entwirft der Dichter in dem 1. Aufzuge des „Egmont“ von den politischen Verhältnissen in den Niederlanden? (Klassenarbeit.)

3. **Lateinisch.** Lektüre des Ov. Met. XIII, 917—963. XIV, 155—300, 436—633, 772 bis 851. XV, 1—216, 221—407, 418—489, 548—694 und des Cäs. B. G. VII ganz. Alle 14 Tage eine schriftliche Übersetzung aus Caesar. Im Anschluss an die Lektüre die Tempus- und Moduslehre wiederholt und erweitert. 3 Std. Prof. Lüdke.

4. **Französisch.** Ségur, Histoire de Napoléon, livre I, chap. I bis livre V. Lehre vom Pronomen, Inf. und Subj. Gelegentliche Wiederholung und Ergänzung einzelner Abschnitte aus der Formen- und Satzlehre. Schriftliche Übungen verschiedener Art. Sprechübungen im Anschluss an die Lektüre und über gegebene Themata. 4 Std. Prof. Lüdke.

5. **Englisch.** Ausgewählte Abschnitte aus Macaulay's Hist. of Engl. I. Geschlecht und Pluralbildung der Hauptwörter. Kasuslehre. Adjektiv, Zahlwort, Pron., Adverb., Präpositionen, Verbum. Schriftl. Übungen verschiedener Art. Sprechübungen im Anschluss an das Gelesene und über gegebene Themata. Vierteljährlich ein schriftlicher Bericht. Privatlektüre aus Macaulay. 3 Std. Prof. Lüdke.

6. **Geschichte** und **Erdkunde.** Hauptereignisse der griechischen Geschichte bis zum Tode Alexanders des Grossen und der römischen Geschichte bis zum Untergange des weströmischen Kaisertums nach Ursachen und Wirkungen mit besonderer Berücksichtigung der Verfassungs- und Kulturverhältnisse in zusammenfassender, vergleichender Gruppierung. Zusammenfassende Wiederholungen aus der aussereuropäischen Erdkunde. 3 Std. Dr. Holtz.

7. **Mathematik.** Schwierigere quadratische Gleichungen; Lehre von den Chordalen, Harmonikalen, Ähnlichkeitspunkten und -axen (Spieker). Konstruktion algebraischer Ausdrücke. Wiederholung und Erweiterung der Trigonometrie, Goniometrie. Arithmetische und geometrische Reihen; Zinseszins- und Rentenrechnung. Stereometrie (Kambly). Alle vier Wochen eine schriftliche häusliche Arbeit. 5 Std. Prof. Gentzen.

8. **Physik.** Wärmelehre, Wiederholung und Erweiterung von Magnetismus, Elektricität. 3 Std. Prof. Gentzen.

9. **Chemie** und **Mineralogie.** Sauerstoff, Wasserstoff, Metalloide, Halogene. Stöchiometrische Aufgaben. Steinkohlen-, Braunkohlen- und Torfformationen. Vogelberge. Guanolager, Schwefelmineralien. Übersicht über die Gesteine. 2 Std. Hübner.

10. **Zeichnen.** Ornamente nach Gipsmodellen. Zeichnen und Schattieren nach Muscheln, Vasenformen, konservierten Vögeln. Übung im Skizzieren nach der Natur. Planzeichnen. 2 Std. Müller.

11. **Singen.** Wie Prima.

UNTER-SEKUNDA I.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Bäker.

1. **Religion.** Lesen von Abschnitten aus dem A. und N. Testament, soweit dieselben nicht bereits in der Unter- und der Ober-Tertia behandelt sind. Erklärung der wichtigeren Abschnitte des Lukasevangeliums. — Wiederholung des Katechismus und Darlegung seiner inneren Gliederung. — Wiederholung von Psalmen, Sprüchen und Liedern. Psalm 51 erklärt und auswendig gelernt. 2 Std. Dr. Bäker.

2. **Deutsch.** Praktische Anleitung zur Aufsatzbildung durch Übungen in Auffindung des Stoffs und Ordnung desselben in der Klasse. Alle 4 Wochen ein Aufsatz. Lektüre von Goethes Hermann und Dorothea, Schillers Wilhelm Tell und Lessings Minna von Barnhelm. Auswendiglernen von Dichterstellen und erste Versuche im Vortrag kleiner eigener Ausarbeitungen über Gelesenes. 3 Std. Dr. Bäker.

3. **Lateinisch.** Im S.: Lektüre des Ov. Met. I, 1—162, 253—415. Das Wichtigste aus der Prosodie und über den Hexameter. Im W.: Lektüre des Caesar bell. gall. lib. VI, 1—29. VII, 63—67. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit, darunter vierteljährlich eine Übersetzung

us Caesar. Im Anschlusse daran das Wichtigste aus der Tempus- und Moduslehre. 3 Std. Dr. Bäker.

4. **Französisch.** Lektüre: Die Aegyptische Expedition der Franzosen. Auszug aus Thiers: Histoire de la révolution française, bearbeitet von Dr. Jäger, 3. Aufl.; von Anfang bis S. 97. Alle 14 Tage ein Extemporale. Aus der Grammatik: Wiederholungen über die Präpositionen, die Wortstellung, den Gebrauch der Zeiten und über den Gebrauch des Subjonctif. Sprechübungen. 5 Std. Prof. Lüdke.

5. **Englisch.** Ausgew. Abschnitte aus Lüdekings Engl. Lesebuch II. Lehre vom Nomen. Gebrauch des Artikels. Pronomina. Adv. Syntax des Verbums. Schriftl. Übungen verschiedener Art. Sprechübungen im Anschluss an die Lektüre und über gegebene Themata. 3 Std. Prof. Lüdke.

6. **Geschichte** uud **Erdkunde.** Deutsche und preussische Geschichte von 1740 bis zur Gegenwart. Wiederholungen nach dem Kanon. — Europa in ergänzender Wiederholung, Kartenskizzen. (Müller, Daniel.) 3 Std. Dietrich.

7. **Mathematik.** Gleichungen I. und II. Grades mit einer und mehreren Unbekannten; Lehren von den Transversalen (Spieker). Propädeutischer Unterricht in der Stereometrie. Lehre von den Logarithmen; ebene Trigonometrie. Dreieckskonstruktionen. Alle 4 Wochen ein Extemporale. 5 Std. Prof. Gentzen.

8. **Physik.** Magnetismus, Elektricität, Akustik, optische Erscheinungen. 2 Std. Prof. Gentzen.

9. **Chemie** und **Mineralogie.** Chemie der Luft, des Wassers und der Ackererde. Chemische Grundbegriffe. Elemente der Krystallographie. Physikalische Eigenschaften ausgewählter Mineralien. 2 Std. Hübner.

10. **Naturbeschreibung.** Zellenlehre. Übersicht über die Kryptogamen. Pflanzenkrankheiten der Kulturgewächse. Anatomie und Physiologie der Achsenorgane, des Laubblattes und der Blüte. Beobachtungsaufgaben. Anatomie, Physiologie und Hygiene des menschlichen Körpers. 2 Std. Hübner.

11. **Zeichnen.** Geometrische Darstellung von Körpern: Rechtwinklige und schiefwinklige Projektion, Schnitte und Abwicklungen. 2 Std. Müller.

12. **Singen.** Wie Prima.

UNTER-SEKUNDA II.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Badke.

Die Verteilung der Unterrichtsstunden war folgende: Religion S.: Dr. Bäker; W.: Cand. Lob. Gohdes, Deutsch Dr. Bäker, Lateinisch Dr. Bäker, Französisch Dr. Badke (Thiers, Expéd. d'Égypte bis zu Klébers Tod. Feuillet, Le village), Englisch Dr. Badke, Geschichte und Erdkunde Dietrich, Mathematik Prof. Schütte, Physik S.: Prof. Schütte; W.: Prof. Gentzen, Naturbeschreibung Hübner, Chemie Hübner, Zeichnen Müller, Singen wie I.

OBER-TERTIA I.

Ordinarius: Oberlehrer Dietrich.

1. **Religion.** Das Reich Gottes im Neuen Testamente (eingehend die Bergpredigt, auch Gleichnisse). — Wiederholung von Katechismus, Sprüchen und Liedern. Erklärung und Erlernung von 4 Psalmen. — Reformationsgeschichte im Anschluss an ein Lebensbild Luthers. 2 Std. Dietrich.

2. **Deutsch.** Erklärung und Auswendiglernen folgender Gedichte: Goethes „Sänger", Schillers „Glocke", Arndts „Leipziger Schlacht", Körners „Aufruf" und „Gebet während der Schlacht", Rückerts „Stein" und Geibels „Am 3. September 1870"; dazu poetische und prosaische Lektüre nach Viehoff. Mitteilungen aus dem Leben der Dichter; weitere Belehrungen aus der Metrik uud Rhetorik. Lektüre Homers in der Übersetzung von Voss, besonders Od. 9, 14, 18, Ias 3, 6, 16, 22, mit Auswahl. Alle 4 Wochen ein Aufsatz. 3 Std. Dietrich.

3. **Lateinisch.** Caesar Bell. Gall. I mit Auswahl. 2 Std. Wiederholung der Formen- und Kasuslehre. Das Wichtigste aus der Tempus- und Moduslehre. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit, darunter vierteljährlich eine Übersetzung aus Caesar. (Schultz, Grammatik.) 2 St. Dietrich.

4. **Französisch.** Lektüre des Michaud: 1e croisade, chap. 8—19. Grammatik, Gruppierende Zusammenfassung der gesamten Formenlehre. Tempora und Modi. Schulgrammatik von Plötz Lektion 29—57. Sprechübungen im Anschluss an Gelesenes und an Vorkommnisse des täglichen Lebens. 14tägige schriftliche Arbeiten. 5 Std. Dr. Badke.

5. **Englisch.** Lektüre aus Lüdecking, Erlernen von Gedichten. Grammatik: Gruppierende Zusammenfassung der gesamten Formenlehre, Syntax des Verbs. Grammatik von Gesenius, Teil 2, § 167—267, sonst wie im Französischen. 3 Std. Dr. Badke.

6. **Geschichte** und **Erdkunde.** Deutsche und brandenburgisch-preussische Geschichte von der Reformation bis 1740. Wiederholungen nach dem Kanon. Deutschland physikalisch und politisch, sowie die deutschen Kolonieen. Kartenskizzen. (Müller, Daniel.) 4 Std. Dietrich.

7. **Mathematik.** Lehre von den Potenzen und Wurzeln. Gleichungen I. Grades mit einer und mehreren Unbekannten; einfache quadratische Gleichungen. Lehre von den Proportionen und deren Anwendung auf die Planimetrie. Ähnlichkeitslehre. (Spieker.) Flächeninhalt von Figuren. Dreieckskonstruktionen. Alle vier Wochen eine schriftliche Arbeit. 5 Std. Prof. Gentzen.

8. **Naturbeschreibung.** Ausgewählte Pflanzenfamilien zur Ergänzung von Morphologie, Systematik und Biologie. Übersicht über das Pflanzensystem. Pflanzen-Geographie. Ausländische Kulturpflanzen. Beobachtungsaufgaben. Niedere Tiere. Übersicht über das System der Tiere. Repetition der Wirbeltierklassen. 2 St. Hübner.

9. **Zeichnen.** Die Gesetze der Beleuchtung. Die Kugel nach Modell. Übung im Zeichnen und Schattieren nach einfachen Gegenständen. Ornamente in farbiger Ausführung nach Vorlagen. Blattformen und Früchte nach der Natur. 2 Std. Müller.

10. **Singen.** Wie I.

OBER-TERTIA II.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Düsing.

Die Verteilung der Unterrichtsstunden war folgende: Religion Dr. Wehner, Deutsch Dr. Düsing, Lateinisch Dr. Düsing, Französisch Dr. Düsing, Englisch S.: Dr. Gallert, W.: Dr. Badke, Geschichte und Erdkunde Dr. Holtz, Mathematik Hübner, Naturbeschreibung Hübner, Zeichnen Müller, Singen wie I.

UNTER-TERTIA.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Block.

1. **Religion.** Lesung von Abschnitten aus den Büchern Moses I, II, IV, V; B. Josua; B. Ruth; I. und II. B. Samuelis; I. und II. B. der Könige; B. Jonas. Lernen von 5 Psalmen. Wiederholung des Katechismus und der dazu gelernten Sprüche, sowie der früher gelernten Kirchenlieder; 4 neue gelernt. Das Kirchenjahr und die gottesdienstlichen Ordnungen. 2 Std. S.: Dr. Wehner, W.: Dr. Block.

2. **Deutsch.** Grammatik: Überblick über die wichtigsten grammatischen Gesetze der deutschen Sprache. (Wendt.) Häusliche Aufsätze alle 4 Wochen. Behandlung prosaischer und poetischer Lesestücke. (Viehoff.) Belehrungen über die zur Erläuterung des Gelesenen unbedingt notwendigen poetischen Formen. Auswendiglernen und Vortragen der Gedichte: „Ring des Polykrates“, „Bürgschaft“, „Graf von Habsburg“ (Schiller), „Des Sängers Fluch“ und „Bertran de Born“ (Uhland). 3 Std. S.: Dr. Block; W.: Cand. prob. Gohdes.

3. **Lateinisch.** Grammatik: Wiederholungen der Formenlehre und Erweiterung der Kasuslehre; Moduslehre, soweit für das Lesen erforderlich (Schultz Grammatik); im Anschluss daran Übersetzungsübungen aus Ostermann. Lektüre: Caesar Bell. gall. I, 1. II, 1—10. 16—28. III, 7—16. 20—27. IV, 1—3. 16—19. 2 St. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. 4 Std. Dr. Block.

4. **Französisch.** Repetit. der 4 regelm. Konjugationen, unter besonderer Berücksichtigung des Subjonctif. Ferner orthographische Eigentümlichkeiten einiger Verba auf er, sowie die notwendigsten unregelm. Verba. — Lehre von der Veränderlichkeit des Perfektparticips, desgl. der Bildung der Adverbien und Einübung der Fürwörter. Die Präposition de und à. Lektüre: Michaud, I. croisade c. 1—4. Stündliche Sprechübungen. Leseübungen und Retroversion. 14tägige schriftliche Arbeiten. 5 Std. Dr. Gallert.

5. **Englisch.** Leseübungen. Erlernen kleiner Gedichte, erste Versuche im Sprechen. Grammatik: Regelmässige und unregelmässige Formenlehre nach dem Elementarbuch von Gesenius Kap. 1—23. Schriftliche und mündliche Übersetzungen aus dem Elementarbuch. 14tägige schriftliche Arbeiten. 3 Std. Dr. Gallert.

6. **Geschichte** und **Erdkunde.** Geschichte: Kurzer Überblick über die weströmische Kaisergeschichte vom Tode des Augustus, dann deutsche Geschichte bis zum Ausgang des Mittelalters. Zahlen nach dem Kanon. 2 Std. Lietz. Erdkunde: Politische Erdkunde Deutschlands, physische und politische Erdkunde der aussereuropäischen Erdteile ausser den deutschen Kolonieen. Kartenskizzen an der Wandtafel und in Heften. 2 Std. Lietz.

7. **Mathematik** und **Rechnen.** Die Grundrechnungs-Arten mit algebraischen Zahlen. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Anwendung derselben auf Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben. Proportionslehre. Gewinn-, Verlust-, Tara-, Rabattrechnung. Lehre vom Parallelogramm, Trapez, Kreis und regulären Polygon. Flächengleichheit der Figuren. Inhalt der gradlinigen Figuren. 5 Std. S.: Dr. Gauger; W.: Prof. Schütte.

8. **Naturbeschreibung.** Beschreibung ausgewählter Pflanzenfamilien mit Rücksicht auf die Erkennung des natürlichen Systems. Morphologie und Biologie. Gliedertiere. 2 Std. S.: Dr. Gauger; W.: Prof. Schütte.

9. **Zeichnen.** Umrisse nach elementaren Körpern. Schwierigere Flächenverzierungen in farbiger Ausführung nach Vorlagen. Blattformen nach der Natur. 2 Std. Müller.

10. **Singen** wie Prima.

QUARTA I.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Gallert.

1. **Religion.** Lesung wichtiger Abschnitte des Alten und Neuen Testaments behufs Wiederholung der bibl. Geschichten. Einteilung der Bibel und Reihenfolge der bibl. Bücher. Wiederholung des 1. und 2. Hauptstücks; Erklärung und Einprägung des 3. Hauptstücks mit Sprüchen; Auswendiglernen des 4. und 5. Hauptstücks. Wiederholung der in VI und V gelernten Kirchenlieder; 4 neue Kirchenlieder. 2 Std. Dr. Wehner.

2. **Deutsch.** Lektüre aus Hopf und Paulsiek. Nacherzählen; Auswendiglernen und Vortragen von Gedichten. Grammatik: Der zusammengesetzte Satz und das Wichtigste aus der Wortbildungslehre. Abwechselnd Rechtschreibeübungen und Aufsätze alle 14 Tage. 3 Std. Dr. Block.

3. **Lateinisch.** Lektüre S.: Weller; W.: Cornelius Nepos (Miltiades Themistocles, Aristides und Cimon). Grammatik: Wiederholung der Formenlehre; das Wesentliche aus der Kasuslehre im Anschluss an Musterbeispiele (Schultz, Ostermann). Wöchentlich eine schriftliche Übersetzung ins Lateinische. 7 Std. Dr. Block.

4. **Französisch.** Avoir und être sowie die regelm. Konjugation, Geschlechtswort, Teilartikel, Deklination des Hauptworts, Veränderlichkeit und Steigerung des Eigenschaftsworts, Grundzahlwörter (innerhalb der durch die „Lehrpläne“ gezogenen Grenzen). Aussprache- und Leseübungen. Versuche im Sprechen. Aneignung von Vokabeln. 14tägige schriftliche Arbeiten. 5 Std. S.: Dr. Gallert; W.: Cand. prob. Gohdes.

5. **Geschichte** und **Erdkunde.** Griechische Geschichte bis zum Tode Alexanders d. Gr. nebst Ausblick auf die Diadochenreiche, römische bis zum Tode des Augustus; Zahlen nach dem

Kanon (David Müller). 2 Std. Dr. Gallert. — Europa ausser Deutschland (Daniel). Entwerfen von einfachen Kartenskizzen an der Wandtafel und in Heften. 2 St. Dr. Gallert.

6. **Mathematik** und **Rechnen.** Repetition der Bruchrechnung. Regel de tri. Zinsrechnung. Lehre von den Graden, Winkeln, Dreiecken und Parallelogrammen. Einführung in die Inhaltsberechnung. 4 Std. S.: Dr. Gauger; W.: Hübner.

7. **Naturbeschreibung.** Vergleichende Beschreibung ausgewählter Pflanzenfamilien. Pflanzen-Biologie. Beobachtungsaufgaben. Übersicht über das System der Wirbeltiere. Tier-Biologie. 2 Std. S.: Dr. Gauger; W.: Horn.

8. **Zeichnen.** Die Spirale. Verbindung von Spiralen und Anwendung derselben. Symmetrische Blatt- und Blütenformen. Flachornamente. Übung im Tuschen. Blattformen nach der Natur. 2 Std. Müller.

9. **Singen** wie Prima.

QUARTA II.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Holtz.

Die Verteilung der Unterrichtsstunden war folgende: Religion Dr. Wehner, Deutsch und Latein Dr. Holtz, Französisch Dr. Düsing, Geschichte und Erdkunde Lietz, Mathematik und Naturbeschreibung S.: Dr. Gauger; W.: Horn, Zeichnen Müller, Singen wie I.

QUINTA.

Ordinarius: Oberlehrer Lietz.

1. **Religion.** Biblische Geschichten des Neuen Testaments nach Zahn. Repetition des 1. und 2. Hauptstücks mit Luthers Auslegung. 3. Hauptstück ohne Erklärung. Wiederholung der Lieder von Sexta und Einprägung von 4 neuen Liedern. 2 Std. Kirchhoff.

2. **Deutsch.** Lektüre aus Hopf und Paulsiek; grammatische Übungen: Einübung des einfachen und erweiterten Satzes; das Notwendigste vom zusammengesetzten Satze; Rechtschreibe- und Interpunktionsübungen; mündliches Nacherzählen; kleine Aufsätze; Gedichte nach dem Kanon; Erzählungen aus der alten Sage und Geschichte. (Hopf und Paulsiek, Puttkamer.) 3 Std. Lietz.

3. **Lateinisch.** Wiederholung der regelmässigen Formenlehre; Deponentia; das Notwendigste der unregelmässigen Formenlehre in Deklination, Konjugation und Komparation; die Konstruktionen des Accus. c. Inf., Partic. konjunct., Abl. absol., sowie die Regeln über die Städtenamen und einige notwendige stilistische Anweisungen im Anschluss an den Lesestoff. Übungsbeispiele aus Kuhr; Lektüre: Weller I. III. VI. VII. IX. (Schultz, Kuhr, Weller.) 8 Std. Lietz.

4. **Erdkunde.** Physische und politische Erdkunde Deutschlands. Einführung in das Verständnis des Globus und der Karten. (Daniel.) 2 Std. Lietz.

5. **Rechnen.** Teilbarkeit der Zahlen. Gemeine Brüche. Einfache Regeldetri. Die deutschen Mafse, Gewichte und Münzen. Alle 14 Tage ein Extemporale. 4 Std. Kirchhoff.

6. **Naturbeschreibung.** Beschreibung und Vergleichung ausgewählter Pflanzen. Beschreibung wichtiger Wirbeltiere. Erweiterung der morphologischen und biologischen Begriffe. Begriff der Gattung. Grundzüge des Knochenbaues beim Menschen. Schematisches Zeichnen. 2 Std. Kirchhoff.

7. **Zeichnen.** Form und Richtung der Linien; deren Teilung. Winkel. Quadrat, gleichseitiges Dreieck, regelmässiges Sechs- und Achteck. Sternfiguren und Bandverschlingungen. Der Kreis. Kreisbogen. Rosetten. Ellipse. Vasenformen. Symmetrische Blattformen. 2 Std. Müller.

8. **Schreiben.** Deutsche und lateinische Schrift. 2 Std. Müller.

9. **Singen.** Dur- und Moll-Tonleitern nebst den Akkorden. Übungen im Singen nach Noten. Einübung zweistimmiger Choräle und Volkslieder. 2 Std. Kirchhoff.

SEXTA.

Ordinarius: Dr. Wehner.

1. **Religion.** Biblische Geschichten des Alten Testaments nach Zahn. Zu den Hauptfesten die betreffenden Geschichten des Neuen Testaments. 1. Hauptstück mit Erklärung, 2. und 3. ohne diese. Lernen von Katechismussprüchen und von 4 Liedern nach dem Kanon. 3 Std. Kirchhoff.

2. **Deutsch.** Redeteile und Glieder des einfachen Satzes; Unterscheidung der starken und schwachen Flexion. Übungen im Lesen, Wiedererzählen des Gelesenen, Deklamierübungen. Lebensbilder aus der vaterländischen Geschichte. Wöchentliche Diktate. Gedichte nach dem Kanon. (Hopf und Paulsiek.) 4 St. Dr. Wehner.

3. **Lateinisch.** Formenlehre mit strengster Beschränkung auf das Regelmässige und mit Ausschluss der Deponentia; mündliche und schriftliche Übungen im Übersetzen. Wöchentlich 1 Extemporale. (Schultz, Kuhr.) 8 Std. Dr. Wehner.

4. **Erdkunde.** Grundbegriffe der physischen und mathematischen Erdkunde in Anlehnung an die nächste örtliche Umgebung. Erste Anleitung zum Verständnis des Globus und der Karte. Oro- und hydrographische Verhältnisse der Erdoberfläche im Allgemeinen. Heimatkunde. 2 Std. Kirchhoff.

5. **Rechnen.** Wiederholung der Grundrechnungen mit ganzen Zahlen, unbenannten und benannten. Die deutschen Mafse, Gewichte und Münzen, nebst Übungen der decimalen Schreibweisen und der einfachsten decimalen Rechnungen. Alle 14 Tage ein Extemporale. 4 Std. Kirchhoff.

6. **Naturbeschreibung.** Beschreibung ausgewählter Pflanzen. Beschreibung ausgewählter Säugetiere und Vögel. Einfachste morphologische und biologische Begriffe. Begriff der Art. 2 Std. Kirchhoff.

7. **Schreiben.** Deutsche und lateinische Schrift. 2 Std. Müller.

8. **Singen.** Gehör- und Treffübungen. Durtonleitern und Akkorde. Einübung von einstimmigen Chorälen und Volksliedern. 2 Std. Kirchhoff.

Als schriftliche Arbeit treten für alle Klassenstufen hinzu die deutschen Berichte, deren in jedem der vorgeschriebenen Lehrfächer 4 während des Schuljahres angefertigt werden.

Von der Teilnahme am Religionsunterricht ist kein Schüler befreit worden.

Den Turnunterricht erteilte in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Düsing Herr Kirchhoff.

Im Sommer turnten die gesamten Schüler in wöchentlich drei Stunden; im Winter wurde abteilungsweise in der Turnhalle geturnt.

Die Unterstufe: Gangarten, Ordnungs- und Freiübungen (letztere auch mit Holzstäben), Freispringen, Klettern, Steigen, Übungen am Schwungseil, Reck, Barren und auf dem Schwebebaum.

Die Mittelstufe: Erweiterung der Übungen für die Unterstufe; dazu Übungen mit leichten Eisenstäben, im Sturmsprung, am Bock und an den Schaukelringen.

Die Oberstufe: Weitere Zusammensetzungen der Frei- und Ordnungsübungen. Dazu: Hantel- und Eisenstabübungen, namentlich mit Ausfall, Gerwerfen, Stabspringen und Übungen am Pferd und Kasten.

Die Turnspiele wurden im Sommer fleissig geübt. — Von der Teilnahme am Turnunterricht überhaupt waren 11 Schüler befreit, von der an den Gerätübungen 3.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

10. April 1893. Das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium fordert auf, Vorschläge für die bei den einzelnen Lehrfächern von dem Schuljahre 1894/95 ab notwendig scheinenden Änderungen in dem Bestande der Schulbücher und Hülfsmittel einzureichen.

17. April 1893. Der vorgeordnete Herr Minister ordnet die sofortige Ausstellung einer Bescheinigung nach bestandener Reifeprüfung für diejenigen Schüler an, welche sich dem Maschinenbaufache widmen wollen.

19. April 1893. Das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium übersendet zur Kenntnisnahme und entsprechender Mitteilung an die interessierten Schüler die von dem Herrn Finanzminister für die Annahme von Supernumeraren bei der Verwaltung der indirekten Steuern getroffenen Bestimmungen.

29. Mai 1893. Dasselbe fordert zur Äusserung auf über die durch Einführung der mitteleuropäischen Zeiteinteilung in Bezug auf die höheren Schulen gemachten Erfahrungen.

17. Juni 1893. Dasselbe teilt mit, dass unter Abänderung der Verfügung vom 19. Dezember 1892 die Weihnachtsferien von Sonnabend, den 23. Dezember 1893 bis Montag, den 8. Januar 1894 früh dauern sollen.

23. Juni 1893. Der vorgeordnete Herr Minister verfügt, dass diejenigen Schüler, welche im Ostertermin d. J. die Abschlussprüfung nicht bestanden haben und die Sekunda bereits $1^1/_2$ Jahre besuchen, jene auf Antrag ausnahmsweise am Schlusse des Sommerhalbjahres wiederholen können.

10. Juli 1893. Derselbe verfügt die gleichmässige Beachtung des Erlasses vom 16. Juni 1892, betreffend den Ausfall des Nachmittags-Unterrichts an heissen Tagen.

11. Juli 1893. Derselbe verfügt eine so rechtzeitige Vorbereitung und Bekanntmachung eines Wechsels der Lehrbücher, dass die Beschaffung dieser schon vor Beginn des Unterrichts erfolgen kann.

17. Juli 1893. Derselbe bestimmt, dass Zeugnisse über den Ausfall der Abschlussprüfung kostenfrei für alle Schüler auszustellen sind, welche ihre Studien auf der Anstalt fortsetzen, dagegen Gebühren zu erheben sind, wenn der Betreffende nach der Abschlussprüfung die Anstalt verlässt und nach den an den einzelnen Anstalten geltenden Bestimmungen für Abgangszeugnisse Gebühren erhoben werden.

25. Juli 1893. Das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium fordert eine Übersicht über die an der Anstalt im Gebrauch befindlichen Schulbücher ein.

28. Juli 1893. Der vorgeordnete Herr Minister will die Abschlussprüfung zum Michaelistermin auch auf diejenigen Schüler der Untersekunda ausgedehnt sehen, welche zu Ostern trotz einjährigen Besuchs dieser Klasse in die Prüfung nicht eingetreten sind.

22. August 1893. Derselbe macht die Befolgung der im vorigen Jahre erlassenen Verfügungen wegen Kürzung des Schulunterrichts an heissen Tagen zur strengsten Pflicht.

2. September 1893. Der Direktor wird zum stellvertretenden Königlichen Kommissarius bei der Abschlussprüfung am Michaelistermin ernannt.

14. September 1893. Der vorgeordnete Herr Minister giebt von der Einrichtung hygienischer Kurse an den Universitäten Breslau, Königsberg, Kiel, Berlin und Marburg Kenntnis und empfiehlt deren gelegentliche Benutzung seitens der Direktoren und Lehrer der höheren Schulen.

7. Oktober 1893. Derselbe gestattet den ferneren Wegfall der öffentlichen Prüfungen an allen höheren Schulen, an denen nicht die Beibehaltung der alten Einrichtung ausdrücklich gewünscht wird.

12. Oktober 1893. Der Hochedle Rat übersendet die Abschrift einer Berechnung der Gehälter der Lehrer der Anstalt nach dem neuen Normaletat zugleich mit der Mitteilung, dass die städtischen Körperschaften die Einführung des Systems der Alterszulagen beschlossen haben.

11. November 1893. Der vorgeordnete Herr Minister regelt das Verfahren für die Prüfung solcher jungen Leute neu, welche, ohne Schüler eines Gymnasiums oder eines Realgymnasiums zu sein, ein Zeugnis der Reife für die Prima dieser Anstalten erwerben wollen.

27. November 1893. Das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium genehmigt von Ostern 1894 ab die Einführung folgender Lehrbücher: Otto Schulz, Biblisches Lesebuch; Chr. Ostermann, Lateinisches Übungsbuch, III. Abteilung (Quarta); Schönborn, Lateinisches Lesebuch, Teil I (Sexta); von Seydlitz, Geographie, Ausgabe D, Teil 1, 2, 3; Lieber und von Lühmann, Leitfaden der Elementar-Mathematik, I, II, III.

27. Dezember 1893. Der vorgeordnete Herr Minister verfügt die Ausstellung eines vorläufigen Zeugnisses über den Ausfall der Prüfung für Obersekunda an solche Schüler, welche mit Beginn des folgenden Vierteljahrs eine Lehrstelle in einer Apotheke antreten wollen.

13. Januar 1894. Das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium teilt die Ferienordnung für 1894 mit: Osterferien Mittwoch den 21. März mittags bis Freitag den 6. April früh; Pfingstferien Freitag den 11. Mai nachmittags bis Donnerstag den 17. Mai früh; Sommerferien Dienstag den 3. Juli nachmittags bis Freitag den 3. August früh; Herbstferien Mittwoch den 26. September mittags bis Donnerstag den 11. Oktober früh; Weihnachtsferien Freitag den 21. Dezember nachmittags bis Dienstag den 8. Januar 1895 früh.

13. Januar 1894. Der vorgeordnete Herr Minister bestimmt, dass die über das Ergebnis der Abschlussprüfung nach dem sechsten Jahrgange neunstufiger höheren Schulen auszustellenden Zeugnisse an sich als Abgangszeugnisse nicht gelten können, sondern dass diesen ein besonderer entsprechender Vermerk hinzugefügt werden muss.

25. Januar 1894. Der Direktor wird zum stellvertretenden Königlichen Kommissarius bei der Abschlussprüfung am Ostertermin d. J. ernannt.

22. Februar 1894. Der Hochedle Rat teilt mit, dass der wissenschaftliche Hülfslehrer Herr Dr. Otto Wehner als Oberlehrer an der Anstalt bestätigt und sein Amtsantritt auf den 1. Februar festgesetzt worden ist.

III. Geschichte der Schule.

Aus dem Vorjahre 1892/93 ist nachzutragen, dass am 20. März unter dem Vorsitze des Direktors als stellvertretenden Königlichen Kommissars und in Gegenwart des Bürgermeisters Herrn Brandenburg als städtischen Kommissars die mündliche Reifeprüfung der drei Oberprimaner Hans Teichen aus Stralsund, Hugo Otte aus Bookhagen und Heinrich Reckling aus Damgarten stattfand, welche sämtlich, der letzte unter Befreiung von der mündlichen Prüfung, das Zeugnis der Reife erhielten. Sie wurden am 27. März von der Schule entlassen, welche am 29. desselben Monats das Schuljahr mit der üblichen Verkündigung der Versetzungen und Verteilung der Zeugnisse schloss.

Das neue Schuljahr begann, nachdem bereits am 29. März die Aufnahmeprüfung für die in die Sexta eintretenden einheimischen Schüler, für die übrigen am 10. April abgehalten worden war, am 11. April. Leider erfuhr der Unterricht bereits nach wenigen Wochen dadurch eine erhebliche Störung, dass Herr Oberlehrer Dr. Gallert wieder erkrankte und vom 29. April an der Schule fernblieb, indem er unter Benutzung des von der vorgesetzten Behörde ihm bis zu den Sommerferien gewährten Urlaubs im Süden Genesung suchte. Aber auch nach seiner Rückkehr stellte sich für ihn die Notwendigkeit heraus, zum Zwecke einer weiteren Erholung einen Nachurlaub zu erbitten, der bis zu den Michaelisferien sich erstreckte; erst dann konnte Herr Dr. Gallert den Unterricht, wenn auch in beschränkter Stundenzahl, wieder aufnehmen und hat ihn, zu unser aller Freude, während des Winterhalbjahrs ohne Störung durchgeführt. Seine Stunden wurden im Sommer vom Lehrerkollegium übernommen. Auch sonst hat mehrfach Krankheit Mitglieder dieses der Schule ferngehalten; Herr Oberlehrer Hübner erkrankte am 1. Mai und konnte erst am 1. Juni einige Stunden, vom 5. ab sämtliche wieder erteilen, und derselbe Herr fehlte aus dem gleichen Grunde vom 14. bis 19. August. Die Influenza verhinderte die Herren Dr. Wehner an der Erteilung des Unterrichts vom 10. bis 18. Dezember, Oberlehrer Düsing vom 29. November bis 6. Dezember, Professor Dr. Schütte vom 5. bis 14. Dezember; Herr Müller musste wegen Krankheit in der Familie vom 23. bis 29. November der Anstalt

fernbleiben. Herr Dr. Düsing wurde ausserdem durch Krankheit vom 20. bis 23. Dezember und vom 8. bis 10. Januar, Herr Dr. Bäker vom 20. bis 23. Januar und Herr Dr. Badke durch einen Trauerfall vom 8. bis 13. Februar der Schule ferngehalten; Herr Lietz endlich wurde für die Zeit vom 15. bis 22. Januar zur Teilnahme an den Sitzungen des Schwurgerichts nach Greifswald berufen. Der Unterzeichnete trat als Hülfsschöffe 1893 zwei Male in Thätigkeit. Das Lehrerkollegium übernahm die Vertretungen.

Für die Erteilung des durch die neuen Lehrpläne erweiterten Turnunterrichts erschien es notwendig eine zweite Lehrkraft zu gewinnen, und so wurde von den Bewerbern Herr Oberlehrer Dr. Gauger zur Teilnahme an dem Kursus der Turnlehrer-Bildungsanstalt während des Winterhalbjahrs 1893/94 einberufen. Seine Stunden übernahmen die Herren Prof. Dr. Schütte, Prof. Dr. Gentzen und Oberlehrer Hübner; und da diese Kräfte für die Erteilung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts nicht völlig ausreichten, wurde von Einem Hochedlen Rate die Beschäftigung des wissenschaftlichen Hülfslehrers Herrn Horn in 6 wöchentlichen Stunden für diese Zeit genehmigt. Ausserdem überwies zu Michaelis das Königliche Provinzial-Schulkollegium den Schulamtskandidaten Herrn Gohdes, welcher in Greifswald sein Seminarjahr erledigt hatte, unsrer Anstalt zur weiteren Ausbildung während des Probejahrs, und hierdurch wurde es möglich, für Herrn Dr. Gallert eine wesentliche Erleichterung während des Winters zu schaffen.

Bald nach Beginn des neuen Schuljahrs traten während der folgenden Monate wiederholt die Lehrer zu Fachberatungen zusammen, in welchen die Frage nach der Einführung neuer Lehrbücher, die den veränderten Lehraufgaben Rechnung trügen, erörtert wurde. Die bisher nach dieser Seite genehmigten Veränderungen sind unter den „Verfügungen“ verzeichnet.

Den üblichen Sommerausflug unternahmen am 20. Juni die oberen Klassen bis zur Obertertia unter Teilnahme des Unterzeichneten, der Ordinarien dieser Klassen und andrer Lehrer über Elmenhorst, wo die Bahn verlassen wurde, nach Abtshagen; in gleicher Weise die Untertertia und die beiden Quarten mit der Bahn bis Teschenhagen und von da nach Putbus, während die Schüler der Quinta und Sexta in Devin den Tag verbrachten.

Die Feier des Sedantages fand am Vormittage des 2. September in der Schule statt, wo vor versammelten Lehrern und Schülern Herr Oberlehrer Dr. Düsing eine auf die Bedeutung des Tages bezügliche Ansprache hielt; der Gesang des Liedes „Nun danket alle Gott“ leitete die Feier ein, der der „Wacht am Rhein“ schloss sie. Am Nachmittage vereinigten sich die Lehrer und deren Familien mit den Schülern, deren Angehörigen und zahlreichen anderen Freunden der Anstalt im „Elysium“, wo unter anderem der Gesangchor mehrere Lieder vortrug und ein nachfolgender Tanz die Anwesenden bis 11 Uhr zusammenhielt.

Am 13. September wurde unter dem Vorsitze des Königlichen Provinzial-Schulrats Herrn Dr. Bouterwek und in Gegenwart des Oberbürgermeisters Herrn Tamms die mündliche Reifeprüfung mit den Oberprimanern Georg Agahd aus Stralsund und Hugo Zillmer aus Freienwalde i. P. abgehalten und beide für reif erklärt. Sie wurden am 22. dess. M. nachmittags unter einer Ansprache des Unterzeichneten entlassen.

Am 25. September hielt der Unterzeichnete die mündliche Abschlussprüfung ab.

Das Winterhalbjahr begann, nachdem tags zuvor eine Aufnahmeprüfung stattgefunden hatte, am 17. Oktober. Bald darauf wurde eine ziemlich grosse Zahl auch unsrer Schüler der unteren Klassen von den in den weitesten Kreisen der Stadt und der Umgegend herrschenden Masern ergriffen, die aber, Gott sei Dank, so gutartig auftraten, dass wir keinen schweren Fall zu beklagen hatten.

Zur Vorfeier des Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers und Königs veranstaltete am 26. Januar die Schule eine musikalisch-deklamatorische Abendunterhaltung, bei welcher nach Ausführung des „Türkischen Marsches“ von Beethoven durch ein aus Schülern gebildetes Orchester der Gesangchor das von patriotischem Geiste durchwehte Werk „Der Gesang ein Begleiter durchs Leben“ von Knauer vortrug und Schüler der oberen Klassen die Deklamation des verbindenden Textes übernahmen. Die Aufführung erfreute sich eines zahlreichen Besuches; der nach Abzug der Kosten verbliebene Reinertrag ist für die Beschaffung von Prämien an

Abiturienten und einen Schüler des Gesangchors verwendet worden. Die Feier des Geburtstages selbst fand vormittags 1/2 9 Uhr statt, diesmal im engeren Kreise der Schule. Nach einem einleitenden gemeinsamen Gesange sprach Herr Prof. Dr. Gentzen über die Thätigkeit der Hohenzollern als Mehrer des Reiches nach aussen hin, worauf der Unterzeichnete in einer kurzen Ansprache auf die Hebung des geistigen Lebens in Preussen durch unser Fürstenhaus hinwies und ein Hoch auf Seine Majestät ausbrachte. Der gemeinsame Gesang des „Heil Dir im Siegerkranz" schloss die Feier.

Auch die Gedenktage aus dem Leben Kaiser Wilhelms I. und Kaiser Friedrichs III. wurden den Schülern durch kurze Ansprachen der Lehrer in den einzelnen Klassen bei Beginn des Unterrichts in pietätvolle Erinnerung gebracht.

Am 20. Februar wurde unter dem Vorsitze des Königlichen Provinzial-Schulrats Herrn Dr. Bouterwek und in Gegenwart des Oberbürgermeisters Herrn Tamms die mündliche Reifeprüfung der sieben Oberprimaner Georg Fischer, Franz Rahm, Bruno Oldenburg, Wilhelm Uerkvitz, sämtlich aus Stralsund, Hans Fischer aus Barth, Bruno Winkelmann aus Stettin, August Luchterhand aus Zansebuhr abgehalten; sämtliche Schüler erhielten das Zeugnis der Reife, die ersten fünf unter Befreiung von der ganzen mündlichen Prüfung. Ihre Entlassung fand am 3. März in einer grösseren Schulfeierlichkeit statt, welcher Vertreter des Hochedlen Rates, Eltern der Schüler und zahlreiche Freunde der Anstalt beiwohnten. Der Abiturient Rahm hielt die Abshiedsrede, der Primaner Wittmüss erwiderte ihm. Der Direktor legte den Scheidenden die Pflicht der Dankbarkeit gegen Elternhaus und Schule ans Herz und ermahnte sie, welchen Beruf sie auch erwählt hätten, unablässig an ihrer geistigen und sittlichen Vervollkommnung weiter zu arbeiten. Den ersten fünf konnte er als Andenken je ein Buch überreichen; ausserdem erhielten Prämien der Obersekundaner Karl Homann und die Untertertianer Heinrich Stabenow und Robert Otto. Gesang eröffnete und schloss die Feier.

Einer Veränderung im Bestande des Lehrerkollegiums muss hier noch gedacht werden. Herrn Oberlehrer Dr. Brügmann, welcher — s. Jahresbericht 1893 — seit dem 23. Mai 1892 durch Krankheit der Schule ferngehalten wurde, war es nicht vergönnt, in voller Gesundheit wieder in seine Berufsthätigkeit einzutreten, so dass von der vorgesetzten Behörde seine Versetzung in den Ruhestand zum 1. Februar 1894 ausgesprochen wurde. Herr Dr. Brügmann ist 27 Jahre an der Anstalt thätig gewesen; er darf des Dankes seiner zahlreichen Schüler sich versichert halten, welche sich mit seinen früheren Amtsgenossen zu dem Wunsche vereinigen, dass ihm ein freundlicher Lebensabend beschieden sein möge.

Zum 1. Februar d. J. wurde der bereits seit Michaelis 1892 an unserer Anstalt beschäftigte wissenschaftliche Hülfslehrer Herr Dr. Otto Wehner*), der im besonderen als Religionslehrer thätig gewesen ist, als Oberlehrer fest angestellt. Die Schule darf für die endgültige Regelung dieser Angelegenheit um so dankbarer sein, als gerade in diesem Lehrfache seit einer Reihe von Jahren der Unterricht in den oberen Klassen mehrfach einen Wechsel der Lehrer erfahren hatte.

Auch an dieser Stelle endlich soll nicht unerwähnt bleiben, dass die städtischen Behörden einen neuen Beweis ihrer altbewährten Fürsorge für das höhere Schulwesen der Stadt dadurch gegeben haben, dass sie mit der Einführung des neuen Normaletats vom 1. April 1893

---

*) Wilhelm Eckhard August Otto Wehner, geboren am 6. Mai 1863 zu Platvitz bei Bergen a. R., besuchte die Gymnasien zu Stralsund und Greifswald. Michaelis 1882 mit dem Zeugnis der Reife entlassen, studierte er in Greifswald, Rostock und Berlin bis Michaelis 1887. In Greifswald wurde er Michaelis 1887 zum Doctor promoviert, und bestand im Juni 1888 das Staatsexamen. Nach Ableistung des Probejahres am Realprogymnasium zu Greifswald, wurde er dort zuerst unentgeltlich, von Ostern 1890 ab als besoldeter wissenschaftlicher Hülfslehrer beschäftigt. Ostern 1892 bis Michaelis 1892 war er in gleicher Eigenschaft an der Oberrealschule in Barmen-Wupperfeld, von Michaelis 1892 bis zum 1. Februar 1894 in Vertretung eines erkrankten Oberlehrers am Realgymnasium in Stralsund. Hier erhielt er unter dem 1. Februar 1894 eine Oberlehrerstelle. Veröffentlicht hat er: „Über zwei Denkschriften Radetzkys aus dem Frühjahr 1813", Greifswald 1887 (Dissertation) und „Karl Johann und Bülow in den ersten Tagen nach der Schlacht bei Grossbeeren" (Jahresbericht des Gymnasiums zu Greifswald 1892).

ab zugleich für das System der Alterszulagen statt des bisherigen Stellenetats sich entschieden haben. Der Unterzeichnete nimmt Veranlassung, dem Danke, welchen er im Vereine mit dem Lehrerkollegium bereits früher ausgesprochen hat, hier einen wiederholten Ausdruck zu geben. Auch die für den 1. April d. J. in Aussicht gestellte Einführung der Reliktenversorgung nach dem Gesetz vom 20. Mai 1882 ist in gleicher Weise mit dankbarer Freude begrüsst worden.

Das Schuljahr erreicht am 21. März seinen Abschluss.

Verwaltung der Stiftungen.

1) Das Vermögen der Witwen- und Waisenkasse betrug am 31. Dezember 1892 (s. das vorige Programm) . . . . . 4989,07 Mark
Es sind eingenommen an Beiträgen, Gehaltserhöhungen, Zinsen u. s. w. . . . . 515,01 „
5504,08 Mark
Es sind ausgegeben an zwei Witwen . . . . . 216,00 „
so dass das Vermögen am 31. Dezember 1893 betrug . . . **5288,08** Mark

2) Der Stipendienfonds (Stiftung alter Realschüler) betrug am 31. Dezember 1893 (s. das vorige Programm) . . . . . 3657,78 Mark
Er wurde vermehrt
a. durch Zinsen um . . . . . 136,97 „
b. durch eine Konzerteinnahme um . . . . . 53,80 „
c. durch Geschenk der Osterabiturienten um . . . . 9,00 „
zusammen 3857,55 Mark
Es ist ausgegeben ein Stipendium mit . . . . . 136,00 „
so dass der Fonds am 31. Dezember 1893 betrug . . **3721,55** Mark.

IV. Statistische Mitteilungen.

A. Frequenztabelle für das Schuljahr 1893/94.

	I.	IIA.	IIB_1.	IIB_2.	$IIIA_1$.	$IIIA_2$.	$IIIB_1$.	$IIIB_2$.	IV.		V.	VI.	Sa
1. Bestand am 1. Februar 1893 .	16	17	14	14	25	26	24	22	37		38	40	273
2. Abgang bis Schluss des Schuljahres 1892/93	3	—	—	—	1	2	—	—	—		—	7	13
3a. Zugang durch Versetzung Ostern 1893	11	18	17	20	16	21	27		30		29	—	216
Nach Versetzung abgegangen .	—	5	2	5	1	3	5		3		2	—	26
3b. Zugang durch Aufnahme Ostern 1893	—	2	—	—	—	—	1		1	3	1	17	25
4. Frequenz Anfang des Schuljahres 1893/94	24	21	19	21	22	22	32		20	21	36	21	259
5. Zugang im Sommersemester .	—	1	—	1	1	—	1		—	—	—	2	6
6. Abgang im Sommersemester .	4	2	1	1	—	1	4		—	4	3	2	22
7a. Zugang durch Versetzung Mich.	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	
Nach Versetzung abgegangen .	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	
8. Frequenz Anfang des Wintersemesters	20	20	18	21	21	23	29		20	17	33	21	243
9. Zugang im Wintersemester . .	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	1	1
10. Abgang im Wintersemester . .	—	1	—	—	—	—	—		1	—	—	1	3
11. Frequenz am 1. Februar 1894 .	20	19	18	21	21	23	29		19	17	33	21	241
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1894	18,3	17,2	16,3	16,6	15,3	15,5	14,7		13,1	13,6	11,9	10,6	

B. Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	Evangelische.	Katholische.	Dissidenten.	Juden.	Einheimische.	Auswärtige.	Ausländer.	Sa.
1. Am Anf. d. Sommersemesters	254	1	—	4	173	84	2	259
2. Am Anf. d. Wintersemesters	239	—	—	4	164	77	2	243
3. Am 1. Februar 1894 . . .	237	—	—	4	162	77	2	241

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1893: 18, Michaelis: 2 Schüler.

Zu Ostern 1893 und im Laufe des Schuljahres 1893/94 verliessen die Anstalt 64 Schüler. Unter diesen befanden sich 5 Abiturienten:

No.	Namen.	Geburts-Ort.	Geburts-Tag.	Bekenntnis.	Stand und Wohnort des Vaters.		Jahre Schule.	Jahre I.	Beruf.
	Ostern 1893:								
256	Hans Teichen	Stralsund	18. Mai 1872	ev.	† Maurermstr.	Stralsund	8	$2^1/_2$	Baufach.
257	Hugo Otte	Bookhagen	1. Mai 1871	„	Oberamtm., Kgl. Domänenpächter	Bookhagen	10	$2^1/_2$	Soldat.
258	Heinrich Reckling	Damgarten	5. Aug. 1874	„	Uhrmacher	Damgarten	2	2	Kaufmann.
	Michaelis 1893:								
259	Georg Agahd	Stralsund	6. April 1875	„	Polizei-Wachtmeister	Stralsund	$9^1/_2$	2	Postfach.
260	Hugo Zillmer	Freienwalde i/P.	17. Nov. 1873	„	Rentner	Freienwalde i/P.	1	1	Soldat.
	Dazu kommen:								
	Ostern 1894:								
261	Bruno Winckelmann	Stettin	16. Mai 1873	„	Gymn.-Prof., Dr. phil.	Stettin	2	2	Soldat.
262	Georg Fischer	Guben	23. April 1876	„	Kgl. Eisenb.-Betr.-Kontr.	Stralsund	$6^1/_2$	2	Elektrotechniker
263	Franz Rahm	Stralsund	10. Mai 1875	„	Viehhändler	Stralsund	9	2	Baufach.
264	Benno Oldenburg	Plummendorf	19. Juni 1876	„	Rentner	Stralsund	$2^1/_2$	2	Soldat.
265	Hans Fischer	Barth	31. Okt. 1875	„	Rentner	Barth	3	2	Eisenbahndienst.
266	Wilhelm Uerkvitz	Stralsund	27. Aug. 1875	„	Rentner	Stralsund	9	2	Studium der neueren Sprachen.
267	August Luchterhand	Steinhagen	31. März 1875	„	Gutsinspektor	Zansebuhr	9	2	Postdienst.

V. Sammlung von Lehrmitteln.

Die **Lehrer-Bibliothek,** unter Aufsicht des Herrn Prof. Dr. Lüdke, wurde vermehrt durch: Robert König, Deutsche Litteraturgeschichte. 20. Aufl. — Schäfer, Französische Schulgrammatik. 2. Aufl. Berlin, Winkelmann & Söhne. — Flügel, Englisch-deutsches und deutsch-englisches Wörterbuch. 4. Aufl. 3 Teile. Braunschweig, Westermann. — Ivan von Müller, Griechische und lateinische Sprachwissenschaft. 2. Aufl. München, 1890—93. — Seyffert, Lateinische Grammatik. 37. Aufl. — Ostermann, Lateinisches Übungsbuch für Quarta. Neue Ausg. von Prof. Müller. Teubner 1893. — Ferdinand Schultz, Kleine lateinische Sprachlehre. 22. Ausg. besorgt von Wetzel. Paderborn 1893. — Meyer-Lübke, Grammatik der romanischen Sprachen. 1. Bd. Lautlehre. 1890. — Calwer, Handbuch der Bibel-Erklärung. 2 Bde. Stuttgart 1886. — H. A. W. Meyer, Kritisch-exegetischer Kommentar über das Neue Testament. (Matthäus-Evangelium. Die Evangelien des Markus und Lukas. 8. Aufl. Johannes-Evangelium. Brief an die Römer. 8. Aufl. Brief an die Galater.) — Rethwisch, Deutschlands höheres Schulwesen im 19. Jahrhundert. Berlin 1893. — Rembrandt als Erzieher. Von einem Deutschen. 38. Aufl. Leipzig 1891. — Fortsetzung der „Politischen Korrespondenz Friedrichs des Grossen". 20. Bd. — Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Bd. Leipzig 1892. — Papperitz,

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Bd. Leipzig 1893. — Gräfin von Voss, Neun und sechzig Jahre am Preussischen Hofe. Leipzig 1887. — Lehmann, Kulturgeschichtliche Bilder. Nebst Kommentar. 3. Heft. — Bruno Gebhardt, Handbuch der deutschen Geschichte. 2 Bde. — Graf Stillfried Alcantara und Prof. Kugler, Die Hohenzollern und das deutsche Vaterland. 4. Aufl. München 1886. — Rothert, Karten und Skizzen aus der vaterländischen Geschichte der letzten 100 Jahre. — Daniel, Deutschland nach seinen physischen und politischen Verhältnissen. 6. Aufl., bearbeitet von Prof. Voltz. 1. Bd. — Schneller, Kennst du das Land? — Heinrich Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Leipzig 1890. — Gerhard, Geschichte der Physik. Leipzig 1892. — Remsen, Einleitung in das Studium der Chemie. Tübingen 1887. — Ost, Lehrbuch der technischen Chemie. Berlin 1890. — Leunis, Synopsis der Thierkunde. 3. Aufl. 2 Bde. — Fleckeisen und Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik. — Schenckendorff und Schmidt, Über Jugend- und Volksspiele. 2. Jahrg.

An Geschenken erhielt die Bibliothek:

Vom Herrn Dr. Struck: Die Schlacht bei Nördlingen. Stralsund 1893. — Vom Herrn Direktor Prof. Dr. Thümen: Über Jugend- und Volksspiele von E. von Schenckendorff und Schmidt. II. Jahrg. 1893. — Von dem Herrn Medizinalrat von Haselberg: Zeitschrift für Ethnologie von A. Bastian, R. Hartmann, R. Virchow, A. Voss. Vom 18. Jahrgang an. — Von dem Herrn Literaten Schütte: Aus dem Jahre des Schreckens 1793.

Die **Schüler-Bibliothek** zählt jetzt 1861 Bände.

Der **physikalische Apparat,** unter Aufsicht des Herrn Prof. Dr. Schütte, wurde vermehrt um: Brückenwage, Stechheber, Sirene mit Zählwerk, Brenner für sensitive Flammen, Taschenspektroskop, Hoffmann'sches Voltameter, Trockenelement.

Das **chemische Kabinet,** unter Aufsicht des Herrn Oberlehrer Hübner, erfuhr die notwendigsten Ergänzungen an Chemikalien.

Das **Naturalien-Kabinet,** unter Aufsicht von Herrn Dr. Gauger, wurde durch Neuanschaffungen und Zuwendungen erweitert. Angeschafft wurden Demonstrations-Modelle von Aspidium Filix mas, Pinus silvestris, Orchis militaris, Hypericum perforatum, Amanita muscaria, Cantharellus cibarius, Boletus edulis, Agaricus campestris, Aecidium berberidis und die zugehörigen Nachbildungen der Aecidien-, Uredo- und Puccinia-Sporen. An zoologischen Präparaten: Canis vulpes, Accipenser sturio, Pleuronectes flesus, Perca fluviatilis, Esox lucius, Pelagia noctiluca. Ausserdem schenkten Herr Landrat ven Hagenow 1 Falco tinnunculus und 1 Astur nisus, Herr Kommerzienrat Karl Becker 1 Uromastix spinipes, Herr Gutsbesitzer Baier-Natzevitz 1 Circus rufus, Herr Hauptmann von Knesebeck 1 Phasianus colchicus, 1 Otus brachyotus, Herr Kaufmann Rudolf Schultz 1 Delphinus communis, der Obertertianer Dettmann 1 Nucifraga caryocatactes, der Obertertianer Wilhelm Fock eine Steinaxt, der Untertertianer Borck eine Sammlung von Fischen und der Quartaner Wasow Hals und Kopf vom Albatros.

Der **Zeichenapparat,** unter Aufsicht des Herrn Zeichenlehrers Müller, wurde vermehrt durch stilisierte Naturformen von Thielmann und Seibel, die Anfertigung der Maschinen von Weyde und Weickert und verschiedene Modelle.

Für die **Sammlung der Noten,** unter Aufsicht des Herrn Kirchhoff, wurden angeschafft: Der letzte Krieg in Wort und Lied von G. W. C. Schmidt, Partitur. — Der Herr ist mein Hirt, Motette von B. Klein, Stimmen.

VI. Stiftungen und Unterstützungen der Schüler.

Über die Stiftungen der Schule (Witwen- und Waisenkasse und Stipendienfonds) ist oben berichtet.

Nach Beschluss des Scholarchats genossen im abgelaufenen Schuljahre 12 Schüler die Wohlthat der ganzen, 11 die der halben Freischule.

Diese wird auf den Vorschlag des Lehrer-Kollegiums stets auf ein Jahr bewilligt. Die Freischul-Gesuche sind spätestens vier Wochen vor Beginn des neuen Schuljahres bei dem Unterzeichneten einzureichen. (Adresse: An das Scholarchat des Realgymnasiums z. H. des Direktors Prof. Dr. Thümen.)

VII. Mitteilungen an die Eltern.

Ich richte an die Eltern unserer Schüler und die Leiter von Pensionen die Bitte, darauf zu halten, dass die Schüler pünktlich zu der ihnen festzusetzenden Zeit von dem Spaziergange oder der sonst ihnen gewährten Erholung nach Hause zur Arbeit zurückkehren. Die Lage des Unterrichts gestattet allerdings nicht, die gleiche Zeit an allen Tagen hierfür festzusetzen; indessen schädigt diese Ungleichheit nicht die Absicht, dass planloses Umherlaufen vermieden, ganz besonders aber, dass diese Gewöhnung an Pünktlichkeit und Ordnung ein Antrieb zu gleichmässigem Fleisse werde.

Ich nehme auch Veranlassung, auf die Bestimmung des § 3 der Schulordnung hinzuweisen: „Jeder Schüler, der nicht bei seinen Eltern wohnt, ist in eine nach dem Ermessen des Direktors geeignete Aufsicht und Kost zu geben; dieselbe darf ohne die Genehmigung des Direktors nicht gewechselt werden.“

Das neue Schuljahr beginnt Freitag, den 6. April. Die Prüfung neuer Schüler findet für die einheimischen Sextaner Mittwoch, den 21. März, nachmittags 3 Uhr, für alle übrigen Schüler Donnerstag, den 5. April, vormittags 9 Uhr, in der Anstalt statt. Bei der Anmeldung sind das Tauf- (Geburts-), zweite Impfzeugnis und ein ordnungsmässiges Abgangs-Zeugnis der früher besuchten Schule mitzubringen.

Prof. Dr. Thümen,
Direktor.

Verzeichnis der Schüler.

(Bestand am 1. Februar 1894.)

Prima.

1. Bruno Winckelmann aus Stettin.
2. Georg Fischer.
3. Franz Rahm.
4. Benno Oldenburg.
5. Hans Fischer aus Barth.
6. Wilhelm Uerkvitz.
7. August Luchterhand.
8. Günther v. Behr aus Bandelin.
9. August Buchwald.
10. Erich Gentzen.
11. Albert Müller aus Loitz.
12. Hans Dircks aus Zingst.
13. Emil Fischer aus Barth.
14. Werner Hagen.
15. Otto Juhl aus Langendorf.
16. Walther Kliesow.
17. Karl Rust aus Wolgast.
18. Hans Sembritzki aus Prerow.
19. Max Wegner.
20. Reinhold Wittmüss.

Obersekunda.

1. Ernst Klüss.
2. Hugo Bleudorn aus Reinberg.
3. Fritz Buchholz.
4. Ernst Büchsel.
5. Emil Dibbelt aus Greifswald.
6. Kurt Fischer.
7. Karl Fouquet aus Grimmen.
8. Karl Fredenhagen.
9. Walter Gruel aus Damgarten.
10. Bruno Herzberg.
11. Karl Homann.
12. Hans Köppen.
13. Karl Millahn aus Barth.
14. Gerhard v. Missbach a. Richtenbg.
15. Max Petersdorff aus Wolgast.
16. Bruno Sandhop.
17. Paul Schröder aus Gr.-Ernsthof.
18. Karl Schulz.
19. Harry Vilmow.

Untersekunda 1.

1. Hans Müller.
2. Erich Agahd.
3. Otto Bigalke.
4. Friedrich Bollow aus Dussvitz.
5. Hans Dehmlow.
6. Gustav Dittmer aus Loitz.
7. Richard Foerster.
8. Walter Fredenhagen.
9. Richard Frese aus Stadtkoppel.
10. Adolf Harms aus Krummenhagen.
11. Franz Joseph.
12. Paul Klickow.
13. Leo Leith.
14. Alwin Lorgus.
15. Hermann Mierendorff.
16. Paul Otte aus Gummanz a. R.
17. Julius Rinck aus Varbelvitz a. R.
18. Franz Tamm.

Untersekunda 2.

1. Otto Weiergang aus Berlin.
2. Hermann Anders.
3. Otto Baack.
4. Paul Behrens aus Grimmen.
5. Hans Bollow aus Bergen.
6. Gustav Broder aus Ückermünde.
7. Wilhelm Bunge.
8. Karl Froelich.
9. Gustav Görs.
10. Max Gottschalk aus Kaiseritz.
11. Adalbert Gronow aus Varnkevitz.
12. Richard Haase.
13. Karl Hansen.
14. Ernst Heuer aus Tribsees.
15. Gustav Joseph.
16. Hans Krohn.
17. Wilhelm Leewe.
18. Paul Michaelis.
19. Ernst Riedel aus Schlemmin.
20. Ernst Wagner.
21. Karl Wittmüss.

Obertertia 1.

1. Franz Klüss.
2. Wilhelm Becker.
3. Hans Bredereck.
4. Karl Buchholz.
5. Albert Fock.
6. Heinrich Gründemann.
7. Otto Herbst.
8. Emil Hoffmann.
9. Werner Juhl aus Langendorf.
10. Wilhelm Klein aus Wollin auf Wittow.
11. Max Köppen.
12. Ernst Krause.
13. Fritz Krull.
14. Emil Kücken aus Lietzow a. R.
15. Karl Ludewig aus Tribsees.
16. Wilhelm Rasmus.
17. Ernst Rassow.
18. Friedrich Riedel aus Schlemmin.
19. Max Rubarth.
20. Karl Segler aus Garz a. R.
21. Max Vilmow.

Obertertia 2.

1. Bruno Kurth.
2. Erich Asser.
3. Karl Becker.
4. Paul Berg.
5. Walter Bernick.
6. Ulrich Blaudow.
7. Otto v. Boeckmann aus Grimmen.
8. Albert Brabandt.
9. Ernst Dettmann.
10. Kurt Eisenmann aus Berlin.
11. Karl Fock aus Wittenfelde.
12. Erich Hagemeister.
13. Hans Hahn.
14. Heino Hahn.
15. Otto Honig.
16. Hans Leith.
17. Franz Mayer.
18. Bruno Ohrloff.
19. Hermann Pauels.
20. Paul Rabe.
21. Ernst Schmietendorff.
22. Hermann Tiburtius.
23. Johannes Westphal aus Gross-Lichterfelde.

Untertertia.

1. Heinrich Stabenow.
2. Max Blochert aus Grimmen.
3. Fritz Bödke.
4. Gustav Borck.
5. Karl Brandt aus Grimmen.
6. Rudolf Braun.

7. Adolf Coppius.
8. Max Ebelt aus Wittenberg.
9. Karl Grüneberg aus Tribsees.
10. Georg Hanow aus Frankfurt a. M.
11. Willy Hennings.
12. Erich Heuer aus Tribsees.
13. Wilhelm Hildebrandt a. Grimmen.
14. Hans Holtz aus Poseritz a. Rüg.
15. Eduard Honig aus Bisdamitz auf Jasmund.
16. Karl Krumm.
17. Hermann Kruse.
18. Erich Nahmmacher aus Wolfsdorf b. Franzburg.
19. Robert Otto.
20. Gustav Peltzer.
21. Franz Peters aus Wittenhagen.
22. Rudolf Pieritz.
23. Richard Schultz.
24. Willy Siebenlist.
25. Paul Wallis.
26. Ernst Werner aus Zarrenzin.
27. Richard Wegner.
28. Erich Wendel.
29. Paul Weyer.

Quarta 1.

1. Kurt Ruttloff.
2. Bruno Asser.
3. Erich Badke.
4. Johannes Bast.
5. Heinrich von der Brelie.
6. Guntram Engert aus Yokohama.
7. Hugo Grählert.
8. Hans Grönlund aus Drosedow bei Loitz.
9. Hermann Lehl.
10. Ernst Mayer.
11. Martin Meyer.
12. Hugo Müller.
13. Werner Pauels.
14. Louis Schultz.
15. Friedrich Wilhelm Tiburtius.
16. Willy Vetterick aus Samtens.
17. Wilhelm Warnke.
18. Karl Wasow aus Altefähre.
19. Albert Wilde.

Quarta 2.

1. Otto Moeller aus Voigdehagen.
2. Ernst Bernick.
3. Robert Blaudow.
4. Eduard Dalmer.
5. Otto Diekelmann.
6. Karl Eichstedt aus Hohendorf.
7. Friedrich Eickmann aus Dolgemost.
8. Wilhelm v. Harder.
9. Bruno Heintze aus Nordamerika.
10. Walter Hindrichs.
11. Walter Kohn.
12. Friedrich Pagels.
13. Gustav Pauly.
14. Johannes Rinck aus Varbelvitz a. Rügen.
15. Karl Schubert.
16. Karl Weyer.
17. Friedrich Witt.

Quinta.

1. Otto Abshagen.
2. Ernst Arlt.
3. Theodor Becker.
4. Ernst Block.
5. Otto Brabandt.
6. Hermann Fredenhagen.
7. Heinrich Friedrichs a. Patzig a. R.
8. Walter Fritsche.
9. Paul Gerlitzky.
10. Georg Grätz.
11. Rudolf Hansen.
12. Emil Heuser.
13. Karl Heuser.
14. Walter Hopp.
15. Edmund Jaeger aus Vorwerck auf Jasmund.
16. Paul Juhl aus Langendorf.
17. Bruno Kempf.
18. Adelbert Krüger.
19. Karl Lubnow.
20. Hugo Lübke aus Middelhagen auf Mönchgut.
21. Peter Meukow aus Barhöft.
22. Erich Petschler.
23. Karl Retzlaff aus Gützkow.
24. Bruno Richert a. Neu-Elmenhorst.
25. Richard Schmidt a. Treptow a. T.
26. Otto Schröder.
27. Reinhold Schüler aus Mönchgut.
28. Hans Schütz.
29. Max Schultz aus Göhren auf Mönchgut.
30. Erich Stabenow.
31. Paul Vetterick aus Samtens a. R.
32. Ernst Wegner.
33. Wilhelm Wohlatz.

Sexta.

1. Rudolf Günther.
2. August Becker.
3. Wilhelm Berg.
4. Max Bliesath aus Nipmerow auf Jasmund.
5. Gustav Böttcher.
6. Arthur Jäger aus Vorwerk bei Sagard.
7. Kurt Joseph.
8. Adolf Kasten.
9. Arno Kagelmacher aus Vieregge a. Rügen.
10. Fritz Manke.
11. Wilhelm Mahnke.
12. Karl Meyer.
13. Karl Möller.
14. Otto Oldenroth.
15. Rudolf Otto aus Gummanz auf Jasmund.
16. Robert Plötz.
17. Walter Roloff.
18. Bruno Schluck.
19. Axel Sorge.
20. Theodor Westphal.
21. Otto Weyer.

Zu der

öffentlichen Prüfung

einiger Klassen des

Real-Gymnasiums zu Nordhausen,

welche

Freitag, den 1. April

veranstaltet werden soll,

sowie zu der

hiermit verbundenen Ausstellung der künstlerischen Leistungen der Schüler

ladet ergebenst ein

Dr. Hermann Wiesing,

Direktor.

Inhalt:

1. Über die Methoden zur Werthestimmung einfacher bestimmter Integrale. Vom wiss. Hülfslehrer Friedr. Franz Karl Heinr. Gebensleben.
2. Schulnachrichten von Ostern 1886 bis Ostern 1887, vom Direktor.

Nordhausen,

Druck von C. Kirchner.

1887.

887. Progr. № 249.

Über die Methoden zur Wertbestimmung einfacher bestimmter Integrale.

Die Aufgabe der Integralrechnung besteht im wesentlichen darin, aus gegebenen Differentialen erster oder höherer Ordnung die primitive Funktion, welche der Differentiation zu Grunde gelegen hat, wieder zu erlangen. Dies geschieht bekanntlich durch eine ein- rsp. mehrfache Summation, eine Operation, welche die Integration der Differentialfunktion genannt wird, während die dadurch erhaltenen Resultate die einfachen oder mehrfachen Integrale der letzteren heissen. Ihre Werte sind, (da $dF = d(F + \text{Const.})$ ist), für jede einzelne Integration stets noch durch Hinzufügung einer willkürlichen Konstanten zu vervollständigen, so dass sie, je nach der Wahl derselben, die allerverschiedensten sein können. Diese Unbestimmtheit verschwindet jedoch sofort, sobald wir die Integration zwischen bestimmten Grenzen ausführen. Wir erhalten dann aus der Differentialfunktion einen ganz bestimmten Integralwert, der nicht mehr von der Integrations-Variabeln abhängen kann, sondern lediglich von den Grenzwerten der letzteren und eventuell noch von veränderlichen Parametern. Die Wahl der Grenzwerte geht aus der Natur der Probleme hervor, in denen der Integrationskalkül in der mannigfachsten Weise zur Anwendung kommt. Es treten entweder die räumlichen recht- oder schiefwinkligen, polaren, elliptischen Koordinaten als Variabele in jenen Problemen auf, und dann erstreckt sich die Integration über bestimmte Kurven, Flächen oder Räume. Oder es kommt noch die Zeit als Variabele hinzu, wie in vielen mechanischen Problemen. Dann ist die Integralfunktion für gewisse bestimmte Zeiträume zu bilden. In der Theorie der Wärme, in der es sich um Temperaturdifferenzen handelt, müssen auch diese in der Grenzbestimmung auftreten etc. etc. —

Bestimmten Integralen begegnen wir in allen Teilen der mathematischen, theoretisch-physikalischen und technischen Wissenschaften. Die Rektifikationen, Quadraturen und Kubaturen, die Schwerpunkts- und Trägheits-Berechnungen führen auf bestimmte Integrale. Die Differentialgleichungen aller Teile der Physik sind gelöst, sobald wir die abhängige Variabele als Integral dargestellt haben, in dessen zu integrierender Funktion nur die unabhängigen Variabeln nebst ihren Differentialen auftreten. Als Summenausdruck für unendliche Reihen und Produkte leisten die bestimmten Integrale die wesentlichsten Dienste und erleichtern häufig die Umformung und überhaupt die Hantierung solcher aus unendlich vielen Gliedern oder Faktoren bestehenden Ausdrücke bedeutend. Bestimmte Integrale dienen zur Fixierung des Restes unendlicher Reihen, wenn sie beliebig abgebrochen werden. Bestimmte Integrale treten endlich als Koefficienten der trigonometrischen Reihen auf und erlangen dadurch schon eine grosse Wichtigkeit, da diese Reihen einen der mächtigsten Operationsfaktoren in dem höheren mathematischen Kalkül bilden. Umgekehrt geben die mechanischen, physikalischen, geometrischen Probleme, die Wahrscheinlichkeitsrechnung,

die Zahlentheorie, die Variationsrechnung eine deutliche Einsicht in das Wesen und die Beschaffenheit solcher bestimmter Integrationen.

Es ist nun das Bestreben von Euler, Cauchy, Legendre, Poisson, Laplace, Gauss, Schlömilch und anderer Mathematiker gewesen, auch vom rein mathematischen Standpunkte die Theoreme zu behandeln, welche ihre volle Bedeutung erst in ihrer Anwendung auf praktischem Gebiete erhalten. Sie haben die hauptsächlichsten Eigenschaften der bestimmten Integrale abgeleitet, die Beschaffenheit der zu integrierenden und der integrierten Funktionen in den verschiedensten Fällen in Bezug auf ihre Kontinuität untersucht und Methoden zur Bestimmung der Werte der Integrale aufgestellt. Es ist auf diese Weise eine Theorie der bestimmten Integrale entstanden. Dieselbe lässt aber besonders bezüglich der Wertbestimmungen ein grosses Feld der Thätigkeit offen. Während nämlich jedes Problem der Differentialrechnung, nach einem regelmässigen Verfahren in Angriff genommen, unter allen Umständen ausgeführt werden kann, ist die Rückkehr von einem Differential zu der primitiven Funktion nur in gewissen Fällen möglich. Es soll im Folgenden meine Aufgabe sein, die wichtigsten der zu einer Wertbestimmung der einfachen, bestimmten Integrale führenden Methoden zusammenzustellen, die hauptsächlichsten Eigentümlichkeiten anzuführen und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit und Gültigkeit bei der Wertbestimmung zu untersuchen.

Die Wertbestimmungsmethoden geben entweder den genauen Wert des bestimmten Integrals an oder nur einen angenäherten Wert desselben, wie er für viele praktische Bedürfnisse genügt. Danach können wir sie unter zwei grosse Gruppen bringen. Die erste kann abermals in zwei Abteilungen zerlegt werden. Die eine umschliesst alle die Methoden, welche auf geschlossene Ausdrücke führen, d. h. auf ein Aggregat aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Zu der andern gehören die Methoden, welche das Resultat in Form einer unendlichen Reihe geben. In geschlossener Form erscheinen die Werte der Integrale aller ganzen, rationalen, algebraischen Funktionen, ferner die Integralwerte, welche als Konplexe von Kreis- oder Exponentialfunktionen und Logarithmen im Verein mit algebraischen Funktionen auftreten. Mann kann diese Integrationen auch ansehen als Reduktionen auf gewisse Grundintegrale, welche in der Infinitesimalrechnung das bedeuten, was die Algebra mit Logarithmus, Arc tan, Arc sin etc. bezeichnet. Zur definitiven Wertbestimmung der Grundintegrale müssen dann die Reihenentwicklungsmethoden dienen. Solche Integralbestimmungen heissen trotzdem geschlossene, weil man sie für abgethan hält, wenn sie auf jene Grundintegrale rsp. Funktionen zurückgeführt sind, die in allen Gebieten der Mathematik so ausserordentlich häufig gebraucht werden, dass man ihnen bestimmte Funktionszeichen beigelegt und sie für die verschiedensten Werte der Argumente berechnet hat. Sie sind nun, wie wir ja wissen, nur specielle Fälle anderer allgemeinerer Funktionen, nämlich der elliptischen Integrale und Transcendenten. Dieselben sind nicht schon, wie die elementaren Funktionen aus der Algebra bekannt. Man ist erst auf dieselben durch die Integralrechnung gekommen. Ihre Werte für beliebige Argumente ergeben sich ebenfalls nur durch Reihenentwicklung, welche aber auch genau untersucht und durch Aufstellung von Zahlentafeln zu allen Rechenoperationen bequem gemacht sind. Die Werte aller Integrale daher, welche auf solche Funktionen führen, müssen konsequenter Weise, wie die der oben erörterten elementaren, als in geschlossener Form darstellbar angesehen werden. Ausser den elliptischen Integralen und ihren Verallgemeinerungen, auf welche wir hier nicht eingehen wollen, existiert nun noch eine ganze Reihe anderer, von ihnen ganz verschiedener Integralformen, welche im allgemeinen auch nur durch eine passende Entwicklung in eine kon-

vergente Reihe zu berechnen sind, aber in der Integralrechnung eine solch ausserordentlich wichtige Rolle spielen, dass sie als selbständige Transcendenten in dieselbe eingeführt wurden. Eine sehr grosse Anzahl von einfachen wie vielfachen Integralen sind auf diese Integrale reduzierbar und wird dann ebenfalls als abgethan und in geschlossener Form bestimmt angesehen. Die bedeutungsvollsten dieser Transcendenten sind die Gammafunktion, die Betafunktion, der Integrallogarithmus, der Integralsinus, der Integralkosinus. Alle diese Funktionen können neben den elliptischen Funktionen als mächtige Grundpfeiler der Integralrechnung angesehen werden.

Der Methoden, durch welche bestimmte Integrale in geschlossener Form sich ergeben, giebt es viele. Wir bilden daher aus ihnen noch drei Unterabteilungen.

a. Methoden, in welchen die Fundamentaleigenschaften der unbestimmten; b. Methoden, in denen die der bestimmten Integrale verwertet werden; c. Methoden, deren Eigentümlichkeit in der Anwendung eines Kunstgriffes besteht.

Wir beginnen unsere Betrachtungen bei der Methode, welche den Wert des bestimmten Integrals aus dem unbestimmten ableitet. Heisst das Integral $\int f(x)\,dx$ und ist $f(x) = F'(x)$, so ist das zwischen den Grenzen a und b genommene. bestimmte Integral von $f(x)\,dx$ gleich der Differenz zweier Specialwerte des unbestimmten, nämlich der Werte, die das Integral für die Grenzen annimmt, d. h. also $\int_a^b f(x)\,dx = Fb - Fa$. An und für sich ist es gleichgültig, wie wir zu der Kenntnis des unbestimmten Integrals gelangt sind, wenn wir dieses in das bestimmte überführen wollen. Es ist jedoch oft vorteilhaft, Reduktionen, welche man bei der Wertbestimmung des unbestimmten Integrals anwenden müsste, gleich von vornherein mit Berücksichtigung der bestimmten Grenzen durchzuführen, weil dadurch die Wertbestimmung meist schneller erreicht wird. Die aus der Theorie der unbestimmten Integrale bekannten Reduktionsmethoden sind die der Substitution neuer Variabeln an Stelle der alten, die partielle Integration und die der Aufstellung einer algebraischen Gleichung meist mit Hülfe der teilweisen Integration, in welcher das zu bestimmende Integral die Unbekannte wird.

Die erste, bei bestimmten Integralen benutzt, kann man durch die folgende Gleichung charakterisieren:

$$\int_a^b f(x) \,.\, dx = \int_{\varphi a}^{\varphi b} f(\psi y)\, \psi' y\, dy \;;\; x = \psi y \;;\; y = \varphi x \;;\; dx = \psi' y\, dy.$$

durch die direkte Berücksichtigung der Grenzen wird die Restitution der alten Variabeln mittels der Gleichung $y = \varphi(x)$ in das durch die Integration erhaltene Resultat unnötig, weil in dem bestimmten Integrale zugleich mit der Substitution die Grenzen entsprechend verändert sind. Als Beispiel für die Anwendbarkeit dieser Methode wollen wir kurz die Wertbestimmung eines Integrales andeuten, welches in der Theorie der Kugelfunktionen von besonderer Wichtigkeit ist. Unter den verschiedenen bestimmten Integralen, durch welche man die letztere ausgedrückt hat, hat das von Laplace (Traité de mécanique céleste, Tome V.) die Form:

$$\pi \,.\, P^n(x) = \int_0^{\pi} (x + \cos\varphi \sqrt{x^2 - 1})^n \, d\varphi.$$

Man erhält dasselbe, wenn man in der Gleichung

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha x-\alpha\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}}$$

sowohl rechts als links nach aufsteigenden Potenzen von α entwickelt und dann die Koefficienten von α^n auf beiden Seiten einander gleich setzt. Die Richtigkeit der Gleichung aber wird sofort durch die folgende Betrachtung klar. Wenn wir nämlich in ihr die Substitution $a=1-\alpha x$ $b=\alpha\sqrt{x^2-1}$ anwenden, so geht die Gleichung über in die andere;

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a-b\cos\varphi}\cdot=\frac{1}{a-b}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(1+\frac{a+b}{a-b}\cdot\tan^2\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Der Wert dieses Integrals ergiebt sich sofort, bei reellem a und b durch die Substitution:

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\tan\frac{v}{2};\ \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{d\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Da sich die Grenzen durch diese Operation nicht verändern, so ist direkt:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\pi}\frac{dv}{\left(1+\tan^2\frac{v}{2}\right)\left(\cos^2\frac{v}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\pi}dv.$$

Wir haben daher wirklich die Gleichung

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a-b\,.\cos\varphi.}$$

Die Methode der partiellen Integration besteht darin, dass man die Integration von $\int udv$ wo u und v Funktionen von x sind, auf die des Integrals $\int vdu$ mit Hülfe der Formel

$$\int udv=uv-\int vdu$$

zurückführt. Bei wiederholter Anwendung dieser Methode hintereinander wird die Wertbestimmung stets vereinfacht, sobald man nach jeder einzelnen, partiellen Integration sofort die beiden Integrationsgrenzen substituiert. Der Term u . v kann nämlich für die Grenzen gänzlich verschwinden dann braucht er natürlich bei den späteren Operationen nicht berücksichtigt zu werden. Die wiederholte, teilweise Integration führt in diesem Falle zu einem Produkte von Brüchen, dass meist durch eine numerische Fakultät ausgedrückt werden kann. Der Term u . v kann zweitens als eine von Null verschiedene endliche Grösse auftreten, dann wird man durch Wiederholung des Verfahrens ein Aggregat aus einer Anzahl von Gliedern erhalten. Endlich kann der Fall eintreten, dass u . v unbestimmt oder ∞ gross wird. Dann kann man nicht weiter operieren. Ein Beispiel für die Anwendung dieser Methode bietet die Reduktion der Gammafunktion. Man erhält durch Anwendung der partiellen Integration:

$$\Gamma(n)=\Gamma(n+1):n;\ \Gamma(n+1)=n\Gamma(n);\ \Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+m+1)}{n(n+1)(n+2).....(n+m)}$$

oder umgekehrt $\Gamma(n) = (n-1)(n-2)(n-m)\ldots\ldots \Gamma(n-m)$ (m eine ganze Zahl, n positiv).

Ist auch n eine ganze Zahl, so folgt, da $\Gamma(1) = \int_0 e^{-x}\,dx = 1$ ist,

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots\ldots(n-2)(n-1) = (n-1)!$$

Die Methode, welche die Wertbestimmung eines bestimmten Integrals mit Hülfe einer algebraischen Gleichung vermittelt, wird sofort durch das folgende Beispiel klar: Hat man das Integral

$$J = \int_0^\infty e^{-px}\cos qx\,dx$$

so erhält man durch partielle Integration:

$$q \,.\, J = p\int_0^\infty e^{-px}\sin qx\,dx$$

da der erste Teil zu Null wird. Durch eine weitere teilweise Integration wird

$$q^2 J + p^2 J = p$$

eine Gleichung, aus der $J = \frac{p.}{p^2+q^2}$ folgt.

Entsprechend ist:

$$K = \int_0^\infty e^{-px}\sin qx\,dx = \frac{q}{p^2+q^2}$$

Beide Integrale kann man auch gleichzeitig behandeln. Man erhält:

$$qJ - pK = 0;\quad qJ + pK = 1,$$

woraus sich die oben gefundenen Werte ebenfalls ergeben. (Bierens de Haan III § 4.) —

Ausser den Reduktionsmethoden, welche schon bei der Wertbestimmung unbestimmter Integrale eine wichtige Rolle spielen, existiert noch eine ganze Reihe anderer, welche auf den Fundamentaleigenschaften bestimmter Integrale beruhen. Durch Differentiation oder Integration unter dem Integralzeichen werden einerseits unbekannte Integrale in bekannte umgewandelt. Solche Methoden sind analytischer Natur, da sie in jedem einzelnen Falle die Wertbestimmung eines einzelnen unbekannten Integrals bezwecken. Es lassen sich andererseits durch gleiche Operationen aus einem einzigen, seinem Werte nach bestimmten Integrale oft eine grosse Reihe unbekannter Integrale herleiten. Diese Methoden haben einen synthetischen Charakter, da sie an der Hand bekannter Integrale möglichst viele unbekannte zu bestimmen suchen, deren Form oft kaum abzusehen ist. Ferner wird die Differentiation unter dem Integralzeichen zuweilen benutzt, um Differentialgleichungen aufzustellen, in denen der Integralwert als Variabele auftritt. —

I. Ein seinem Werte nach unbekanntes Integral, nach einem in ihm enthaltenen Parameter differentiiert, ergiebt oft einen leicht integrierbaren Ausdruck. Dessen durch Integration erhaltener Wert ist dann der Differentialquotient des ursprünglichen Integrals nach dem betreffenden Parameter. Dieses selbst ergiebt sich dann durch eine zweite Integration. Eine aus algebraischen und transcendenten Grössen zusammengesetzte Integral-Funktion ist durch die früheren Methoden oft nicht zu integrieren, während sich ihr Wert leicht ergiebt, wenn man den eben auseinandergesetzten Gedankengang verfolgt:

$$J = \int_0^1 \frac{\arctan(rx)\,.\,dx}{x\,.\,\sqrt{1-x^2}.};\quad \frac{dJ}{dv} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+r^2x^2)\,.\,\sqrt{1-x^2}.};\quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Für x die Grösse sin φ substituiert:

$$\frac{dJ}{dr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi.}{1 + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+r^2.}}; \quad J = \int \frac{\pi}{2\sqrt{1+r^2.}} dr = \frac{\pi}{2} \int \frac{dr}{\sqrt{1+r^2.}} = \frac{\pi}{2} l(r + \sqrt{1+r^2})$$

Als Integralgrenzen sind 0 und r gewählt, da das ursprüngliche Integral für $r = 0$ verschwinde

Auch durch Integration unter dem Zeichen $\int$ kann ein unbekanntes Integral in ein bekannte übergeführt werden. Unter andern erfolgt die Wertbestimmung des sehr bekannten Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x.x} dx$$

auf die angedeutete Weise. —

II. Wenn es möglich ist, ein bestimmtes, seinem Werte nach bekanntes Integral nach eine beliebigen Parameter zu differentieren, so erhält man den Wert eines neuen Integrales. Das In tegral $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ hat, wenn a positiv und grösser als Null ist, den bestimmten, endlichen We $\frac{1}{a}$. Eine n-malige Differentiation nach a giebt

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

eine Relation, welche auch direkt aus der Γ=Funktion durch die Substitution $x = az$ folgt.

Auch die umgekehrte Operation, die Integration einer bekannten Integral-Funktion nac einem variabelen Parameter führt vielfach zu neuen Resultaten. Dann nämlich, wenn das a der rechten Seite neu entstandene Integral bekannt ist. Ist z. B. das Integral gegeben $\int_0^1 x^{n-1} dx =$ und wird dasselbe wiederholt integriert und zwar das erste Mal zwischen den Grenzen 1 und die folgenden Male dagegen 0 und n, so ergiebt sich:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{lx} dx = ln.$$

$$\int \left\{ \frac{x^n - 1}{x.(lx)^2} - \frac{n}{lx} \right\} dx = n.ln - n \text{ etc. etc.}$$

(cf. Sohnke Aufgaben aus der Integralrechnung Abschn. II, A, 20—23.) —

Auf die Integration unter dem Integralzeichen gründet Cauchy eine sehr wichtige Method zur Reduktion vielfacher Integrale. Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des int grales définies etc. Journal de l'Ecole Polytechnique 28, pag. 147—248. —

III. Es kann, wie gesagt, die Differentiation eines seinem Werte nach unbekannten Int grals nach einem Parameter häufig auch zu einem Ausdrucke führen, welcher eine beliebige Funk tion des ursprünglichen Integrales ist. Dann hat man in der Relation

$$\frac{dJ}{dp} = f(J) + \varphi(p); \quad \text{(p. var. Param.)}$$

eine Differentialgleichung der ersten Ordnung. Durch die Auflösung dieser Gleichung erhält ma

dann den Wert des Integrals. In jedem Falle zieht die Integration dieser Gleichung die Addition einer willkürlichen Konstanten nach sich.

Oft genügt nun eine einzige Differentiation noch nicht, um die Relation zwischen dem primären Integrale und seinen Differentialen zu erhalten. Dann muss man seine Zuflucht zu wiederholten Differentiationen nehmen und wird schliesslich eine Relation erhalten, welche die Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung hat. Wenn man dieselbe integrieren kann, ist zugleich auch der Wert des Integrals zu finden. Natürlich bietet das Resultat soviel willkürliche Konstanten dar als Integrationen eingetreten sind.

Manchmal kann die Beschaffenheit zweier bestimmter Integrale auch derart sein, dass das Differential des einen nach einem Parameter mit dem andern Integrale zu einer algebraischen Gleichung verbunden ist, und ebenso das Differential des letzten Integrals mit dem ersten Integrale. Danach hätte man dann zwei simultane Differentialgleichungen, deren Lösung meist ohne bedeutende Schwierigkeit möglich ist.

Eine Anwendung dieser Methode wird das Beispiel im folgenden Abschnitt ergeben. —

In diesem Abschnitt sollen noch zwei Methoden kurz zusammengefasst werden, welche in einzelnen nicht selten auftretenden Fällen mit besonderm Nutzen angewendet werden können.

In sehr ausgedehnter Weise nämlich wird zur Wertbestimmung bestimmter Integrale das Imaginäre benutzt. Die Einführung desselben führt in allen den Fällen einen bedeutenden Grad von Eleganz und Einfachheit herbei, in denen es sich um die Bestimmung zweier Integrale mit korrespondierenden trigonometrischen Funktionen handelt. Der Moivre'sche Satz und die Sätze von der Wechselbeziehung unter den Exponential- und trigonometrischen Funktionen zeigen gerade hier ihre ganze grosse Bedeutung. —

Haben wir die beiden Integrale (Schlömilch, Compendium der höheren Analysis)

$$U = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot x^{a-1} \cdot \cos(\vartheta x)\, dx.$$

$$V = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot x^{a-1} \cdot \sin(\vartheta x)\, dx.$$

in denen ϑ eine beliebige Konstante ist, multiplizieren das zweite Integral mit i und addieren dann das Produkt zum ersten, so ergiebt sich:

$$W = U + iV = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-(k+i\vartheta)x}\, dx.$$

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -i \int_0^\infty x^a e^{-(k+i\vartheta)x}\, dx.$$

Durch partielle Integration folgt für $a > 0$

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -\frac{i \cdot a}{k + i\vartheta} \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-(k+i\vartheta)x}\, dx.$$

folglich:

$$\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -\frac{i \cdot a}{k + i\vartheta} \cdot W.$$

Aus dieser Differentialgleichung I. O. folgt sofort:

$$W = \frac{C}{(k + i\vartheta)^a}.$$

C ergiebt sich für $\vartheta = 0$ als $\Gamma(a)$.

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-(k+i\vartheta)x} dx = \frac{\Gamma(a)}{(k + i\vartheta)^a}.$$

Durch Trennung des reellen Teils vom imaginären und durch Specialisierung des alsdan auftretenden vieldeutigen Arc. tan. findet sich

$$\int_0^\infty e^{-kx} . x^{a-1} . \cos(\vartheta x) . dx = \frac{\Gamma(a) . \cos(a . \arctan \frac{\vartheta}{k})}{(k^2 + \vartheta^2)^{a/2}}.$$

$$\int_0^\infty e^{-kx} . x^{a-1} . \sin(\vartheta x) . dx = \frac{\Gamma(a) . \sin(a . \arctan \frac{\vartheta}{k})}{(k^2 + \vartheta^2)^{a/2}}.$$

Diese Gleichuugen sind zuerst von Euler aufgestellt und werden nach ihm Euler'sche Gle chungen genannt. cf. weiter: Schlömilch, note sur quelques intégrales définies. Crelle, Journ. 3 p. 316 und Schlömilch, Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{d\Theta}{\Theta^2 + a^2} . e^{-x\Theta}$. Crelle, Journ. 33 p. 325.

Wir kommen schliesslich zu einer Methode, welche sich auf die bekannten Theoreme v Lagrange und Fourier über periodische (trigonometrische) Reihen gründet und zu der Wertbestim mung einer ausserordentlich grossen Menge von Integralen führt, die man nach den anderen M thoden nicht leicht hätte berechnen können.

Wir können hier weder auf die Theoreme noch auf die Methoden näher eingehen. Es m hier die Bemerkung genügen, dass dieselben eine besonders wichtige Rolle in der Theorie d bestimmten Doppelintegrale spielt. Hier werden nämlich die Fourier'schen Integrale als allg meine Diskontinuitäts-Faktoren gebraucht. (Schlömilch, Beiträge zur Theorie der bestimmten I tegrale; Analytische Studien 2 Abt.: Die Fourier'schen Reihen und Integrale nebst deren wic tigsten Anwendungen. Schlömilch, théorèmes de Fourier, Crelle Journ. 36, pag. 268; Grune Archiv. Bd. 5, pag. 204.; Zeitschrift für Mathem. und Physik I, p. 75. u. f. Dienger: d Lagrange'sche Formel und die Reihensummierung durch dieselbe, Crelle Journ. 34, p. 75. Biere de Haen III, Section VII). —

Die angeführten Methoden, welche nur Repräsentanten anderer nicht erwähnter sein solle mit denen sie in ihren Eigentümlichkeiten mehr oder weniger übereinstimmen, können so lan unbedenklich angewendet werden als sowohl die zu integrierende als die Integral-Funktion ko tinuierlich, endlich und eindeutig sind. Unregelmässigkeiten können indessen auftreten 1) in Fol der Diskontinuität der zu integrierenden Funktion zwischen endlichen Grenzen; 2) durch d Unendlichwerden der Grenzen; 3) in Folge etwaiger Vieldeutigkeit der zu integrierenden und d Integral-Funktion.

1. Wird in dem Integrale $\int_a^b f(x)\, dx\, f(x)$ für den Wert $x = e$ diskontinuierlich, so könn wir nach Cauchy (Cours d'Analyse, sur le calcul infinitésimal.) dem Integrale nur dann ein gewissen Sinn zuschreiben, wenn die singulären Integrale

$$\operatorname{Lim}\int_{e-\delta}^{e-\delta\mu} f(x)\,dx \text{ und } \operatorname{Lim}\int_{e+\varepsilon\nu}^{e+\varepsilon} f(x)\,dx$$

bei beliebigem, endlichem μ für verschwindende δ und ε selbst verschwinden. Dann ist nämlich:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \operatorname{Lim}\int_a^{e-\delta} f(x)\,dx + \operatorname{Lim}\int_{e-\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Nimmt nur eines der singulären Integrale einen von Null verschiedenen Wert an, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ sinnlos. Die Diskontinuität kann eine endliche und eine unendlich grosse sein. Im ersten Falle sind die singulären Integrale stets Null. Geht die zu integrierende Funktion innerhalb des Integrationsintervalles durchs Unendliche, so erhalten die singuläreu Integrale häufig einen unbestimmten, also von Null verschiedenen Wert. Das allgemeine Integral wird dann unbestimmt, verliert also seinen Sinn. —

Es kommt häufig vor, dass Funktionen, deren unbestimmte Integration keine Schwierigkeiten bereitet, nicht bestimmt integriert werden können, da sie an einer oder mehreren Stellen des Integrationsintervalles unendlich gross werden. Der Grund dafür liegt in dem völlig verschiedenen Charakter bestimmter und unbestimmter Integrale. Die ersteren sind in Bezug auf die Integrationsvariabeln konstante Grössen. Wenn in einer solchen ein unendlich grosser Faktor vorkommt, so verliert sie ihren bestimmten Sinn. Die andern sind wieder Funktionen der Integrationsvariabeln. Eine Funktion aber ist sehr wohl denkbar, wenn sie auch für einzelne Werte der unabhängigen Variabeln durch das Unendliche geht. Die rationalen, algebraischen Funktionen z. B. sind unbestimmt ohne Einschränkung integrierbar, sobald sie aber zwischen bestimmten Grenzen genommen werden, so liefert ihre Integration nur dann einen bestimmten, endlichen Wert, so lange der Nenner der zu integrierenden Funktion nur solche Wurzeln hat, die nicht zwischen den Grenzen a und b liegen. Erfüllt eine Wurzel e diese Bedingung nicht, so wird der Funktionswert für $x = e$ unendlich gross. Hat die Funktion die Form $\frac{\varphi x}{(x-e)\,\psi(x)}$, so wird das eine der singulären Integrale

$$\int_{e-\delta}^{e-\delta\mu} \frac{\varphi x}{(x-e)\,\psi x}\,dx = \frac{\varphi e}{\psi e}\int_{e-\delta}^{e-\delta\mu} \frac{dx}{x-e} = \frac{\varphi e}{\psi e} l(\mu).$$

Das andere ist gleich $\frac{\varphi e}{\psi e} l\left(\frac{1}{\nu}\right)$, beide also unbestimmt, da μ und ν beliebig sind, $\frac{\varphi e}{\psi e}$ von Null verschieden ist. Das allgemeine Integral wird daher sinnlos. Wie die Untersuchung sich gestaltet, wenn mehrere Wurzeln zwischen den Grenzen liegen, und wenn diese ausserdem noch einander gleich sind, ist leicht ersichtlich. —

2. Bei weitem am häufigsten treten die Unstetigkeitsfälle ein, wenn die Integrationsgrenzen unendlich gross werden, eine Bedingung, die bei der Lösung vieler Probleme geradezu verlangt wird. Auch in diesem Falle, wenn also die zu integrierende Funktion in der Unendlichkeit unstetig wird, giebt der Wert der singulären Integrale das Kriterium über den Sinn der allgemeinen

Integrale ab. Die singulären Integrale sind hier: $\int_{\frac{1}{\delta}}^{\frac{1}{\delta\mu}} f(x)\,dx$ und $\int_{-\frac{1}{\varepsilon\nu}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx$. Ist die zu integrieren

Funktion wieder eine rationale, algebraische, so lässt sich die Überführung des unbestimmten I tegrales in das bestimmte „bei unendlichen Integrationsgrenzen" von dem folgenden allgemein Theoreme abhängig machen: Das Integral nimmt einen endlichen, bestimmten Wert an, we 1) der Grad des Zählers um mindestens zwei Einheiten niedriger ist als der des Nenners, u wenn 2) der letztere nur komplexe oder rein imaginäre Wurzeln besitzt. In allen andern Fäll verliert das Integral seinen Sinn. Das Integral habe die Form:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(A_m x^m + \ldots\ldots + A_0)\,dx}{a_n x^n \ldots\ldots a_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)}$$

Ist $m \lessgtr n-2$ und sind die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ von der komplexen Form $\alpha = \lambda \pm$ so erfüllt die zu integrierende Funktion die gestellten Bedingungen. Der Wert des Integrals $\pi i \cdot \Sigma \left\{ \pm \frac{\varphi\alpha}{f'\alpha} \right\}$. Bei der Bestimmung desselben treten die beiden Integrale

$$\int_{-p}^{q} \frac{(x-\lambda)\,dx}{(x-\lambda)^2+\mu} = \frac{1}{2} l \frac{(q-\lambda)^2+\mu^2}{(p+\lambda)^2+\mu^2} + i$$

$$\int_{-p}^{q} \frac{\mu\,.\,dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = \operatorname{arc\,tan} \frac{q-\lambda}{\mu} - \operatorname{arc\,tan} \frac{p-\lambda}{\mu}$$

auf. Im ersten ist der Logarithmus gewählt, der für ein der Einheit gleiches Argument v schwindet, im zweiten der Arkus zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Diese Annahme ist nötig, damit beiden Transcendenten nicht unendlich vieldeutig bleiben. Eine ähnliche Festsetzung ist natürli auch bei andern vieldeutigen Funktionen, z. B. beim Arcus sinus zu treffen, auf den das Integ aller der irrationalen, algebraischen Funktionen von der Form $\int f(x,y)\,dx; y = \sqrt{a + bx +$ $c < 0$ hinauskommt. Oft geht schon aus der Integralgleichung hervor, welche Bestimmung Bezug auf die Vieldeutigkeit allein richtig ist. —

Die Diskontinuität der zu integrierenden Funktion begrenzt den Kreis der Anwendbark aller unserer Methoden überhaupt bedeutend, gleichgültig ob die Funktion unbestimmt integrierl ist oder nicht. Setzen wir z. B. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \pi\,.\,e^{-m}$$

als bekannt voraus und differentiieren nach m, so ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx\,.\,x}{x^2+1}\,dx = +\pi e^{-m}$$

Von beiden Integralen haben wir deshalb den richtigen Wert, weil die zu integrierenden Fu tionen zwischen den Grenzen endlich und stetig sind. Eine zweite Differentiation nach m ergie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx\,.\,x^2}{x^2+1}\,dx = -\pi e^{-m}$$

Diese Gleichung ist aber nicht mehr richtig, da die zu integrierende Funktion unbestimmt für die Grenzen ist. Aus dem ursprünglichen Integrale lässt sich daher auf die eingeschlagene Weise nur ein neues Integral ableiten. —

3. Es ist wohl darauf zu achten, und damit kommen wir auf den dritten Fall, der zu Unregelmässigkeiten bei der Wertbestimmung Anlass geben kann, dass die integrierte Funktion zwischen den Integrationsgrenzen kontinuierlich bleibt. Das zweite der oben zuletzt aufgeführten Integrale $\int_{-p}^{q} \frac{\mu dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = \text{arc tan}\frac{q-\lambda}{\mu} - \text{arc tan}\frac{p-\lambda}{\mu}$ bleibt stetig, auch für $p = q = \infty$ so lange wir die Annahme „Arc tan zwischen $\pm\frac{\pi}{2}$" festhalten. Es wird aber unstetig für $x = \lambda$ wenn der Arcus zwischen 0 und π genommen wird. Wenn wir keine Rücksicht auf diese Unstetigkeit nehmen, erhält das Integral den gänzlich falschen Wert 0. Es sind zwei Möglichkeiten vorhanden, um zum richtigen Resultate zu gelangen. Entweder müssen wir durch eine bestimmte Wahl von Fx veranlassen, dass in dem Integrale $\int_a^b fxdx = \Big(Fx\Big)_a^b$ Fx zwischen a und b stetig bleibt. Dies erreichten wir oben durch die Wahl des Arc tan zwischen $\pm\frac{\pi}{2}$. Oder aber wir müssen das Integral bei der Unstetigkeitsstelle zerlegen in

$$\int_a^{e-\varepsilon} + \int_{e+\varepsilon}^{a} = F(b) - F(e+\varepsilon) + F(e-\varepsilon) - F(a)$$

und dann zu der Grenze für $\varepsilon = 0$ übergehen d. h. wegen der Kontinuität von f(x) in $\int_a^b f(x)dx$ $= Fb - Fa + \underset{\varepsilon=0}{\text{Lim}} \{F(e-\varepsilon) - F(e+\varepsilon)\}$. Wenden wir diesen Satz auf unsern arc tan bei der Wahl derselben zwischen 0 und π an, so wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\, dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = \text{arc tan}(+\infty) - \text{arc tan}(-\infty) + \text{Lim}\left\{\text{arc tan}\left(\frac{-\varepsilon}{\mu}\right) - \text{arc tan}\left(+\frac{\varepsilon}{\mu}\right)\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi - 0 = \pi.$$

Ist die zu integrierende Funktion vieldeutig, so kann auch ihr die Vieldeutigkeit durch eine bestimmte Annahme genommen werden. cf. Raabe, Über den richtigen Gebrauch vieldeutiger Funktionen bei der Ermittelung bestimmter Integrale: Crelle, Journ. 37, pag. 356. Wird sie dann für einen Punkt des Integrationsintervalles unstetig, so sind, wie wir anfangs auseinandergesetzt haben, die singulären Integrale für die Unstetigkeitsstellen zu untersuchen. —

Wenn es nicht möglich ist, eine Funktion mit Hülfe der aufgezählten Methoden bestimmt zu integrieren, so bleibt uns noch ein Hülfsmittel übrig, das sehr häufig zur Wertbestimmung der betreffenden Integrale führt, nämlich der Gebrauch unendlicher Reihen. Derselbe ist aber auch in solchen Fällen angebracht, wo das Integral sich auf andere Weise bestimmen lässt, weil man durch Reihenentwicklung meistens auf einfache Weise zu einem beliebig genauen Resultate kommen kann.

Die Entwicklung der zu integrierenden Funktion in eine Reihe kann auf alle die durch die Analysis bekannten Methoden geschehen, mit Benutzung des binomischen Lehrsatzes, des Tailor'-

schen und Mac Laurin'schen Theorems, durch Entwicklung eines Bruches u. s. w. Auch braucht nicht die ganze Funktion entwickelt zu werden, häufig genügt schon die Umwandlung eines Faktors der Funktion, z. B. wenn dieselbe aus einem Bruche besteht, ihres Nenners oder Zählers.

Es ist aber bei der Reihenentwicklnng besonders eine Regel stets zu beachten. Er muss nämlich, wenn die Entwicklung irgend welchen Nutzen haben soll, entweder die gebildete Reihe unter dem Integralzeichen eine konvergente sein, oder mindestens die durch Integration erhaltene Reihe. Heifst dieselbe

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots . A_{n-1} + A_n + R$$

so muss stets $\underset{n=\infty}{\text{Lim}}\,(R) = 0$ sein.

Ist dies der Fall bei der Reihe unter dem Integralzeichen, so konvergiert auch die integrierte Reihe stets, d. h. es nähert sich mit wachsendem n:

$$\int_a^b A_1\,dx + \int_a^b A_2\,dx + \int_a^b A_3\,dx + \ldots . \int_a^b A_n\,dx \ldots .$$

der Grenze $\int_a^b S dx$. Denn es ist, wenn R' den Mittelwert aller R von $x = a$ bis $x = b$ bezeichnet,

$$\int_a^b R dx = (b - a)\,R'$$

da sich R der Null nähern soll, so muss dies erst recht der Mittelwert R' thun, und deshalb muss

$\int_a^b R dx = 0$ sein.

Die Konvergenz der Reihe muss für alle Argumente, die innerhalb des Integrationsintervalles liegen, stattfinden, da das Argument alle Werte zwischen den Grenzen einmal annimmt, uud die Reihe daher für alle von ihnen bestehen muss. Daraus folgt, dass die Methode der Reihenentwicklung fast immer unbrauchbar wird, wenn die Integrationsgrenzen unendliche Werte annehmen.

Als Beispiel für den Fall, dass eine nicht konvergente Reihe durch Integration in eine solche übergeht, möge die Berechnung der beiden Integrale dienen

$$\int dx \sum_1^\infty (\cos nx) \text{ und } \int dx \sum_1^\infty (\sin nx),$$

in denen die Grenzen absichtlich fortgelassen sind. Die beiden Reihen $\sum_1^\infty (\cos nx)$ und $\sum_1^\infty (\sin x)$ sind periodisch, sie convergieren daher nicht. Nach x integriert hat man aber

$$\sum_1^\infty \frac{\text{Sin}\,nx}{n} \text{ und } \sum_1^\infty - \frac{\cos(nx)}{n}.$$

Beide Resultate sind konvergente Reihen. Das Integral hat daher einen guten Sinn.

Die konvergenten Reihen, welche für die bestimmten Integrale erhalten sind, geben deren Werte so lange vollkommen genau wieder, als wir den Komplex der unendlich vielen Glieder ins Auge fassen. Gewöhnlich ist aber die Summation aller dieser Glieder nicht ausführbar, dann muss man sich begnügen, einen angenäherten Wert des Integrals zu erhalten.

Die Methode der Reihenentwicklung ist das vorzüglichste Mittel, die Werte der früher schon angeführten Transcendenten zu bestimmen. Der Wert eines elliptischen Integrals erster Gattung

erfolgt z. B. einfach durch Entwicklung des Nenners nach dem binomischen Lehrsatze. (Schellbach, Elliptische Integrale und Theta-Funktionen § 41, 42). Wir wollen hier auf die nähere Berechnung nicht weiter eingehen, sondern uns gleich der etwas complicierteren Wertbestimmung einer Gammafunktion zuwenden. Die Werte von $\Gamma(\mu)$ sind sämtlich bekannt, sobald die dem Intervalle $\mu = n$ bis $\mu = n+1$ entsprechenden Werte berechnet sind. Diese stellen wir aber dar aus einer Reihe, welche sich aus dem Gauss'schen Produkte für $\Pi(\mu) = \Gamma(\mu+1)$ ergiebt. Die Reihe heisst;

$$l(\Gamma(1-\mu)) = C\mu + \tfrac{1}{2}\mu^2 S_2 + \tfrac{1}{3}\mu^3 S_3 + \tfrac{1}{4}\mu^4 S_4 + \ldots.$$

oder, wenn wir berücksichtigen, dass;

$$\frac{1}{2} l \frac{\mu\pi}{\sin \mu\pi} = \frac{1}{2} S_2\mu^2 + \frac{1}{4} S_4\mu^4 + \frac{1}{6} S_6\mu^6 + \ldots\ldots \text{ ist,}$$

$$l\,\Gamma(1+\mu) = \frac{1}{2} l\left(\frac{\mu\pi}{\sin \mu\pi}\right) - C\mu - \frac{1}{3} S_3\mu^3 - \frac{1}{5} S_5\mu^5 - \ldots.$$

hierin ist C die Macheronische Konstante, $Sp = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots.$; μ sei ein echter Bruch. Die Grössen S nähern sich fortwährend der Einheit, daher konvergiert die letzte Reihe etwas weniger als die folgende $\mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \ldots. = \frac{1}{2} l \frac{1+\mu}{1-\mu}$. Es empfiehlt sich daher zu 1 noch die folgende Reihe zu addieren . .

$$0 = -\frac{1}{2} l \frac{1+\mu}{1-\mu} + \mu + \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 + \ldots.$$

Es ist dann:

$$l\,\Gamma(1+\mu) = \frac{1}{2} l\left(\frac{\mu\pi}{\sin \mu\pi}\right) - \frac{1}{2} l\left(\frac{1+\mu}{1-\pi}\right) +$$

$$+ (1-C)\,\mu - \frac{1}{3}(S_3 - 1)\,\mu^3 - \frac{1}{5}(S_5 - 1)\,\mu^5 - \ldots\ldots$$

Multiplicieren wir noch mit dem Modul des Brigg'schen Logarithmensystems $M = 0{,}43429448$ und setzen $M(1-C) = T_1$; $\frac{M}{n}(S_n - 1) = T_n$; $(n > 1)$ so folgt:

$$\log \Gamma(1+\mu) = \frac{1}{2} \log \frac{\mu\pi}{\sin \mu\pi} - \frac{1}{2} \log \frac{1+\mu}{1-\mu} + T_1\mu - T_3\mu^3 - \ldots$$

$$T_1 = 0{,}18361203. \quad ; \quad T_3 = 0{,}02925073.$$

$$T_5 = 0{,}00320750. \quad ; \quad T_7 = 0{,}0005180.$$

$$T_9 = 0{,}00009691 \text{ etc.}$$

Mit Hülfe dieser Formel können die Gammafunktionen, z. B. für $\mu = 1$ bis $\mu = 2$ berechnet werden, und man erhält durch ihre Zusammenstellung einen Kanon, nach dem überhaupt jegliche beliebige Gammafunktion zu berechnen ist, wenn man noch die Formel $\Gamma\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\mu}$ berücksichtigt. —

Wir können die Betrachtungen über die Reihenentwicklungen zum Zwecke der Wertbestimmung bestimmter Integrale nicht schliessen, ohne ein Theorem wenigstens zu erwähnen, dessen Eigentümlichkeit darin besteht, eine Reihe, deren Summe im voraus bekannt ist, in ein bestimmtes Integral umzusetzen. Es ist das Kummer'sche Theorem. Wir müssen auch hier des beschränkten Raumes wegen auf eine Erörterung verzichten, ebenso ist es unmöglich andere funtamentale Abhandlung u. a. Dienger, Summen von Reihen, ausgedrückt durch bestimmte Integrale, Crelle

Journal Bd. 34 u. 46, ferner Boncampagni, Crelle, Journ. Bd. 25, p. 77: Recherches sur les intégrales définies gehörig auszuwerten. Wir gelangen zu dem letzten Abschnitte, welcher einige der bekanntesten Näherungsmethoden enthalten wird.

Diese Näherungsmethoden, welche auch angewendet werden, wenn die Wertbestimmung des Integrales in geschlossener Form nicht ausgeführt werden kann, bieten den Vorteil vor denjenigen Reihenentwicklungsmethoden, welche keine genaue Summation ermöglichen, dass man bei ihrer Anwendung eine bestimmte Fehlergrenze berechnen kann. Sie gehen im Wesentlichen alle darauf hinaus, den Wert des Integrals aus einer gewissen endlichen Anzahl von Werten der zu integrierenden Funktion herzuleiten. Man muss jedoch die beiden Fälle unterscheiden, ob die letztere ihrem Verlaufe nach bekannt ist oder ob nur eine bestimmte Anzahl von Werten zur Operation vorliegen.

Eine sehr einfache Näherungsmethode, welche die vollständige Kenntnis der zu integrierenden Funktion voraussetzt, hat Cauchy, cours d'Analyse sur le calcul infinitésimal, gegeben. Er leitet sie direkt aus der Definitionsgleichung bestimmter Integrale ab. Es ist

$$\int_a^b F(x)\,dx = \operatorname{Lim} S_1 = \operatorname{Lim} S_2.$$

$$S_1 = h\,[F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots . F(b-2h) + F(b-h)].$$
$$S_2 = h\,[F(a+h) + F(a+2h) + \ldots . F(b-h) + F(b)].$$

worin $h = \frac{b-a}{n}$. Ist in diesen Ausdrücken $n = \infty$, so wird $\int_a^b F(x)\,dx$ genau durch jede der aufgeführten Summen ausgedrückt. Nimmt man die Zahl n aber endlich an, so wird S_1 kleiner resp. grösser sein als das Integral und S_2 dem entsprechend grösser oder kleiner. Der Unterschied zwischen S_1 und S_2 beträgt $h(Fb - Fa)$ und ist bei endlichem n eine bestimmte Grösse. Nimmt man von dieser Differenz die Hälfte und fügt sie zu S_1 oder S_2 hinzu und zwar mit dem positiven oder negativen Zeichen, je nachdem S_1 oder $S_2 \lessgtr \int_a^b Fxdx$ ist, so erhält man für das Integral den angenäherten Wert:

$$h\left\{\frac{1}{2}Fa + F(a+h) + F(a+2h) + F(b-h) + \frac{1}{2}Fb\right\}.$$

Man begeht bei dieser Annäherung einen Fehler, der offenbar weniger beträgt als die Halbdifferenz

$$\pm h\left\{\frac{1}{2}Fb - \frac{1}{2}Fa\right\}.$$

Eine genauere Methode besteht in der Anwendung des Satzes:

$$\int_a^b Fxdx =$$

$$h\left\{\frac{1}{2}F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \ldots . F(b-h) + \frac{1}{2}F(b)\right\} -$$
$$- \frac{B_1 . h^2}{1.2}\left\{F'(b) - F'(a)\right\} + \frac{B_3 . h^4}{1.2.3.4}\left\{F'''(b) - F'''(a)\right\}$$
$$+ \ldots\ldots \pm \frac{B_{2m-1}\, h^{2m}}{(2m)!}\left\{F^{(2m-1)}(b) - F^{(2m-1)}(a)\right\}.$$

der bei Anwendung dieser Formel begangene Fehler beträgt

$$\Theta \cdot \frac{B_{2m-1} \cdot h^{2m}}{(2m)!} \cdot \left\{ F^{(2m-1)}(b) - F^{(2m-1)}(a) \right\}$$

wo Θ zwischen -1 und $+1$ liegt, d. h. der Fehler beträgt weniger als der Wert des letzten Gliedes. Vorausgesetzt ist, dass $F^{2m}(z)$ von $z = a$ bis $z = b$ immer dasselbe Zeichen hat und endlich bleibt. $h = \frac{b-a}{n}$; n eine ganz positive Zahl. Wechselt $F^{2m}(z)$ für den Wert $z = c$ das Vorzeichen, so muss man das betreffende Integral in zwei Teilintegrale mit den Grenzen a und c, c und b zerlegen und dann auf jedes von beiden die obige Formel anwenden. Die Koeffizienten B_1; B_3 .... sind die Bernoulli'schen Zahlen. Die obige Formel lässt sich entweder direkt aus der Euler'schen Summenformel oder aus dem Tailor'schen Satze ableiten. (Dienger, Differential- und Integral-Rechnung pag. 525—533 oder Navier I, pag. 335—342). Die angegebene Methode lässt auch eine geometrische Interpretation zu, wenn wir berücksichtigen, dass die Integration jedes einfachen bestimmten Integrales als eine Quadratur angesehen werden kann, wenn auch die auftretenden Variabeln ursprünglich nicht die Bedeutung von Raumkoordinaten haben. Die Methode giebt dann an, dass an Stelle der Funktionskurve eine parabolische Kurve $(2m-1)$ter Ordnung gesetzt werden soll, welche mit ihr die zu den Abscissen h, 2h ..... gehörenden Ordinaten und einerlei Anfangs- und Endpunkt gemein hat und zugleich mit ihr in dem Anfangspunkte eine Berührung der $(2m-2)$ten Ordnung eingeht. —

Bei diesen Methoden war in dem Integrale $\int_a^b y\,dx$ y als Funktion von x gegeben. Ist dies nicht der Fall, sondern hat man nur für einzelne Abscissen $x_0 (= a)$; x_1; x_2; .... $x_n (= b)$ in dem Integrationsintervalle die zuhörigen Werte von y: y_0; y_1; y_2; .... y_n so gebraucht man zur Berechnung des bestimmten Integrales die Interpolationsformel von Lagrange. Das Wesen der letzteren besteht kurz in folgendem: Man nimmt an, y sei eine ganze Funktion von x und zwar nten Grades, wenn man, wie oben angenommen, $n+1$ Werte von y hat, die $(n+1)$ verschiedenen Werten von x entsprechen, also von der Form:

$$y = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + ... + g_n x^n$$

d. h. hier wieder: Man substituiert für die Kurve von der nur $n+1$ Punkte gegeben sind, eine Parabel nter Ordnung, die mit der unbekannten Kurve die bezeichneten Punkte gemein hat. In der letzten Gleichung müssten nun die Koeffizienten g_0 .... g_n so bestimmt werden, dass die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= g_0 + g_1 a + g_2 a^2 + ... g_n a^n \\ y_1 &= g_0 + g_1 x_1 = g_2 x_1^2 + ... g_n x_1^n \\ &..... \\ y_n &= g_0 + g_1 b + g_2 b^2 + ... g^n b^n \end{aligned}\right\} \text{ erfüllt sind.}$$

Diese Bestimmung liesse sich auch durchführen, man erhielte für alle g eindeutige und endliche Werte. Wenn man dieselben in die erste Gleichung substituierte, so würde diese die angegebenen Bedingungen erfüllen, sie würde aber auch die einzige sein, die es thut. Wenn man daher eine Funktion hätte, welche für $x = x_0$ gleich y_0 .... für $x = x_n$ gleich y_n wäre, so müsste dieselbe mit unserer Gleichung identisch sein. Nun ist aber

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_{n-1})(x_0-x_n)}\cdot y_0 +$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots\ldots(x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)}\cdot y_1 +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots\ldots(x_n-x_{n-1})}\cdot y_n.$$

eine solche Formel. Setzt man daher:

$(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)=\psi x$, so wird:

$$y=\frac{\psi(x)\cdot y_0}{\psi'(x_0)(x-x_0)}+\frac{\psi(x)\cdot y_1}{\psi'(x_1)(x-x)}+\ldots\ldots\frac{\psi(x)\cdot y_n}{\psi'(x_n)(x-x_n)}.$$

(Interpolationsformel von Lagrange)

und daher $\int_{x_0}^{x_n} y\,.\,dx.=$

$$\int_{x_0}^{x_n}\frac{\psi(x)\,.\,dx}{\psi'(x_0)(x-x_0)}+y_1\int_{x_0}^{x_n}\frac{\psi(x)\,dx}{\psi'(x_1)(x-x_1)}\ldots\ldots y_n\int_a^b\frac{\psi(x)\,dx.}{\psi'(x_n)(x-x_n)}$$
$$=y_0A_0+y_1A_1+y_2A_2+\ldots\ldots y_nA_n$$

wo $A_0, A_1 \ldots A_n$ konstante Grössen sind, die nur von $x_0\,x_1\ldots x_n$ abhängen. — Die Abständ $x_1-x_0, x_2-x_1\ldots, x_n-x_{n-1}$ sind ganz beliebig.

Setzt man voraus, dass die Abstände zwischen den Ordinaten gleich sind, so hat man ei Auflösung der Quadratur, wie sie schon von Newton angedeutet und für den Fall von vier Ord naten beispielsweise ausgeführt ist. Weitere Notizen über unsere Annäherungsmethode hat dar Cotes gegeben, er hat auch für $n=1$ bis $n=10$ d. h. bis auf 11 Ordinaten die Quadraturkoe fizienten A berechnet. cf. Gauss Werke, 3. Bd. p. 168.

So folgt für $n=2$, in welchem Falle die substituierte parabolische Kurve eine Apollonisch Parabel ist,

$$\psi x=x(x-\tfrac{1}{2}).(x-1);\ A_0=\int_0^1(2x^2-3x+1)\,\lambda x=\frac{1}{6},$$

indem das Intervall als Einheit und sein Anfangspunkt als der der Zählung gewählt wird. Eben findet sich $A_1=\frac{4}{6}$; $A_2=\frac{1}{6}$, so dass man hat:

$$\int_a^b y\,.\,dx=(y_0+4y_1+y_2)\frac{b-a}{b}$$ (Simpson'sche Regel).

Gauss hat nun in der Abhandlung: „Methodus nova integralium valores per approximatione inveniendi“ (Werke, B. 3, p. 172) zu entscheiden gesucht, ob es nicht vorteilhaft sei, Ordinate in ungleichen Abständen zu Grunde zu legen. Zu dem Ende hat er eine allgemeine Theorie d Quadraturkoeffizienten aufgestellt und den Grad der bei der Methode zu erhaltenden Genauigke bestimmt und ist zu den Resultaten gelangt, dass man mit einer beliebigen Anzahl gehörig gewählt Ordinaten ebenso weit reicht, als mit der doppelten Anzahl von Ordinaten in gleichen Abstände Eine Verallgemeinerung der Gaussischen Quadratur hat Christoffel, Crelle, J. 55, p. 61. gegeben. -

2. Übersicht

Lehrer.	Prima.	Ober-Sekunda.	S
Dr. Wiesing, Direktor, Ord. der I.	5 St. Mathem.	5 St. Mathem.	
Dr. Schneider, Professor und Oberlehrer, Ord. der OII.	4 St. Französ. 3 St. Englisch	2 St. Religion 4 St. Französ. 3 St. Englisch	2 St
Dr. Krenzlin, Professor und Oberlehrer, Ord. der UII.	3 St. Physik	3 St. Physik	5 St 3 S
Dr. Kloppe, Oberlehrer, Ord. der IV B.	2 St. Religion 3 St. Deutsch		
Deichert, 1. ordentl. Lehrer, Ord. der OIII.	5 St. Latein.	3 St. Deutsch 5 St. Latein. 2 St. Gesch.	
Dr. Nägler, 2. ordentl. Lehrer, Ord. der UIII.	3 St. Gesch. u. Geogr.		3 S 5 S 2 S
Dr. Rackwitz, 3. ordentl Lehrer, Ord. der V A.			
Zeitschel, 4. ordentl. Lehrer, Ord. der VI.			
Knaake, 5. ordentl. Lehrer, Ord. der V B.			4 St 3 St
Dr. Hoffmann, 6. ordentl. Lehrer, Ord. der IV A.		1 St. Geogr.	1 St
Dr. Schumann, wissenschaftl. Hülfslehrer.	2 St. Chemie	2 St. Chemie	2 S
Gebensleben, freiw. wissenschaftl. Hülfslehrer.			3 S
Matthes, cand. prob.			
Dr. Pfützner, cand. prob.			
Schrader, Zeichenlehrer.	2 St. Zeichnen		2 St
Rathke, Turnlehrer.	2 St. Turnen + 1 St. Vorturn		
Donadt, Elementar- u. Hülfslehrer.			
Hinze, Elementar- u. Hülfslehrer.			
Illner, Elementar- u. Hülfslehrer, Lehrer d. 3. Vorschulklasse.			
Früh, Königl. Musikdirektor.	Chorklasse 2 St. V		
Herold, Kaplan, katholischer Religionslehrer.	2 St.		
Dr. Gelbhaus, Rabbiner, jüdischer Religionslehrer.	1 St.		

[1]) Während des Schuljahres wissenschaftl. Hülfsleh
[4]) Während des Wintersemesters Kandidat Dr. Pf

Zeichnen	2	2	2	2	2	2	2	14
Schreiben	2	2 — 2	— —	—	—	—	—	6
Singen	2	2		2 + 2				8
Turnen	2	2		2		2		8*)

*) Ausserdem eine Vorturnerstunde.

Schulnachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

1. Übersicht

des Stundenplanes für das Schuljahr 1886—1887.

Lehrgegenstände.	Sexta.	Quinta A.	Quinta B.	Quarta A.	Quarta B.	Unter-Tertia.	Ober-Tertia.	Unter-Sekunda.	Ober-Sekunda.	Prima.	Summa.
	Wöchentliche Stunden.										
Religion	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	21
Deutsch	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	30
Latein	8	7	7	7	7	6	6	5	5	5	63
Französisch	—	5	5	5	5	4	4	4	4	4	40
Englisch	—	—	—	—	—	4	4	3	3	3	17
Geschichte und Geographie	3	3	3	4	4	4	4	3	3	3	34
Rechnen und Mathematik	5	4	4	5	5	5	5	5	5	5	48
Naturbeschreibung	2	2	2	2	2	2	2	2	—	—	16
Physik	—	—	—	—	—	—	—	3	3	3	9
Chemie	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Zeichnen	2	2		2		2	2	2	2		14
Schreiben	2	2	2	—	—	—	—	—	—	—	6
Singen	2	2				2 + 2					8
Turnen	2	2				2		2			8*)

*) Ausserdem eine Vorturnerstunde.

2. Übersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

Lehrer.	Prima.	Ober-Sekunda.	Unter-Sekunda.	Ober-Tertia.	Unter-Tertia.	Quarta A.	Quarta B.	Quinta A.	Quinta B.	Sexta.	Anzahl der wöchentlich. Lehrstunden.
Dr. Wiesing, Direktor, Ord. der I.	5 St. Mathem.	5 St. Mathem.					3 St. Math.[1])				13 St.
Dr. Schneider, Professor und Oberlehrer, Ord. der OII.	4 St. Französ. 3 St. Englisch	2 St. Religion 4 St. Französ. 3 St. Englisch	2 St. Religion			2 St. Religion			2 St. Religion		22 „
Dr. Krenzlin, Professor und Oberlehrer, Ord. der UII.	3 St. Physik	3 St. Physik	5 St. Mathem. 3 St. Phys.[2])	5 St. Mathem.	3 St. Math.[3])						22 „
Dr. Kloppe, Oberlehrer, Ord. der IV B.	2 St. Religion 3 St. Deutsch			2 St. Religion	2 St. Religion		2 St. Religion 3 St. Deutsch 7 St. Latein.				21 „
Deichert, 1. ordentl. Lehrer, Ord. der OIII.	5 St. Latein.	3 St. Deutsch 5 St. Latein. 2 St. Gesch.		3 St. Deutsch 6 St. Latein.							24 „
Dr. Nägler, 2. ordentl. Lehrer, Ord. der UIII.	3 St. Gesch. u. Geogr.		3 St. Deutsch 5 St. Latein. 2 St. Gesch.		3 St. Deutsch 6 St. Latein.						22 „
Dr. Rackwitz, 3. ordentl Lehrer, Ord. der V A.				2 St. Gesch.		3 St. Deutsch 7 St. Latein.		3 St. Deutsch 7 St. Latein. 1 St. Gesch.		1 St. Gesch.	24 „
Zeitschel, 4. ordentl. Lehrer, Ord. der VI.					2 St. Gesch.				3 St. Deutsch 7 St. Latein. 1 St. Gesch.	3 St. Deutsch 8 St. Latein.	24 „
Knaake, 5. ordentl. Lehrer, Ord. der V B.			4 St. Französ. 3 St. Englisch	4 St. Französ. 4 St. Engl.[4])		1 St. Gesch.			5 St. Französ. 2 St. Geogr.		24 „
Dr. Hoffmann, 6. ordentl. Lehrer, Ord. der IV A.		1 St. Geogr.	1 St. Geogr.	2 St. Geogr.	2 St. Geogr.	3 St. Mathem. 2 St. Rechnen 2 St. Geogr. 2 St. Naturb.	2 St. Rechnen 2 St. Geogr.	2 St. Geogr.	3 St. Rechnen[3])		24 „
Dr. Schumann, wissenschaftl. Hülfslehrer.	2 St. Chemie	2 St. Chemie	2 St. Naturb.	2 St. Naturb.	2 St. Naturb.		2 St. Naturb. 2 St. Gesch.	1 St. Mathem. 2 St. Naturb.	1 St. Math.[3]) 2 St. Naturb.[3])	2 St. Geogr. 2 St. Naturb.	24 „
Gebensleben, freiw. wissenschaftl. Hülfslehrer.			3 St. Physik				3 St. Mathem.				6 „
Matthes, cand. prob.					3 St. Mathem.				3 St. Rechnen 1 St. Mathem. 2 St. Naturb.		6 „
Dr. Pfützner, cand. prob.				4 St. Englisch		5 St. Französ					9 „
Schrader, Zeichenlehrer.	2 St. Zeichnen		2 St. Zeichnen	2 St. Zeichnen	2 St. Zeichnen	2 St. Zeichnen		2 St. Zeichnen		2 St. Zeichnen	14 „
Rathke, Turnlehrer.	2 St. Turnen + 1 St. Vorturnerturnen			2 St. Turnen		2 St. Turnen				2 St. Turnen	9 „
Donadt, Elementar- u. Hülfslehrer.					2 St. Rechnen			2 St. Religion 3 St. Rechnen 2 St. Schreib.	2 St. Schreib.	3 St. Religion 2 St. Schreib.	16 „
Hinze, Elementar- u. Hülfslehrer.					4 St. Französ. 4 St. Englisch	5 St. Franz.[4])	5 St. Französ.	5 St. Französ.			23 „
Illner, Elementar- u. Hülfslehrer, Lehrer d. 3. Vorschulklasse.							2 St. Singen			5 St. Rechnen 2 St. Singen	9 „
Früh, Königl. Musikdirektor.	Chorklasse 2 St.		Vorbereitungsklasse 2 St.								4 „
Herold, Kaplan, katholischer Religionslehrer.	2 St. Religion					2 St. Religion					4 „
Dr. Gelbhaus, Rabbiner, jüdischer Religionslehrer.	1 St. Religion							1 St. Religion			2 „

[1]) Während des Schuljahres wissenschaftl. Hülfslehrer Gebensleben. [2]) Vom 30. August ab derselbe. [3]) Während des Schuljahrs Kandidat Matthes.
[4]) Während des Wintersemesters Kandidat Dr. Pfützner.

der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

Unter-kunda.	Ober-Tertia.	Unter-Tertia.	Quarta A.	Quarta B.	Quinta A.	Quinta B.	Sexta.	Anza wöc lich stu
				3 St. Math.[1])				1
. Religion			2 St. Religion			2 St. Religion		2
Mathem. . Phys.[2])	5 St. Mathem.	3 St. Math.[3])						
	2 St. Religion	2 St. Religion		2 St. Religion 3 St. Deutsch 7 St. Latein.				
	3 St. Deutsch 6 St. Latein.							
. Deutsch . Latein. . Gesch.		3 St. Deutsch 6 St. Latein.						
	2 St. Gesch.		3 St. Deutsch 7 St. Latein.		3 St. Deutsch 7 St. Latein. 1 St. Gesch.		1 St. Gesch.	4
		2 St. Gesch.				3 St. Deutsch 7 St. Latein. 1 St. Gesch.	3 St. Deutsch 8 St. Latein.	
. Französ. . Englisch	4 St. Französ. 4 St. Engl.[4])		1 St. Gesch.			5 St. Französ. 2 St. Geogr.		
. Geogr.	2 St. Geogr.	2 St. Geogr.	3 St. Mathem. 2 St. Rechnen 2 St. Geogr. 2 St. Naturb.	2 St. Rechnen 2 St. Geogr.	2 St. Geogr.	3 St. Rechnen[3])		2
t. Naturb.	2 St. Naturb.	2 St. Naturb.		2 St. Naturb. 2 St. Gesch.	1 St. Mathem. 2 St. Naturb.	1 St. Math.[3]) 2 St. Naturb.[3])	2 St. Geogr. 2 St. Naturb.	
. Physik				3 St. Mathem.				
		3 St. Mathem.				3 St. Rechnen 1 St. Mathem. 2 St. Naturb.		
	4 St. Englisch		5 St. Französ					
Zeichnen	2 St. Zeichnen	2 St. Zeichnen	2 St. Zeichnen		2 St. Zeichnen		2 St. Zeichnen	
							2 St. Turnen	
erturnen	2 St. Turnen			2 St. Turnen				
		2 St. Rechnen			2 St. Religion 3 St. Rechnen 2 St. Schreib.	2 St. Schreib.	3 St. Religio 2 St. Schreib	
		4 St. Französ. 4 St. Englisch	5 St. Franz.[4])	5 St. Französ.	5 St. Französ.			
				2 St. Singen			5 St. Rechne 2 St. Singen	
orbereitungsklasse 2 St.								
Religion					2 St. Religion			
Religion						1 St. Religion		

er Gebensleben. [2]) Vom 30. August ab derselbe. [3]) Während des Schuljahrs Kandidat
ützner.

3. Übersicht

r die von Ostern 1886 bis Ostern 1887 in den einzelnen Klassen behandelten Lehrpensa.

Ober-Prima.

Ordinarius: Direktor Dr. Wiesing.

igionslehre. 2 St. Im Sommer: Römerbrief; im Winter: Glaubenslehre, Memorieren von Kirchenliedern, Repetition des Katechismus. Nach Hollenbergs Leitfaden. Oberlehrer Dr. Kloppe.

Katholischer Religionsunterricht. I. Abt. (I—III vereinigt mit den entsprechenden Gymnasialklassen.) 2 St. Apostelgeschichte. Die Lehre von der heil. Eucharistie und von den Sakramenten. Kirchengeschichte des 18. und 19. Jahrh. sowie des 1.—4. Jahrh. nach Dubelmann. Liturgik: Allgemeines; der Sonntag; der Weihnachtsfestkreis nach Malkmus. Kaplan Herold.

tsch. 3 St. Zweite klassische Litteraturperiode mit eingehender Behandlung einiger Meisterwerke. Privatim: Die 10 letzten Bücher „Wahrheit und Dichtung"; Schiller „über die tragische Kunst" und „über naive und sentimentalische Dichtung". Theorie des Aufsatzes, verbunden mit Disponierübungen. Vierwöchentlicher Aufsatz. Wöchentlich ein freier Vortrag. Oberlehrer Dr. Kloppe.

Themata zu den Aufsätzen: 1. Wer ist unglücklicher, der Blinde oder der Taube? 2. Die Exposition in ers Fiesko. 3. Das handelnde Erwachen der dramatischen Gegensätze im Fiesko. 4. Des Helden Name Erz und Marmelstein so wohl nicht aufbewahrt als in des Dichters Liede. 5. Inwiefern zeigt sich Schiller iesko als Sänger der Freiheit? 6a. Lessings Emilia Galotti und Schillers Fiesko. 6b. Schillers Fiesko eine ıtische Prophetie auf Napoleon I. 7. Welche Veränderungen an der dichterischen Überlieferung haben ildner der Laokoongruppe vorgenommen in Absicht der Schönheit? nach Lessing. 8, Lessings Emilia Gaund die Virginiatafel. 9. Der Triumph der Kameradschaft in Lessings Minna von Barnhelm. 10. Besteht harakter des Götheschen Egmont vor der hamburgischen Dramaturgie?

Abiturienten-Thema Ostern 1886. Minna von Barnhelm ein Produkt des siebenjährigen Krieges.

ein. 5 St. Repetition der Syntax nach Fromm. Lektüre: Livius XXI—XXIII. Horaz carmina, Auswahl. Vierwöchentliche Komposition oder Exposition. Deichert.

ızösisch. 4 St. Lektüre: Aus Thierry, Conquête de l'Angleterre par les Normands; Voltaire, Mérope, Duruy, Histoire de France 1560—1643. Sprechübungen im Anschluss daran. Verslehre. Grammatik: Repetition nach Benecke II. Übersetzt aus Schiller, Geschichte des dreissigjährigen Krieges, Buch II—III. Alle vier Wochen ein Aufsatz, alle zwei bis drei Wochen ein Extemporale. Professor Dr. Schneider.

Themata zu den Aufsätzen: 1. La cité de Jérusalem détruite plusieurs fois. 2. Pourquoi Alfred mérite-t-il nom de grand? 3. Analyse du premier acte de Mérope. 4. La révolution française depuis 1789 jusqu'à rt du roi. 5. Pompée. 6. Les aventures et la fin de Richard Coeur-de-Lion. 7. Sur l'influence que les des ont eue en Europe. 8. Gustav Adolphe prêt à partir pour l'Allemagne. 9. L'année 1813. 10. L'expé- de Gustave Adolphe à l'ouest et au sud de l'Empire. (en classe.)

Abiturienten-Thema Ostern 1886. Comment les Bourbons cherchèrent-ils à affaiblir la maison d'Autriche?

lisch. 3 St. Lektüre: Macaulay, History of England I (Tauchnitz) Charles II, pag. 149—274; Shakespeare, Richard II; Dickens, The Cricket on the Hearth. Sprechübungen. Grammatik:

Repetition nach Gesenius II. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale, ausserdem mü
liche und schriftliche Übersetzungen ins Englische in der Klasse. Professor Dr. Schneid

Geschichte und Geographie. 3 St. Neuere Geschichte vom Beginne des 18. Jahrhund
bis 1871, nach Herbst. Repetition der alten Geschichte, der Geschichte des Mittelalters
geographischer Partieen. Dr. Nägler.

Mathematik. 5 St. Kegelschnitte in synthetischer Behandlung und analytische Geometrie
Ebene. — Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen, Maxima und Min
Auflösungsmethoden der numerischen höheren Gleichungen. Diophantische Gleichungen.
Repetition früherer Pensen. — Nach Kambly und Bardey. — Alle vier Wochen eine sch
liche Arbeit. Der Direktor.

Abiturienten-Aufgaben Ostern 1886. 1) Durch einen Punkt x'y' einer Parabel ist an sie eine Tan
gelegt; wie gross sind die Koordinaten des Berührungspunktes einer zweiten Parabeltangente, welche a
ersteren senkrecht steht? Wie lautet die Gleichung der Berührungssehne und wie zeigt man, dass diese
durch den Brennpunkt geht? Im speciellen Falle sei $y^2 = 8x$, $x' = 18$, $y' > 0$. 2) In einen gegebenen geraden
einen geraden Cylinder zu beschreiben, dessen Gesamtoberfläche einer gegebenen Kreisfläche gleich sei.
Höhe des Kegels beträgt 15,95 cm, der Radius seiner Grundfläche 5,8 cm und der Radius der erwähnten
fläche 8,4 cm. 3) Um welche Zeit hat bei uns die Sonne am längsten Tage eine Höhe von 40°? 4) Ein I
lon von nicht ganz 1000 Mann soll in Reihen aufmarschieren: stellt es sich zu 23 Mann hoch auf, so l
12 Mann übrig, und beim Aufmarschieren zu 25 Mann bleiben 15 Mann übrig; wie stark war das Bataillo

Physik. 3 St. Mechanik. Zusammengesetztere Aufgaben aus allen Gebieten der Physik i
schluss an Repetitionen. Nach Jochmann. Ab und zu eine schriftliche Arbeit i
Klasse. Professor Dr. Krenzlin.

Abiturienten-Aufgaben Ostern 1886. 1) Der Wagebalken einer gemeinen Wage ist 45 cm zwisch
Aufhängepunkten der Wagschalen lang und 0,5 kg schwer; sein Drehpunkt liegt 0,5 cm über, sein Schwe
1 cm unter der Verbindungslinie der Aufhängepunkte. Jede Wagschale wiegt mit den Ketten 1 kg und
2 kg belastet. Wie gross muss das Übergewicht in der einen Schale sein, wenn der Wagebalken um
der horizontalen Lage heraustreten soll? Die vorkommende Reibung auf den Messerschneiden bleibt un
sichtigt. 2) Der Kolbendurchmesser einer Niederdruckmaschine ohne Expansion ist 90 cm, die Hubhöh
die Zahl der Doppelhübe 24 in jeder Minute, die Dämpfe haben eine Spannkraft von 1,192 Atmosphär
Gegendruck beträgt 0,1 Atmosphären: a) wie gross ist die theoretische Arbeitskraft dieser Maschine? b
gross ist die durch die Schwungradwelle fortgepflanzte nutzbare Arbeit derselben, wenn der Erfahrung
cient 0,65 beträgt? Der Luftdruck auf 1 qcm = 1,033 kg, eine Pferdekraft = 75 mkg.

Chemie. 2 St. Behandlung der schweren Metalle und ihrer Verbindungen. Erweiternde
tition der wichtigsten Metalloide. Repetition der Stöchiometrie; stöchiometrische Rechn
Nach Rüdorff. Dr. Schumann.

Ober-Sekunda.

Ordinarius: Professor Dr. Schneider.

Religionslehre. 2 St. Im Sommer: Einleitung in das Neue Testament. Im Winter
gelium Johannis. Memorieren von Kirchenliedern. Repetition des Katechismus.
Dr. Schneider.

Deutsch. 3 St. Schillers Spaziergang, Sophokles' Antigone, (Donner), Schillers Braut von
Lessings Minna von Barnhelm. Privatim: Die Ilias und Schillers dreissigjähriger K
Verwertung des Stoffes zu freien Vorträgen. Disponierübungen. Vierwöchentlicher
Deichert.

Themata zu den Aufsätzen: 1. Die Gastfreundschaft in der Odyssee. 2. Wodurch erhebt sich die Hand. ıg in der Ilias über den Charakter der blossen Schlachtenschilderung? 3. Möchtest du lieber in der Stadt ır auf dem Lande wohnen? 4. Was macht uns Deutschen den Rhein so wert? 5. Wie spricht sich in den den der Gesandten im neunten Gesange der Ilias der Charakter der einzelnen Redner aus? 6. Leidet die phokleische Antigone schuldig oder unschuldig? 7. Labor voluptasque dissimillima natura societate quadam ;er se naturali sunt iuncta. 8. Das Leben ist der Güter höchstes nicht, der Übel grösstes aber ist die Schuld. Inwiefern lässt sich Minna von Barnhelm als ein preussisches Stück bezeichnen? 10, Über die Bedeutung der ccaut-Episode.

atein. 5 St. Cicero, de imperio Cn. Pompei; Livius lib. V; Ovid Metamorph. in Auswahl nach Siebelis. Repetition und Erweiterung der Syntax des Verbums nach Fromm § 382—492. Übersetzungsübungen aus Spiess. 14tägige Exercitien oder Extemporalien. Deichert.

ranzösisch. 4 St. Lektüre: Barante, Jeanne d'Arc; Scribe et Delavigne, Le Diplomate. Im Anschluss daran Sprechübungen. Grammatik: Repetition und Abschluss der Syntax nach Plötz, Schulgrammatik. Einübung durch mündliches Übersetzen. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Prof. Dr. Schneider.

nglisch. 3 St. Lektüre: Gillies, The Persian Wars, Einzelnes übergangen. Grammatik: Repetition und Abschluss der Syntax nach Gesenius II. Einübung durch mündliches Übersetzen. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Prof. Dr. Schneider.

schichte. 2 St. Geschichte der römischen Kaiser und des Mittelalters bis 1492 nach Herbst. Repetition der alten Geschichte. Deichert.

ographie. 1 St. Repetition und Erweiterung der Lehren der mathematischen Erdkunde. Die aussereuropäischen Erdteile, ihre klimatischen und Bevölkerungsverhältnisse. Dr. Hoffmann.

thematik. 5 St. *a*) Geometrie: Repetition und Erweiterung der ebenen Trigonometrie. Algebraische Geometrie. Stereometrie. *b*) Algebra: Syntaktik nebst dem binomischen Lehrsatz mit positiven ganzen Exponenten. Arithmetische Reihen höherer Ordnung, Zinseszins- und Rentenrechnung. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Übungen im Ansetzen. Nach Kambly und Bardey. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. Der Direktor.

ysik. 3 St. Optik, Magnetismus und Elektricität. Lösung physikalischer Aufgaben. Nach Jochmann. Professor Dr. Krenzlin.

emie. 2 St. Einführung in die Chemie und Behandlung der wichtigsten chemischen Prozesse an der Hand der gewöhnlichen metallischen und nichtmetallischen Elemente und ihrer Verbindungen nach Arendt'scher Methode im Anschlusse an Experimente. Oxydation und Oxyde, Entstehung binärer Verbindungen; Sulfide und Chloride, Reduktionen derselben; Umwandlung von Oxyden, Sulfiden und Chloriden in einander. Grundgesetze der Chemie, Atomlehre. Ableitung der Begriffe Säure und Base, Entstehung der Salze; ihre Darstellung, Zersetzung und Wechselzersetzung. Massanalyse. Dr. Schumann.

Unter-Sekunda.

Ordinarius: Professor Dr. Krenzlin.

ligionslehre. 2 St. Im Sommer: Erklärung des Evangeliums Matthäi, die Bergpredigt und Gleichnisse eingehender. Im Winter: Einleitung in das Alte Testament. Kirchenlieder. Repetition des Katechismus. Professor Dr. Schneider.

Deutsch. 3 St. Lektüre und Erklärung von Schillers Glocke, Jungfrau von Orleans, Maria Stu art, Göthes Hermann und Dorothea. Privatim: Homers Odyssee, Schillers Wilhelm Tell un Wallenstein, mit Verwertung des Stoffes zu freien Vorträgen. Alle vier Wochen ein Aufsat Dr. Nägler.

Themata zu den Aufsätzen: 1. Wie motiviert Cicero als Verteidiger im Prozesse des Königs Deiotarı seine Befangenheit? 2. Morgenstunde hat Gold im Munde. 3. Der Prolog in Schillers Jungfrau von Orlean 4. Ohne Fleiss kein Preis. 5. Weshalb ging nach den Perserkriegen die Hegemonie von Sparta auf Athen über 6. Die Vorgeschichte zu Schillers Maria Stuart. 7. Attinghausen und Rudenz. 8. Das Meer ein Freund un Feind des Menschen. 9. Ein Bild zu Goethes Hermann und Dorothea. 10. Was treibt Wallenstein zum Verrat

Latein. 5 St. Cicero pro rege Deiotaro, Cato Maior; Ovid. Metamorph. Auswahl nach Siebeli Repetition und Erweiterung der Syntax mit besonderer Berücksichtigung der Kasuslehre nac Ellendt-Seyffert, verbunden mit Übersetzungsübungen aus Spiess. Alle 14 Tage ei Exercitium oder Extemporale. Dr. Nägler.

Französisch. 4 St. Lektüre: Florian, Don Quichotte (ed. Goebel). Sprechübungen im An schluss an die Lektüre. Grammatik: Repetition des Pensums der Ober-Tertia. Erweiterun nach Plötz' Schulgrammatik, Lektion 77, 61, 46—55, 78. (Kasus-, Tempus-, Moduslehre Die Regeln wurden durch zahlreiche mündliche und schriftliche Beispiele eingeübt. Alle 1 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Knaake.

Englisch. 3 St. Lektüre: The Settlers in Canada by Captain Marryat, XIV—XVI. Sprechübu gen im Anschluss an die Lektüre. Grammatik: Repetition des Pensums der Ober-Tertia, E weiterung nach Gesenius, II, § 81—165. Die Regeln wurden durch zahlreiche mündlicl und schriftliche Beispiele eingeübt. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Knaak

Geschichte. 2 St. Griechische und römische Geschichte nach Herbst. Dr. Nägler.

Geographie. 1 St. Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Erdkunde. Deutschland, sei physischen und politischen Verhältnisse. Dr. Hoffmann.

Mathematik. 5 St. *a*) Geometrie: Repetition und Erweiterung der Lehre von der Ähnlichke der Figuren, geometrische Örter, Elemente der neueren Geometrie, rechnende Geometrie, ebe Trigonometrie. *b*) Algebra: Rechnung mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, Auflösu der Gleichungen 1. und 2. Grades, arithmetische und geometrische Progressionen. Nach Kan bly, Gandtner (Aufg.) und Bardey. Alle vier Wocheu eine schriftliche Arbeit. Profess Dr. Krenzlin.

Physik. 3 St. Mechanik der festen, flüssigen und luftförmigen Körper, Akustik und Wärm Nach Jochmann. Gebensleben.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Elemente der Anatomie und Physiologie der Pflanze Bau des menschlichen Körpers und Grundzüge der Gesundheitslehre. Im Winter: Behandlung d wichtigsten Mineralien nach ihren krystallographischen, physikalischen und — soweit ve ständlich — auch chemischen Eigenschaften. Lehrbuch von Schilling. Dr. Schumann.

Ober-Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Deichert.

Religionslehre. 2 St. Das Leben Jesu im Anschluss an die synoptischen Evangelien. I Apostelgeschichte. Das IV. und V. Hauptstück des Katechismus sind gelernt und erklä die drei ersten repetiert. Kirchenlieder. Oberlehrer Dr. Kloppe.

Deutsch. 3 St. Lesen und Erklären poetischer und prosaischer Stücke aus Hopf und Paulsiek; Kleist Prinz von Hessen-Homburg. Privatim: Uhland, Herzog Ernst von Schwaben. Anleitung zum Aufsuchen der Disposition gelesener Stücke und zum Disponieren von Aufsatzthemata. Vorträge der Schüler über Stoffe der Klassen- und Privatlektüre. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. Deichert.

Latein. 6 St. Caesar, bell. Gall. II. III. Auswahl aus Siebelis Tirocinium poeticum. Repetition und Erweiterung der Syntax des Verbums nach Ellendt-Seyffert. Übersetzungsübungen aus Spiess. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Deichert.

Französisch. 5 St. Lektüre: Paganel, Frédéric le Grand, livre III, chapitre I—IV. Grammatik: Repetition des Pensums der Unter-Tertia. Erweiterung nach Plötz' Schulgrammatik, Lektion 29—45. Die Regeln wurden durch zahlreiche mündliche und schriftliche Beispiele eingeübt. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Knaake.

Englisch. 4 St. Lektüre: W. Scott, Tales of a Grandfather (ed. Loewe) Chapter V—VI. Gedichte von W. Scott und Kirke White. Grammatik: Repetition des Pensums der Unter-Tertia. Erweiterung nach Gesenius, Grammatik der englischen Sprache, § 1—80. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Im Sommer Knaake, im Winter Dr. Pfützner.

Geschichte. 2 St. Brandenburgische Geschichte bis 1648 und deutsch-preussische Geschichte bis 1871. Nach Eckertz. Repetition der deutschen Geschichte bis 1648 und der alten Geschichte. Dr. Rackwitz.

Geographie. 2 St. Befestigung und Erweiterung früherer Pensen der allgemeinen Erdkunde. Die aussereuropäischen Erdteile, ihre Produkte und Verkehrswege mit Rücksicht auf Ansiedelungsgesetze. Dr. Hoffmann.

Mathematik. 5 St. *a*) Geometrie: Lehre von der Gleichheit und Ähnlichkeit der Figuren, Berechnung der regulären Polygone. Aufgaben und Übungssätze. *b*) Algebra: Reduktion zusammengesetzter Buchstabenausdrücke, Rechnung mit Potenzen und Wurzeln, Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit. Nach Kambly, Gandtner (Aufg.) und Bardey. Professor Dr. Krenzlin.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Die Kryptogamen in systematischer Behandlung. Repetition der Phanerogamen im Anschluss an gesammelte Pflanzen. Im Winter: Nach kurzer Repetition der Vertebraten: systematische Behandlung der Arthropoden mit besonderer Rücksicht auf die Insekten. Nach Schilling. Dr. Schumann.

Unter-Tertia.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Nägler.

Religionslehre. 2 St. Geschichte des Reiches Gottes in der vorchristlichen Zeit. Wiederholung der drei ersten Hauptstücke des Katechismus. Kirchenlieder. Oberlehrer Dr. Kloppe.

Deutsch. 3 St. Lesen und Erklären von prosaischen und poetischen Stücken aus Hopf und Paulsiek; Disposition und Wiedergabe derselben. Deklamations- und Disponierübungen. Repetition und Vervollkommnung der Satzlehre. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. Dr. Nägler.

Latein. 6 St. Lektüre: Caesar, bell. Gall. lib. IV. Wiederholung und Ergänzung der Kasuslehre; Fundamentales aus der Syntax des Verbums nach Ellendt-Seyffert. Übersetzungsübungen aus Spiess. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Dr. Nägler.

Französisch. 4 St. Lektüre: Rollin, histoire romaine XVII—XIX. Grammatik: Wiederholung des Pensums der Quarta. Schulgrammatik von Ploetz, Lektion 1—28. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Hinze.

Englisch. 4 St. Grammatik: Gesenius, Lehrbuch der englischen Sprache, Kap. I—XX. Lektüre: Robin Hood. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Hinze.

Geschichte. 2 St. Deutsche Geschichte bis zum westfälischen Frieden nach dem Hülfsbuch von Eckertz. Repetition der alten Geschichte. Zeitschel.

Geographie. 2 St. Die Einteilung der Erdoberfläche. Topographie der europäischen Länder speciell Deutschlands, ihre Bodenproduktion und politischen Verhältnisse. Dr. Hoffmann.

Mathematik. 3 St. *a*) Geometrie: Repetition der Kreislehre und der Lehre vom regelmässigen Polygon. Vergleichung, Verwandlung, Teilung und Ausmessung geradliniger Figuren. Nach Kambly. Einführung in die Lehre von den geometrischen Örtern. Übungssätze und Aufgaben. *b*) Algebra: Die vier Species in allgemeinen Grössen; die Bruchrechnung und Proportionslehre, nach Bardey. Alle vier Wochen eine schriftliche Arbeit. Matthes.

Rechnen. 2 St. Repetition der allgemeinen Prozentrechnung. Zins-, Diskonto-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Kettensatz. Nach Schellen. Von Zeit zu Zeit eine schriftliche Klassenarbeit. Donadt.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Behandlung der wichtigsten monokotylen und dikotylen Pflanzenfamilien des natürlichen Systems im Anschluss an mitgebrachte Pflanzen; systematischer Überblick über dieselben. Im Winter: Das Wichtigste vom Bau des Wirbeltierkörpers und systematische Behandlung der Wirbeltiere. Lehrbuch von Schilling. Dr. Schumann.

Quarta A.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Hoffmann.

Religionslehre. 2 St. Repetition früherer Pensen. Die für die Heilsgeschichte wichtigsten Abschnitte der heiligen Schrift. Erklärung und Memorieren des dritten Hauptstückes des Katechismus und entsprechende Bibelstellen. — Kirchenlieder. Prof. Dr. Schneider.

Katholischer Religions-Unterricht. II. Abt. (IV—VI zusammen mit den entsprechenden Gymnasialklassen). 2 St. 5.—12. Glaubensartikel. Von den Geboten, allgemeiner Teil. Diöcesankatechismus. Biblische Geschichte des Neuen Testaments nach Dr. Schuster. Kaplan Herold.

Deutsch. 3 St. Erweiterung der Lehre vom Satzbau; schwierigere Kapitel der Interpunktionslehre. Memorieren, Besprechen, Wiedererzählen ausgewählter prosaischer und poetischer Stücke aus dem Lesebuche von Hopf und Paulsiek. 2—3wöchentlich ein Diktat oder Aufsatz. Dr. Rackwitz.

Latein. 7 St. Repetition des Pensums der Quinta, Abschluss der unregelmässigen Konjugation. Syntaxis convenientiae und das Fundamentale der gesamten Kasuslehre nach der Grammatik von Ellendt-Seyffert; daneben die häufiger vorkommenden Konstruktionen (acc. c. inf. Participial-Konstruktion etc.) in vorläufiger Behandlung. Dazu die entsprechenden Abschnitte im Übungsbuch von Spiess für IV übersetzt. Lektüre Cornelius Nepos: Iphicrates, Epaminondas, Pausanias, Miltiades. Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium abwechselnd Dr. Rackwitz.

Französisch. 5 St. Elementarbuch von Plötz (Lekt. 60—91): Die regelmässige Konjugation, das persönliche Fürwort und die gebräuchlichen unregelmässigen Verba; ausserdem wurden aus dem Anhange Lesestücke übersetzt und einige derselben gelernt. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. Im Sommer: Hinze. Im Winter: Dr. Pfützner.

Geschichte. 2 St. Griechische Geschichte bis 323 und kurze Übersicht bis 301; römische Geschichte bis 133 und geeignete Abschnitte aus der Folgezeit, nach dem Hülfsbuche von Jäger. Knaake.

Geographie. 2 St. Die Erde in ihrem Verhältnis zur Sonne, Stellung der Erdachse, Zonen, Jahreszeiten. Topographie der aussereuropäischen Erdteile, ihre wichtigsten Tier- und Pflanzentypen im Anschluss an den naturwissenschaftlichen Unterricht. Dr. Hoffmann.

Mathematik. 3 St. Die Lehre von den geraden Linien und Winkeln, von den Parallelen und der Kongruenz der Dreiecke. Lehre vom Viereck und vom Kreis. Einfache Konstruktionsaufgaben. Nach Kambly. Alle 4 Wochen eine häusliche Arbeit. Dr. Hoffmann.

Rechnen. 2 St. Die einfachsten zahlentheoretischen Sätze. Repetition der Lehre von den gemeinen und Decimalbrüchen. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri auf Grund der Lehre von den Proportionen. Kettensatz. Allgemeine Prozentrechnung. Ab und zu eine häusliche Arbeit. Nach Schellen. Dr. Hoffmann.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Botanik; Repetition und Ergänzung der Morphologie der Pflanzen. Das Linnésche System. Übungen im Bestimmen der Pflanzen. Im Winter: Zoologie; vergleichende Repetition der Wirbeltierklassen. Beschreibung und Vergleich einer Anzahl Insekten, besonders aus der Ordnung der Käfer und Schmetterlinge. Zeichnen einfacher und charakteristischer Formen. Nach Schilling. Dr. Hoffmann.

Quarta B.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Kloppe.

Lehrpensa wie in Quarta A.

Quinta A.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Rackwitz.

Religionslehre. 2 St. Biblische Geschichten des N. T. nach den „Gütersloher biblischen Historien". — Aus dem Katechismus Wiederholung des Pensums der Sexta. — Erklärung und Erlernung des zweiten Hauptstücks und darauf bezüglicher Beweisstellen. Psalmen. Kirchenlieder. Donadt.

Deutsch. 3 St. Lehre vom zusammengesetzten Satz und die Grundzüge der Interpunktionslehre. Memorieren, Lesen, Wiedererzählen von Stücken (Gedichten) aus dem Lesebuche von Hopf und Paulsiek. Wöchentlich abwechselnd Diktate und Aufsätze zur Einübung in Orthographie und Interpunktion. Dr. Rackwitz.

Latein. 7 St. Wiederholung der regelmässigen, Einübung der unregelmässigen Deklination, Konjugation, der Präpositionen, Pronomina, Numeralia, Komparation und Adverbia nach der Grammatik von Ellendt-Seyffert. Übersetzung der zugehörigen Beispiele aus dem Übungsbuche von Hennings für V. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Dr. Rackwitz.

Französisch. 5 St. Nach dem Elementarbuche von Plötz (Lekt. 1—59) wurden eingeübt: Artikel, Substantiv, Adjectiv, Pronomina, Adverb uud Numerale sowie die Hülfsverba. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. Hinze.

Geschichte. 1 St. Erzählungen aus der deutschen Geschichte in biographischer Form. Dr. Rackwitz.

Geographie. 2 St. Achsendrehung der Erde und ihre Bewegung um die Sonne. Horizontale und vertikale Gliederung Europas (speciell Deutschlands), seine wichtigsten Flüsse und Städte. Dr. Hoffmann.

Mathematik. 1 St. Die einfachsten mathematischen Gebilde. Leichtere Konstruktionsaufgaben. Dr. Schumann.

Rechnen. 3 St. Die vier Grundoperationen mit Decimalbrüchen. Resolution, Reduktion, Bruchsatz, Regeldetri. Wöchentlich eine schriftliche Arbeit. Nach Harms und Kallius. Donadt.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Beschreibung und Vergleichung einheimischer charakteristischer Pflanzen mit Hinweis auf hervortretende Familiencharaktere (Labiatae, Compositae, Umbelliferae etc.). Erweiterung der Morphologie. Im Winter: Beschreibung und Vergleichung von Hauptrepräsentanten der Wirbeltiere, besonders aus der Klasse der Säugetiere und Vögel mit Erläuterungen. Lehrbuch von Schilling. Dr. Schumann.

Quinta B.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Knaake.

Lehrpensa wie in Quinta A.

Sexta.

Ordinarius: Gymnasiallehrer Zeitschel.

Religionslehre. 3 St. Biblische Geschichten des Alten Testamentes nach den „Gütersloher biblischen Historien"; Erklären des ersten Hauptstückes. Memorieren des zweiten. Kirchenlieder. Sprüche. Donadt.

Deutsch. 3 St. Lehre vom einfachen Satze. Lesen prosaischer (namentlich Märchen und Sagen) und poetischer Stücke aus dem Lesebuche von Hopf und Paulsiek. Wöchentlich Diktat resp. Stilübungen. Memorieren und Vortragen von Gedichten. Zeitschel.

Latein. 8 St. Regelmässige Deklination, das Unentbehrlichste aus der unregelmässigen Deklination, regelmässige Konjugation excl. Deponentia, Komparation, Zahlwörter, Pronomina nach der Grammatik von Ellendt-Seyffert. Beispiele aus dem Übungsbuche von Henning. Wöchentlich Extemporalien resp. Exercitien. Zeitschel.

Geschichte. 1 St. Deutsche Geschichte in biographischer Form. Dr. Rackwitz.

Geographie. 2 St. Die Erde als Weltkörper. Geographische Begriffslehre. Das Wichtigste aus der Geographie der Erdteile mit besonderer Berücksichtigung von Europa. Dr. Schumann.

Rechnen. 5 St. Resolvieren und Reducieren. Die 4 Species mit benannten Zahlen, Zeitrechnung, das Rechnen mit einfachen Brüchen. Übungen im Kopfrechnen. Alle 8 Tage eine schriftliche Arbeit. Illner.

Naturbeschreibung. 2 St. Im Sommer: Beschreibung mitgebrachter Pflanzen; im Anschluss daran Erläuterungen und Einübung der Terminologie. Zeichnen charakteristischer Formen. Im Winter: Beschreibung bekannter Wirbeltierobjekte mit Erläuterungen und Zeichnen charakteristischer Formen. Lehrbuch von Schilling. Dr. Schumann.

Vom Religionsunterrichte waren während des Wintersemesters 13 Schüler dispensiert, welche am Konfirmanden-Unterrichte teilnahmen.

Jüdischer Religionsunterricht. Rabbiner Dr. Gelbhaus.

I. Abt. (I—III vereinigt mit den Gymnasiasten). Sittenlehre. Nachbiblische Geschichte nach Leimdörfer. Im Urtexte wurden gelesen ausgewählte Abschnitte aus den Propheten. 1 St.

II. Abt. (IV—VI mit den entsprechenden Gymnasialklassen zusammen). Biblische Geschichte nach Hecht. Im Urtexte wurden gelesen Hallelpsalmen. 1 St. — Gemeinschaftlich für alle Klassen das 5. Buch Mose. 2 St.

Technischer Unterricht.

1. Turnen. Turnlehrer Rathke.

1) I mit den Klassen bis UII kombiniert. 2 St. Eisenstab- und Marschübungen in abwechselnder Weise. Geeignete Übungen an sämtlichen Geräten in Riegen unter Vorturnern aus Ober- und Unter-Prima, welche in einer besonderen Stunde ausgebildet wurden. Spiele.

2) OIII—UIII kombiniert. 2 St. Reihungen und Schwenkungen in Abteilungen. Frei- und Eisenstabübungen. Gerätübungen in Riegen unter Vorturnern aus Ober- und Unter-Sekunda. Spiele.

3) IV—V kombiniert. 2 St. Reihungen und Schwenkungen in den Reihen, ohne und mit nachfolgenden Drehungen der Einzelnen, Freiübungen im Stande und im Gehen. Gerätübungen in Riegen unter Vorturnern aus Unter-Sekunda. Spiele.

4) VI. 2 St. Die einfachen Windungen der Reihen und Reihungen der Einzelnen. Freiübungen im Stande, Gehen und Hüpfen ohne und mit Drehungen. Besondere Gangarten. Gerätübungen unter Leitung des Lehrers. Spiele.

Die Zahl der vom Turnen dispensierten Schüler betrug 42.

2. Zeichnen. Zeichenlehrer Schrader.

1) I und OII kombiniert. 2 St. Zeichnen nach Gipsmodellen (Reliefornamente) und nach der Antike in ausgeführter Darstellungsweise mit Estompe und zwei Kreiden. Kopieren guter Originale in den verschiedensten Arten der Technik.

2) UII. 2 St. Siehe Prima.

3) OIII. 2 St. Zeichnen nach Gipsmodellen (Reliefornamente) in ausgeführter Darstellungsweise mit Estompe und zwei Kreiden.

4) UIII. 2 St. Zeichnen nach Gipsmodellen (Reliefornamente) in Umrissen ohne jede Schattenangabe. Im Winter: Perspektive.

5) IV A und B. 2 St. Beginn des Unterrichts im Zeichnen nach der Natur. Darstellung e
facher Körper und Znsammensetzen derselben. Im Winter Parallelprojection.

6) V A und B. 2 St. Zeichnen nach ornamentalen Gebilden (Anwendung der Spirale).

7) VI. 2 St. Die elementaren Gesetze des Sehens und Zeichnens, entwickelt aus den einfac
regelmässigen Polygonen.

c. Schreiben. Donadt.

1) V A. 2 St.
2) V B. 2 St. } Deutsche und lateinische Kurrentschrift.
3) VI. 2 St.

d. Gesang.

1) Chorklasse. 2 St. I—III kombiniert. Vierstimmiger Chorgesang der geübten Schüler (Te
und Bass) nach der Sammlung von Volksgesängen für Männerchor von Heim. K. Musikdir. Fr

2) Vorklasse. 2 St. I—III kombiniert. Stimmbildung und Treffübungen nach den Übu
stücken für den realen Treffunterricht von A. Früh. Derselbe.

3) IV und V kombiniert. 2 St. Zwei- und dreistimmige Volkslieder, Choräle; Treffübun
Illner.

4) VI. 2 St. Ein- und zweistimmige Volkslieder, Choräle; Treffübungen. Derselbe.

Veränderungen im Bestande der Unterrichtsmittel.

Die zum Teil bereits in den Programmen der vorhergehenden Jahre erwähnten Veränderun
der Unterrichtsmittel, welche die Genehmigung des Königlichen Provinzial-Schul-Kollegiums er
ten haben, bestehen von Ostern 1887 ab in folgenden:

a) in Sexta bis Ober-Sekunda: Lateinische Grammatik von Ellendt-Seyffert an Stelle
Grammatik von Fromm;

b) in Unter-Tertia bis Prima: Französische Schulgrammatik von Plötz an Stelle der Gramm
von Benecke;

c) in Unter-Sekunda bis Prima: Fünfstellige Logarithmentafel von Greve an Stelle der siel
stelligen von Bremiker.

d) in Sexta bis Quarta: Das Rechenbuch von Harms und Kallius an Stelle der Rechenbü
von Böhme und Schellen.

III.

Auszug aus den Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

1. Des Königlichen Provinzial-Schul-Kollegiums.

1886. März 27. Der Lehrplan für das Schuljahr 1886—1887 wird zur Ausführung ge
migt. — April 2. Mitteilung der Ministerial-Verfügung vom 22. März, betreffend die Anmeldung
dem Winter-Kursus in der Königlichen Turnlehrer-Bildungs-Anstalt zu Berlin. — April 12.

Kandidat Gustav Matthes wird der Anstalt zur Ableistung seines Probejahres überwiesen. — April 19. Das Zeugnis über das Probejahr des Kandidaten Dr. Reinhold Loosch wird übersandt. — April 20. Die Einführung des Rechenbuchs von Harms und Kallius an Stelle der Rechenbücher von Böhme und Schellen zu Ostern 1886 wird genehmigt. — April 27. Die Verhandlungen über die zu Ostern abgehaltene Maturitätsprüfung werden zurückgesandt. — Mai 18. Der Kandidat Matthes und der freiwillige wissenschaftliche Hülfslehrer Gebensleben dürfen in der beantragten Weise beschäftigt werden. — eod. Von dem Herrn Minister wird der Anstalt ein Exemplar des von Dr. H. Stölzel herausgegebenen Werkes: „Karl Gottlieb Svarez“ als Geschenk überwiesen. — Mai 22. Durch Ministerial-Verfügung vom 20. April wird Bericht über die bei Trübner in Strassburg erschienenen „Naturwissenschaftlichen Elementarbücher“ angeordnet und ein Exemplar (10 Bde.) der Bibliothek als Geschenk überwiesen. — Mai 28. Die Direktoren-Konferenzen der Provinz Sachsen werden während der Zeit vom 4.—6. August in Magdeburg abgehalten werden. — Juni 25. Der Kandidat Dr. Ferdinand Pfützner wird der Anstalt zur Ableistung seines Probejahres überwiesen. — Juli 7. Durch die Ministerial-Verfügung vom 17. Juni werden nähere Bestimmungen über die unter Führung von Lehrern unternommenen Ausflüge der Schüler höherer Lehranstalten erlassen. — Juli 28. Von dem Herrn Minister wird der Anstalt ein Exemplar der Photogravüre „Die apokalyptischen Reiter“ nach Cornelius' Karton als Geschenk überwiesen. — Juli 29. Die Anschaffung von „D. L. Schultze, Katechetische Bausteine zum Religionsunterricht“ für die Bibliothek wird empfohlen. — October 28. Von den für die Schülerbibliothek angeschafften Büchern sind in den Programmen die Titel vollständig anzugeben. — 1887. Januar 5. 3 Exemplare der von der historischen Kommission der Provinz Sachsen herausgegebenen „Neujahrsblätter des Jahres 1887“ werden als Geschenk der Kommission für die Anstaltsbibliothek etc. übersandt. — Januar 31. Die angemeldeten Abiturienten dürfen zur bevorstehenden Maturitätsprüfung zugelassen werden.

2. Des Magistrats als Patrons der Anstalt.

1886. Mai 11. Anfrage, ob unter den zu Ostern in die Vorklassen aufgenommenen Knaben noch Ungetaufte befinden. — Mai 17. Über die Verwaltung des Lehrmittelfonds für das Etatjahr 1885—1886 wird Decharge erteilt. — Mai 25. Das von dem Königlichen Provinzial-Schul-Kollegium unter dem 17. Mai bestätigte Regulativ der Bach-Stiftung wird übersandt. — Juni 15. Die fälligen Zinsen der Bach-Stiftung, welche zur Anschaffung von Prämien zu verwenden sind, werden zur Verfügung gestellt. — August 3. Am Sedantage soll eine Schulfeier veranstaltet werden. — October 1. Anfrage, welche von den an dem Realgymnasium angestellten Elementarlehrern reglementivmässig Anspruch auf Alterszulage haben. — 1887. Januar 29. Anfrage, ob Störungen im Betriebe der Centralheizung vorgekommen sind.

III.

Chronik des Real-Gymnasiums für das Schuljahr 1886—1887.

Da das Osterfest im verflossenen Jahre auf den spätesten Tag fiel, an welchem überhaupt Ostern gefeiert werden kann, so begann das Schuljahr erst am 29. April, nachdem am Tage vorher die Aufnahme der neueingetretenen Schüler stattgefunden hatte. Im Anschluss an die Morgen-

Andacht des ersten Schultages wurde der Kandidat des höheren Schulamts Herr Matthes[1]) ein geführt, welchen das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium der Anstalt zur Ableistung des Probe jahrs überwiesen hatte. — Die Pfingstferien währten vom 12.—16. Juni, genau einen Monat späte als im Jahre 1884. Mit Rücksicht auf die Kürze des Sommer-Semesters musste leider von jeder grösseren Ausfluge der Anstalt dieses Mal abgesehen werden, denn schon am 3. Juli wurde wieder um der Unterricht unterbrochen — auf vier Wochen. In der Trennungsstunde gedachten wir mi innigem Danke der Wohlthäter der Schule: des Land- und Stadtgerichtsrats Wilhelm Müller des Dr. Gottlieb Richter, des Professors Dr. John und des Kommerzienrats Bach, welche i hochherziger Weise die Anstalt durch Stipendien- und Prämien-Legate geehrt haben, sowie de treuen früheren Schüler, die gelegentlich des fünfzigjährigen Jubiläums einmütig zu einem Liebes werke zusammengetreten waren, das in Verbindung mit jenen Stiftungen reichen Segen bisher ge bracht hat und auch in Zukunft bringen wird.

In den letzten Teil des Sommer-Semesters fiel die Säkularerinnerung an den Todes tag Friedrichs des Grofsen. In sämtlichen Klassen wurde des erhabenen Monarchen gedacht ur in den Herzen der Knaben und Jünglinge auch bei dieser Gelegenheit das Feuer angefacht, welch die unbegrenzte Liebe und Treue zu König und Vaterland erzeugt.

Am 27. August empfingen die Lehrer nebst ihren Familien und die konfirmierten Schül am Tische des Herrn aus den Händen des Herrn Pfarrer Schatte zu St. Petri das heilige Aben mahl, nachdem am Tage vorher in der Aula der Religionslehrer Herr Oberlehrer Dr. Kloppe d Vorbereitungs-Andacht gehalten hatte. — Am Sedantage fand ein öffentlicher Fest-Aktus sta welcher durch Gesänge des Schülerchors unter Leitung des Herrn Musikdirektors Früh, sow Deklamationen der Schüler eingeleitet und geschlossen wurde, und bei welchem Herr Dr. Racl witz in seiner Festrede den Fürsten Bismark als den „eisernen“ Kanzler, um den uns die gan Welt beneidet, und als das leuchtende Vorbild eines frommen und tapferen Patrioten zeichne Herrn Kunstgärtner Kaiser, welcher wiederum für den Schmuck des Festraumes bestens gesor hatte, sprechen wir auch an dieser Stelle unsern herzlichsten Dank aus.

Die Michaelisferien währten vom 30. September bis zum 9. October. Bei Beginn des Wint Semesters wurde im Anschluss an die Morgenandacht der Kandidat des höheren Schulamts H Dr. Pfützner[2]) eingeführt, welchen das Königliche Provinzial-Schul-Kollegium der Anstalt z Ableistung des Probejahrs überwiesen hatte. — Am 10. November fand in der Aula die Feier s Geburtstages unseres grossen Reformators Dr. Luther statt, bei der der Direktor die Festre hielt. — Die Weihnachtsferien begannen am 23. December und währten bis zum 3. Januar.

In den ersten Tagen des neuen Jahres war es auch unserer Schulgemeinde Bedürfnis, d Allmächtigen Dank zu sagen für die Gnade, mit der er unseren allgeliebten Kaiser und König krönt hat. Im Rückblick auf das in der Geschichte unseres erlauchten Herrscherhauses eing dastehende Jubiläum Sr. Majestät erflehten wir des Höchsten ferneren Schutz für unseren Land herrn, insbesondere baten wir den himmlischen Vater, dass Er treue Stützen des Königs und Vat

---

[1]) Gustav Matthes, geboren am 1. Januar 1861 zu Nieder-Wiesa bei Greiffenberg, besuchte bis Os 1881 das Real-Gymnasium im Waisenhause zu Halle und studierte ebendaselbst Mathematik und Na wissenschaften. Das Examen pro facultate docendi hat derselbe am 6. März 1886 absolviert.

[2]) Ferdinand Pfützner, geboren am 29. Oktober 1857 zu Gebesee, besuchte bis Michaelis 1880 das R Gymnasium zu Erfurt, studierte in Leipzig und Halle neuere Sprachen und absolvierte an dem letz nannten Ort den 8. Mai 1886 das Examen pro facultate docendi, nachdem er ebendaselbst am 12. Dezem 1884 zum Dr. phil. promoviert war.

ndes auch aus dieser Schule erwachsen lasse und uns alle erhalte in Gehorsam, Ehrfurcht und reue zu unserem königlichen Herrn.

In der Woche vom 14.—19. Februar wurden von den Abiturienten, welche sich zum Oster-rmine gemeldet hatten, die schriftlichen Prüfungsarbeiten angefertigt. Für das mündliche Examen t von dem Königlichen Regierungs- und Provinzial-Schulrat Herrn Dr. Todt der 26. März in ussicht genommen.

Der Gesundheitszustand der Schüler kann im allgemeinen als ein günstiger bezeichnet werden. rotzdem hat die Anstalt zwei tüchtige und brave Knaben durch den Tod verloren: am 26. De-mber den Quintaner Robert Krönert, welcher beim harmlosen Spiel mit seinen jüngeren Ge-hwistern sich durch Anstossen an die geöffnete Thür eines eisernen Ofens in seiner Wohnung ne lebensgefährliche Verletzung des Gehirnes zugezogen hatte, sowie den Quintaner Fritz Hen-ess, der, durch einen Schlaganfall gelähmt, lange Zeit gelitten hatte und am 15. Januar zu inem besseren Sein abberufen wurde. Mit herzlicher Teilnahme gaben Lehrer und Mitschüler en Verstorbenen, deren in der Schule bei dem Morgengebete gedacht wurde, das Geleit zu ihrer tzten Ruhestätte, und wir alle vereinigten uns an den Gräbern zu dem Wunsche, dass der barm-erzige Gott den schwergeprüften Eltern reichen Trost gewähren möge.

Die Lehrer waren nur in seltenen Fällen durch Krankheit verhindert, ihre Berufspflichten zu füllen, nämlich: Herr Dr. Nägler am 17. Juni, Herr Dr. Rackwitz am 15. Juni und 13.—15. nuar, Herr Schrader am 26. August und Herr Illner 17.—23. Juni, 29. Juni—3. Juli, 4.—5. Februar und 18.—19. Februar. Beurlaubt wurden die Herren Professor Dr. Schneider am 7. Oktober, Dr. Nägler 26.—28. August, Dr. Rackwitz am 31. Mai, Dr. Schumann 20.—22. Sep-mber, Schrader 17.—19. Juni und Donadt am 24. August und 8.—9. November.

Zum Schluss spreche ich namens der Anstalt unseren Wohllöblichen städtischen Behörden r die zahlreichen Beweise des Wohlwollens, speciell für die Ausstattung zweier Klassen mit neuen ubsellien, den ergebensten Dank aus. — Wie ich im vorigen Jahresbericht unserem tiefen Schmerze er den Verlust des Herrn Oberbürgermeisters Riemann Ausdruck gab, so begrüsse ich zugleich n Namen des Kollegiums an dieser Stelle mit aufrichtiger Ergebenheit das neue Oberhaupt unserer adt, den Herrn Ersten Bürgermeister Hahn, dessen warmes Interesse für das Schulwesen, spe-ell für das Gedeihen des Real-Gymnasiums, uns freudig bewegt und mit den besten Hoffnungen r die Zukunft der Anstalt erfüllt.

IV.

Statistische Mitteilungen.

1. Frequenztabelle für das Schuljahr 1886—1887.

	A. Realgymnasium.													B. Vo		
	OI	UI	OII	UII	OIII A	OIII B	UIII	IVA	IVB	VA	VB	VI	Sa.	1	2	3
1. Bestand am 1 Februar 1886	13	11	7	29	22	18	27	45		54		60	286	24	27	10
2. Abgang bis zum Schluss des Schuljahres 1885/86	13	2	—	7	6	1	3	10		3		—	45	3	1	4
3 a. Zugang durch Versetzung zu Ostern[1])	6		15	26	24		29	21	17	29	27	18	212	24	6	—
3 b. Zugang durch Aufnahme . .	1		1	—	1		8	3	3	5	4	29	55[2])	1	8	20
4. Frequenz am Anfang des Schuljahrs 1886/1887	16		17	33	32		37	27	23	41	37	51	314	28	16	20
5. Zugang im Sommersemester.	—		—	1	—		2	—	—	1	—	1	5	—	—	—
6. Abgang „ „ .	2		3	1	—		4	—	—	1	—	4	15	1	—	1
7 a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis.	—		—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7 b. Zugang durch Aufnahme . .	—		—	—	—		—	1	1	—	1	2	5	—	—	—
8. Frequenz am Anfang des Wintersemesters	14		14	33	32		35	28	24	41	38	50	309	27	16	19
9. Zugang im Wintersemester .	—		—	—	—		—	—	3	1	—	1	5	1	—	—
10. Abgang „ „ . .	—		—	2	1		1	—	—	2	1	1	8	1	—	—
11. Frequenz am 1. Febr. 1887 .	14		14	31	31		34	28	27	40	37	50	306	27	16	1
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1887	18,7		17,9	16,9	15,4		14,5	13,2	13,3	12,1	12,1	11,0		9,1	7,7	7,

2. Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	A. Realgymnasium.							B. Vorschule.					
	Ev.	Kath.	Diss.	Jud.	Einh.	Ausw.	Ausl.	Ev.	Kath.	Diss.	Jud.	Einh.	A w
1. Am Anfang des Sommersemesters	278	9	12	15	202	94	18	59	1	3	1	63	
2. „ „ „ Wintersemesters .	275	8	11	15	205	86	18	58	1	3	—	61	
3. „ 1. Februar 1887	274	8	10	14	204	86	16	57	1	3	1	60	

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten:
Ostern 1886: 18, Michaelis 6 Schüler, davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen O
Michaelis: 1.

[1]) Zu den Versetzten kommt die Mehrzahl der sub 2 angeführten hinzu.

[2]) Bisher wurden auch die aus der 1. Vorklasse Versetzten (cfr. 3 a) als aufgenommen gerechnet. Die Zahl i
nach 73 betragen.

3. Übersicht über die Abiturienten.

Ostern 1886.

Namen	Geburts-Tag	Geburts-Ort	Konf.	Stand des Vaters	Aufenthalt auf der Schule. Jahre:	Aufenthalt in Prima. Jahre:	Beruf.
1. **Raack**, Richard	7. September 1866	Herzberg	ev.	Bahnhofs-Restaurateur	6	2	(später) Theologie.
2. **Kuntze**, Otto	27. Februar 1867	Nordhausen	ev.	Rentier	11	2	Studium der Mathematik und Naturwissenschaften.
3. **Hornickel**, Friedrich	10. April 1866	Nordhausen	ev.	† Buchbindermeister	11	2	Postfach.
4. **Steinmüller**, Oskar	20. December 1865	Nordhausen	ev.	Weinhändler	11	2	Bankfach.
5. **Barthel**, August	21. Februar 1863	Frömmstedt	ev.	Ökonom	$2\frac{1}{2}$	3	Steuerfach.
6. **Köhler**, Otto	28. Juli 1865	Bennungen	ev.	Ökonom	$9\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	Steuerfach.
7. **Schwedler**, Franz	24. December 1863	Mahitzschen	ev.	Rittergutspächter	7	2	Steuerfach.
8. **Gittner**, Bruno	16. Februar 1865	Nordhausen	ev.	Schneidermeister	8	2	Postfach.
9. **Reinbrecht**, Otto	21. Mai 1865	Borxleben	ev.	Rittergutsbesitzer	$8\frac{1}{2}$	2	Studium der Chemie.
10. **Herrmann**, Georg	30. April 1865	Erfurt	ev.	Lederfabrikant	$1\frac{1}{4}$	3	Forstfach.
11. **Brunsemann**, Georg	27. Januar 1864	Nienburg a. d. W.	ev.	† Fleischermeister	4	4	Baufach.
12. **Franke**, Alwin	4. Mai 1867	Nordhausen	ev.	Musikus	8	2	Bankfach.

Die mit * bezeichneten Abiturienten wurden von der mündlichen Prüfung dispensiert.

V.

Verzeichnis der durch Ankauf und Schenkung in die wissenschaftlichen Sammlungen aufgenommenen Lehrmittel.

a) Für die Schulbibliothek wurden folgende Werke angeschafft: Die Fortsetzung von Grimms Wörterbuch; Centralorgan für die Interessen des Realschulwesens; Centralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung in Preussen; Litterarisches Centralblatt, herausgegeben von Zarncke; Monatsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften; Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von Hoffmann; Fleckeisen und Masius, Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik; Frick und Richter, Lehrproben und Lehrgänge aus der Praxis der Gymnasien und Realschulen; Herrigs Archiv für das Studium der neueren Sprachen; Verhandlungen der Direktorenversammlungen in den Provinzen des Königreichs Preussen (Fortsetzung); Fehling, Neues Handwörterbuch der Chemie (Fortsetzung); Zeitschrift zur Förderung des physikalischen Unterrichts; Meyer, Konservationslexikon, Bd. 2—6; Verhandlungen der 38. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner; Oncken, Allgemeine Geschichte in Einzeldarstellungen (Fortsetzung); Janssen, Geschichte des deutschen Volkes seit dem Ausgange des

Mittelalters Bd. 5; Langl, Griechische Götter- und Heldengestalten; Crelle, Journal für die rein und angewandte Mathematik Bd. 99 u. 100; Jacobi, Gesammelte Werke Bd. 4; Reidt, Anleitun zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen; Reisig, Vorlesungen über lateinische Sprach wissenschaft, Heft 7—9; Hänselmann, Zeichenschule I—VI; Schultze, Katechetische Bau steine zum Religionsunterrichte in Schule und Kirche; Koser, Friedrich der Grosse als Kronprin Zeller, Friedrich der Grosse als Philosoph; Das Tagebuch des Kronprinzen; Holzweissi Übungsbuch für den Unterricht im Lateinischen; Schiller, Handbuch der praktischen Pädagogik Wiese, Lebenserinnerungen und Amtserfahrungen; Choralmelodieenbuch für die Provinz Sachse Ellendt, Katalog für die Schülerbibliotheken höherer Lehranstalten; Statistisches Jahrbuch d höheren Schulen Deutschlands IV; Ordnung der Prüfung für das Lehramt an höheren Schul vom 5. Februar 1887; Engelhardt, Die lateinische Conjugation nach den Ergebnissen der Sprac vergleichung; Looff, Die Himmelskunde in ihrer geschichtlichen Entwicklung und nach ihre gegenwärtigen Standpunkte.

Als Geschenke erhielt die Schulbibliothek von dem Königlichen Ministerium: Publikation aus den K. preussischen Staatsarchiven (Fortsetznng); Stölzel, Karl Gottlieb Svarez. Ein Zeibild aus der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts; Cornelius, Die apokalyptischen Reiter; Huley, Allgemeine Einführung in die Naturwissenschaften. Deutsch von Oskar Schmidt; Balfor Stewart; Physik. Deutsch von Warburg; Roscoe, Chemie. Deutsch von Rose; Foster, Phsiologie. Deutsch von O. Schmidt; Schmidt, O., Tierkunde; de Bary, Botanik; Geiki Geologie. Deutsch von O. Schmidt; Geikie, Physikalische Geographie. Deutsch von O. Schmi Lockyer, Astronomie. Deutsch von Winnecke; von der historischeu Kommission der Provz Sachsen: v. Tettau, Frfurts Unterwerfung unter die Mainzische Landeshoheit 1648—1664; vn Naturwissenschaftlichen Verein zu Nordhausen: Vocke und Angelrodt, Flora von Nordhausn vom Herrn Verfasser: von Stamford, Röths Geschichte von Hessen; von dem Herrn Verfass Hoppe, O., Die Bergwerke, Aufbereitungsanstalten und Hütten etc. im Ober- und Unterharz; vn dem Herrn Verfasser: Stern, Meteorologische Beobachtungen der Station Nordhausen. Jagang 1885 und 1886.

b) die Lesebibliothek der Schüler erhielt durch Ankauf und Schenkungen folgende Wer Baur, Das Leben des Freiherrn vom Stein. — Strack, Aus Süd und Ost. Krebs, Die Phyk im Dienste der Wissenschaft, der Kunst und des praktischen Lebens. Otto, das Buch merkwürdie Kinder. Daniel de Foë, Robinson Crusoe. Poesche, Unsere lieben Hausfreunde. Wagnr Entdeckungsreisen im Wald und auf der Haide. Otto, Das Tabakskollegium und die Zeit e Zopfes. — von Holleben, Deutsches Flottenbuch. Lübker, Reallexicon des klassischen Alrtums. Hiecke, Deutsches Lesebuch für obere Gymnasialklassen. Nieritz, Georg Neumk und die Gambe. Pflug, Kaiser Wilhelm. Hertzberg, Die Perserkriege. Pank, Bismarkbüchlein. Kohlrausch, Die Freiheitskriege. Hoffmann, Kolumbus, Kortez und Pizarro. vn Tettau, Erfurts Unterwerfung unter die Mainzische Landeshoheit (Neujahrsblätter 11).

c) Für den physikalischen Apparat wurde durch Renovierung und Vervollständigung älte Instrumente gesorgt.

d) Für die chemische Sammlung wurden angeschafft: Eine grössere Anzahl Glasgefässe, mehr Gerätschaften und einige Apparate (Hofmannsches Eudiometer, galvano-plastischer Apparat, Krll gasbrenner, kupferne Retorte); die Chemikaliensammlung wurde ergänzt und vervollständigt.

e) Für die Naturalien-Sammlung: Aus dem Platowschen Wandermuseum ein Nagelroe ein Dornhai, ein Menschenhairachen, ein Hummer, ein Flusskrebs, ein Taschenkrebs, ein Barbenske

ine Warneidechse, die Entwicklungsstadien vom Weidenbohrer. — An Geschenken erhielt das Kabinet folgende Gegenstände: von Herrn Dr. Hasse zu Nordhausen: Wandtafel I der wichtigsten eutschen Kleinvögel, herausgegeben vom deutschen Verein zum Schutze der Vogelwelt, nebst Erläuterungen. Vom Unter-Tertianer Arpert: einen Panzer der griechischen Landschildkröte. Vom uartaner Thiemann: ein Stück schwarzen Porphyrs und mehrere Würfel bunten Marmors aus übeland. Vom Quartaner Preuss: einen Fuchsschädel. Vom Ober-Tertianer Stolberg; eine nzahl Coleopteren. Vom Unter-Tertianer Schulze: einen ausgestopften Edelmarder.

f) Auch die Apparate für den Zeichen- und Gesang-Unterricht wurden angemessen vermehrt.

Für alle der Bibliothek und den naturwissenschaftlichen Sammlungen gespendeten Geschenke richt der Unterzeichnete namens der Anstalt den ergebensten Dank aus.

Von Herrn Buchhändler Georg Wimmer hier wurde „als ein Zeichen der Anhänglichkeit nes ehemaligen Schülers“ der Anstalt ein Ölbild Sr. Königlichen Hoheit des Kronprinzen gehenkt. Wir sprechen für diese schöne Gabe, welche ein wertvolles Seitenstück zu dem von emselben Geber 1873 dargebrachten Porträt Sr. Majestät des Kaisers bildet, auch an dieser Stelle nseren herzlichsten Dank aus.

VI.

Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

1. „Stipendium des vormaligen Reichsstädtischen Stadtsyndikus, Kaiserlichen Rats und Königlich-Preussischen Hofrats Wilhelm Müller und des Königlich-Preussischen Gerichtsrats Wilhelm üller.“ Das Legat beträgt 4500 ℳ. Die Zinsen sind bestimmt für Studierende aus dem Realymnasium, welche sich dem Studium der Naturwissenschaften gewidmet haben. Im Genusse es Stipendiums befinden sich zur Zeit zwei Studierende.

2. Stiftung desselben zur Anschaffung von physikalischen Instrumenten. Die Zinsen betrugen o 1886 63,78 ℳ.

3. Legat des verst. Dr. phil. Johann Christian Gottlob Richter — Betrag 1500 ℳ. — s Prämien-Fonds für „fleissige, religiös-sittliche“ Schüler der vier unteren Klassen des Realymnasiums. Die Zinsen beliefen sich 1886 auf 59,45 ℳ.

4. Salfeldt-Fonds, Stiftung eines früheren Schülers der Anstalt (Abiturient Mich. 1873) - 300 ℳ. —, dessen Zinsen im Interesse der Bibliothek der Prima zu verwenden sind.

5. Jubiläums-Stiftung des Oberlehrers a. D. Professor Dr. John — Betrag 300 ℳ. — s Prämien-Fonds für „fleissige, religiös-sittliche“ Schüler der Sekunda des Real-Gymnasiums.

6. Jubiläums-Stiftung der ehemaligen Schüler im Betrage von 5500 ℳ, von deren nsen dem § 1 des Statuts gemäss — s. Programm 1886 S. 18 — „würdigen und bedürftigen“ chülern des Real-Gymnasiums Unterstützungen zugewendet werden sollen. Da das durch § 4 rgesehene Kuratorium demnächst konstituiert sein wird, so werden die Früchte des hochherzigen ktes unserer verehrten Freunde bereits im nächsten Schuljahr den gegenwärtigen Schülern gute kommen können.

Eine namhafte Vergrösserung erfuhr der Fonds vor Kurzem durch die letzwillige Bestimmung s Weinbergsbesitzers Friedrich Wilhelm Leopold Kröschell aus Allendorf a. d. Werra, elcher am 1. Februar d. J. auf seinem Gute in Hochheim verstarb. Der Heimgegangene hat m Real-Gymnasium durch Testament vom 15. Januar d. J. ein Kapital von 2000 ℳ. mit der

Bestimmung vermacht, „diese Summe dem im Jahre 1885 gelegentlich der 50jährigen Jubelfei gegründeten Fonds für Schülerstipendien einzuverleiben.“ Wir gedenken des edlen Verblichene der bis zum Jahre 1844 der Anstalt angehört hatte, und werden seiner stets gedenken mit Empfindungen aufrichtiger Dankbarkeit und Pietät.

7. Stiftung des Königlichen Kommerzienrats H. Bach — Betrag 1000 ℳ. — als Prämie Fonds für „fleissige“ Schüler des Real-Gymnasiums. Stiftungs-Urkunde vom 5. Juni 1885, d 70. Geburtstage des Stifters.

8. Der Fonds zur Unterstützung würdiger und bedürftiger Schüler der Anstalt (Sparkass buch No. 7538) betrug am Ende des Schuljahres 1885—1886 . . . . . ℳ. 462.0

Dazu kamen:

a) Zinsen pro 1886 . . . . . „ 15.4
b) Von Herrn Professor Dr. Krenzlin Honorar für Privat-Unterricht. . . . . „ 45.0

Zusammen ℳ. 522.4

Ausgaben:

b) Schulgeld für einen Schüler der Unter-Sekunda . . . . . ℳ. 98.5
b) Für die einer früheren Sammlung entsprechenden Zwecke (vergl. Progr. 1886 S. 65, sub. 5i . . . . . „ 77.0

Summa der Ausgaben ℳ. 175.5

Bleibt Bestand ℳ. 346.9

9. Auch im laufenden Schuljahre sind mehrere Schüler der Anstalt durch Freitische unterstützt worden.

Für alle diese zahlreichen Beweise des Wohlwollens und der Teilnahme spreche ich den verehrten Wohlthätern auch an dieser Stelle im Namen der Anstalt den ganz ergebensten Dank a

VII.

Mitteilungen an die Schüler und deren Eltern und Pfleger.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Freitag, den 1. April.

8 — 8½	IV.	Geographie. Herr Dr. Hoffmann.
8½ — 9	V A.	Deutsch. Herr Dr. Rackwitz.
9 — 9½	V B.	Französisch. Herr Knaake.
9½ — 10	VI.	Latein. Herr Zeitschel.
10 — 10¾	Vorklasse I.	Rechnen, Geographie. Herr Bösel.
10¾ — 11¼	Vorklasse II.	Deutsch, Heimatskunde. Herr Naumann.
11¼ — 12	Vorklasse III.	Rechnen, Religion. Herr Illner.

Zu dieser Prüfung beehrt sich der Unterzeichnete die Wohllöblichen städtischen Behörden die Eltern und Pfleger der Schüler und alle Freunde und Gönner des Real-Gymnasiums ganz ergebenst einzuladen.

Unter Bezugnahme auf die Ministerial-Verfügung vom 10. November 1884 bittet der Berichterstatter die geehrten Eltern der Schüler ebenso aufrichtig wie dringend, ihm in allen Fällen freimütig und vertrauensvoll Mitteilung machen zu wollen, wenn sie die Überzeugung gewinnen, dass ihren Kindern ein Zuviel häuslicher Arbeiten zugemutet worden wäre, was trotz gewissenhafter Erwägung aller Lehrer immerhin in einzelnen Fällen doch vorkommen kann. Ebenso dringend bittet derselbe aber auch darum, streng darauf zu halten, dass die für die Schüler von der Schule den Jahreszeiten gemäss vorgeschriebene Arbeitzeit genau innegehalten werde, da dadurch zugleich die wünschenswerte Gewöhnung an Pünktlichkeit, Fleiss und Gewissenhaftigkeit auch ausserhalb der Schule am sichersten erzielt wird.

Für die Verkündigung der Versetzungen, Verteilung der Prämien, Aushändigung der Censuren, sowie den Schulschluss ist Sonnabend, der 2. April, in Aussicht genommen.

Die Aufnahme neuer Schüler findet Sonnabend den 16. April, vormittags von 8—12 Uhr, im Klassenlokale der Ober-Tertia statt: dieselben haben dazu ausser dem Geburtsscheine ihre Schul- und Impfzeugnisse (Schüler über 12 Jahre auch Wiederimpfscheine) und Schreibmaterialien mitzubringen.

Das neue Schuljahr nimmt Montag, den 18. April, morgens 7 Uhr, seinen Anfang.

Nordhausen, den 18. März 1887.

Dr. Wiesing.

Die

Genauigkeit geometrischer Zeichnungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

hohen philosophischen Fakultät der Albert-Ludwig-Universität

zu Freiburg i. Br.

vom

Lehramtspraktikanten **Ferdinand Geuer**

aus Höchst a. M.

Karlsruhe.

Druck der G. Braun'schen Hofbuchdruckerei.

1902.

Prodekan:

Geh. Hofrat Professor Dr. **Lüroth.**

Referent:

Professor Dr. **Stickelberger.**

Einleitung.

Eine Erhöhung der Genauigkeit kann beim geometrischen Zeichnen nach zwei Richtungen hin strebt werden. Einmal kann man darauf ausgehen, die absolute Genauigkeit der Zeichnung zu rössern. Dieses Ziel wird in gewissem Umfang erreicht durch dauernde Aufmerksamkeit auf die tigkeit aller beim Zeichnen vorzunehmenden Hantierungen, durch eine sinngemässe Anwendung r Instrumente und durch den Gebrauch des besten Zeichenmaterials. — In der höchsten Vollendung uch das geometrische Zeichnen eine Kunst. Auf dieser Stufe lässt sich hier, wie bei allen sten, wenig durch theoretische Erörterungen und abstrakte Belehrungen thun. — Das Beste leistet rliche Begabung.

Dann aber kann bei Konstruktionen die Genauigkeit auch in relativem Sinne gehoben werden rch, dass man immer die Wege aussucht, die am sichersten von den gegebenen Elementen zu gesuchten Ziele führen. Es kommt dabei nicht so sehr darauf an, Fehler zu vermeiden, als lf, sie nach Möglichkeit zu kompensieren. Hierzu bieten die vielen Willkürlichkeiten, die bei geometrischen Auflösung eines Problems in die Hand des Lösenden gelegt sind, willkommenen s. Bei einer vollständigen Durchdringung der Bedingungen, auf denen die Lösung beruht, darf mehr willkürlich und dem Belieben anheimgestellt bleiben. — Die Grundsätze, nach denen in Fällen die Auswahl unter dem geometrisch Zulässigen zu treffen ist, damit das Resultat möglichst wird, darzulegen, ist die Absicht, in der diese Schrift verfasst wurde.

I.

Die Grundlage des Ausgleichungsverfahrens.

1.

Die zeichnende Geometrie ist wesentlich Punktgeometrie. Sie sieht den Punkt als das El aller Figuren und Gebilde an und baut die geometrischen Vorstellungen aus Punkten auf.

In etwas erweitertem Sinn lässt sie wohl auch die Gerade oder den Strahl als Element g doch eigentlich nur bei gradlinigen Gebilden. Die allgemein gebräuchlichen Hilfsmittel des Zeicl Zirkel und Lineal, gestatten keine Darstellung der Kurven als Strahlengebilde.

Jede geometrische Aufgabe verlangt, dass die Lage eines Punktes aus der Lage geg Punkte aufgefunden werde unter Benützung des geometrischen Zusammenhanges, der durch die gabe selbst zwischen dem gesuchten und den bekannten Punkten hergestellt wird.

In ähnlicher Weise kann auch die Auffindung der Lage eines Strahles verlangt werde Übertragung der den Punkt betreffenden Auseinandersetzungen auf Strahlen möge im folg immer von selbst hinzugefügt werden, auch wenn hiezu nicht ausdrücklich aufgefordert wird.

Ist die Anzahl der geometrischen Eigenschaften, die durch die Aufgabe von dem ges Punkte verlangt werden, kleiner als zwei, dann ist der Punkt unbestimmt, d. h. es gieb unendlich grosse Anzahl von Punkten, die alle die gewünschte Eigenschaft besitzen und von keiner einen Vorzug vor den anderen hat. Werden dagegen mehr als zwei geometrische Eigens von einem Punkte verlangt, dann ist der Punkt überbestimmt, die Lösung der Aufgabe ist unm d. h. es giebt keinen Punkt, der die gewünschten Eigenschaften alle besässe. Solche Überbe ungen haben geometrisch keinen Sinn, deshalb wird von ihnen hier abgesehen; sie können abe praktischen Sinn haben, nämlich den, unter allen Punkten den zu suchen, der allen verlangten schaften zugleich am meisten gerecht wird, der von einer Eigenschaft gerade so viel nachgie unbedingt erforderlich ist, um die anderen geforderten Eigenschaften nahezu zu erfüllen. In Sinne wird die Aufgabe im folgenden ihre Lösung finden.

Ein Punkt muss zwei Eigenschaften besitzen, wenn er auf geometrischem Wege ge werden soll. Dann ist seine Lage bestimmt, es giebt nur einen oder höchstens eine besch Anzahl diskreter Punkte, die die verlangten Eigenschaften haben.

Aber die Art und Weise, wie ich von den gegebenen Stücken zu dem gesuchten gelange, ist damit keineswegs mitbestimmt. Durch die merkwürdige Verkettung zwisch geometrischen Beziehungen, die Schopenhauer veranlasste, einen „Seynsgrund im Raum“ aufzu (Schopenhauer: Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde § 37), kann sammenhang zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken auf mannigfaltige Weise her

len; häufig führen viele Wege zum Ziel, oft sogar so, dass man nicht einmal sagen kann, wer ihnen der kürzeste ist.

Wären die geometrischen Zeichnungen absolut genau, dann müsste es freilich gleichgiltig sein, hen Weg man einschlägt, alle müssten zu derselben Lage führen, keinem könnte, abgesehen von Kürze, der Vorzug vor den anderen gebühren.

Nun sind aber die geometrischen Zeichnungen durchaus nicht fehlerfrei; jeder, der nur einigeren Übung im Zeichnen auf dem Reissbrett hat, weiss, bis zu welch' unerwarteter Grösse die er der Zeichnung oft anwachsen, er weiss auch, mit welcher oft an Tücke grenzenden Absichtheit sie gerade dann hervorbrechen, wenn man sich ihrer am wenigsten versieht. Und das geht bei Zeichnungen, auf deren Anfertigung Sorgfalt und Mühe verwendet wurde. Wie es erst der Genauigkeit von Zeichnungen steht, die von ungeübten Händen mit ungeeigneten Instrumenten schlechtem Papier hergestellt werden, weiss jeder aus eigener Erfahrung.

Infolge also der bei allen Zeichnungen vorhandenen Ungenauigkeiten werden die Lagemmungen desselben Punktes auf verschiedenen Wegen nicht zu demselben Ziele führen. Die liche Lage des gesuchten Punktes bleibt unbestimmt, jeder in einem gewissen Umkreis um die fundenen Lagen befindliche Punkt hat die Möglichkeit, der gesuchte Punkt zu sein, dagegen ist Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Punkt der gesuchte ist, nicht gleich gross für alle te. Es wird sich also darum handeln, denjenigen Punkt aufzufinden, der die grösste Wahrnlichkeit für sich hat, der richtige zu sein und diesen statt des gesuchten Punktes zu nehmen.

Sucht man also die Lage eines Punktes auf verschiedenen Wegen, dann ist die Lage des tes überbestimmt. Es handelt sich dann darum, statt der wirklich gefundenen Punkte denjenigen ählen, für den die Wahrscheinlichkeit, dass er der richtige ist, möglichst gross wird. Die Benung dieses Punktes und seine Wahl an Stelle des unauffindbaren, strengrichtigen heisst die leichung der Punktbestimmung.

Gleichzeitig mit der Ausgleichung erhalten wir in der Grösse oder Kleinheit der vorzunehmenden ekturen einen Masstab zur Beurteilung der Genauigkeit der angefertigten Zeichnung im allinen. In ähnlicher Weise geben die Betrachtungen der Grundsätze, nach denen der Ausgleich nommen wird, ein Mittel, die relative Genauigkeit einzelner Konstruktionsweisen zu beurteilen dem entsprechend den Weg unter den möglichen auszusuchen, der am sichersten zum führt.

Bei allen Zeichnungen, die auf grössere Genauigkeit Anspruch machen, wird man nicht veren, wenigstens die naheliegenden, sich von selbst anbietenden Überbestimmungen vorzunehmen, iber die Grösse der auftauchenden Konstruktionsfehler eine fortdauernde Kontrolle zu haben. wirkliche, konstruktive Ausgleichung, wie sie im folgenden gelehrt wird, kann man wohl mit all' der Umständlichkeit vornehmen, die nun einmal damit verknüpft ist. Es wird meistens gen, notwendige Verbesserungen nach dem blossen Gefühl vorzunehmen, dessen Sicherheit durch Kenntnis der Methoden, nach denen der vollkommene Ausgleich stattzufinden hat, wesentlich ärft wird.

2.

Gauss hat die Grundsätze, nach denen in ähnlichen Fällen, wie hier, die Ausgleichung vormen ist, zweimal entwickelt und zwar auf sehr verschiedener Basis. Zuerst, im engsten An-

schluss an die Wahrscheinlichkeitsrechnung in seiner theoria motus corporum coelestium § 175 - später, auf Grund des Begriffes des „mittleren Fehlers", in einer in zwei Teilen erschienenen sonderen Abhandlung: theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, die im 1826 noch durch ein supplementum weitergeführt wurde. Die erste dieser Ableitungen hat vor zweiten die leichtere Verständlichkeit, die zweite aber vor der ersten grössere Allgemeinheit u Anwendbarkeit voraus.

Es sei gestattet, hier den Gedankengang der ersten Ableitung mit denjenigen Veränderu die durch die besondere Art unserer Anwendung notwendig werden, zu wiederholen.

Der Begriff des Fehlers einer Bestimmung ist die Strecke, um welche die getroffene stimmung von der wahren Lage entfernt ist. Es sei vor der Hand angenommen, dass alle I auf einer und derselben Geraden liegen, so dass die Fehler ausser ihrer Grösse nur noch die Verschiedenheit in der Richtung aufweisen, die durch die Vorzeichen plus und minus ausgedr werden kann.

Der Grösse jedes solchen Fehlers kommt eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zu. Die Az der möglichen Bestimmungen ist aber unendlich gross, so dass das Verteilungsgesetz der Fehler dann richtig und wahr in die Erscheinung tritt, wenn man sich eine Lagebestimmung unen oft wiederholt denkt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers der Quotient aus der Az der wirklich begangenen Fehler von angenommener Grösse und der Anzahl der möglichen I überhaupt. Auf alle Fälle kann man sich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers als Funktion i Grösse denken. Diese Funktion ändert sich stetig mit der Veränderung der Grösse des Fehlers, le es ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass sie sich sprungweise und unstetig ändern sollte

Bezeichnet man die Grösse eines angenommenen Fehlers mit Δ, dann mag $\varphi(\Delta)$ die W scheinlichkeit des Fehlers vorstellen; sucht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgend begangener Fehler zwischen den Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt, so erhält man dafür den Ausd

$$\varphi(\Delta) \cdot d\Delta$$

und weil die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen einer grösseren Anzahl von Einzelfällen glei Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten ist, so muss:

$$\int_{-a}^{+a} \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

die Wahrscheinlichkeit dafür sein, dass ein Fehler die Grösse a nicht übersteigt.

Den Charakter der Funktion $\varphi(x)$ genau zu bestimmen, ist ganz und gar unmöglich. Sie ä ausser von vielem anderen auch von der Individualität des Zeichners ab, die sich allen mathemat Abschätzungen entzieht. Dennoch lassen sich einige allgemeine Eigenschaften angeben, die möglichen Funktionen $\varphi(x)$ zukommen müssen:

Zuerst wird der Wert von $\varphi(x)$ für $x = 0$ ein Maximum sein, vorausgesetzt, dass begangenen Fehler, „zufällige Fehler" sind und dass unter den Zeicheninstrumenten keines is durch seine schlechte Beschaffenheit bei jeder Anwendung einen Fehler in derselben Richtung h bringt. Ein unter solchen Umständen zu stande gekommener Fehler wäre ein „konstanter F

Konstante Fehler werden ausdrücklich von der Betrachtung ausgeschlossen. Ihr Vorh sein in merklicher Grösse kann die hier vorgetragenen Schlussfolgerungen gänzlich in Frage s weshalb man bei feineren Zeichnungen die sämtlichen Instrumente darauf zu prüfen hat,

ie einseitige Ungenauigkeiten erzeugen. Besonders aber sind die Winkelscheite auf ihre Rechtligkeit zu untersuchen, denn ihre mangelhafte Beschaffenheit ist die Quelle nicht nur der gröbsten nenfehler überhaupt, sondern auch besonders der hier als „konstante Fehler“ bezeichneten nauigkeiten.

Ferner wird $\varphi(+x) = \varphi(-x)$ sein. Denn, nachdem die konstanten Fehler von der Betrachtung eschlossen sind, liegt es in der Natur der Sache, dass die Fehlerursachen ebenso leicht positive, wie tive Fehler erzeugen, dass also die Wahrscheinlichkeit für beide Arten von Fehlern bei gleicher se des Fehlers gleich gross ist.

Ausserdem muss $\varphi(x)$ mit wachsendem x rasch abnehmen, um bei einer, von der Sorgfalt der nung abhängenden Grösse von x gleich Null oder so verschwindend klein zu werden, dass der der Funktion vernachlässigt werden darf.

Zuletzt muss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$$

Denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss die Gewissheit sein.

Denkt man sich nun die Lage eines Punktes überbestimmt dadurch, dass er auf mehr als Kurven gleichzeitig liegen soll, die aber nicht alle durch einen und denselben Punkt gehen, wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in der Nähe der Schnittpunkte gewählter Punkt ichtige ist, von der Grösse der Fehler abhängen, die in Bezug auf diesen Punkt in den benden Kurven begangen worden sind. Da ein Zweifel entstehen könnte, was man unter dem einer Kurve in Bezug auf einen Punkt verstehen soll, so definieren wir als solchen den sten Normalabstand des Punktes von der Kurve. Hat also unser Punkt von den einzelnen menden, aber fehlerhaft gezeichneten Kurven die kürzesten Normalabstände $n_1, n_2, n_3, \ldots n_q$, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der ersten Kurve der Fehler n_1, bei der zweiten der Fehler n_2 u. s. w. gleichzeitig begangen wurde, gleich dem Produkt der einzelnen cheinlichkeiten, also gleich:

$$\varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2) \cdot \varphi(n_3) \cdot \ldots \cdot \varphi(n_q) = \Omega.$$

Ist die Zeichnung genau genug, um in der Nähe des gesuchten Punktes die Normalabstände derselben Kurve als parallel erscheinen zu lassen, oder sind die bestimmenden Linien Gerade, beeinträchtigt die Verschiedenheit in der Richtung der Abstände $n_1, n_2 \cdot \ldots \cdot n_q$ die Schlussngen in keiner Weise; wir haben in dem Produkte Ω die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der gewählte Punkt der gesuchte ist.

Nun ist es leicht, einzusehen, dass derjenige Punkt, dessen Lage die Wahrscheinlichkeit dafür, der richtige ist, zu einem Maximum macht, den vorhandenen Bedingungen am besten Genüge wenn er freilich auch keine von ihnen streng erfüllt. Der von Gauss gegebene Beweis für Behauptung kann hier wegbleiben, er ist der Inhalt des § 176 der „theoria motus“, wo man chlesen kann. Die Aufgabe also, einen in der Zeichnung überbestimmten Punkt auszugleichen, arauf hinaus, den Punkt zu suchen, wofür das Produkt Ω ein Maximum wird. Es ist aber, ion oben bemerkt wurde, unmöglich, den analytischen Charakter der Funktion $\varphi(x)$ festn. Dagegen lässt sich fragen, welches analytische Gebilde sich am geschicktesten den früher ellten allgemeinen Eigenschaften, die jede Funktion $\varphi(x)$ besitzen muss, anschmiegt. Die Ant-

wort darauf wird dadurch erhalten, dass man von der aufzufindenden Funktion verlangt, dass ihr sich die natürlichste aller Ausgleichungsregeln, die man aufstellen kann, herleiten lässt. einfachste aller Ausgleichungsbestimmungen ist folgende: Wird die Länge einer überbestimmt Strecke mit festem Anfangspunkt aus lauter gleich genauen Abmessungen aufgesucht, dann ist arithmetische Mittel der Einzelabmessungen die genaueste Längenbestimmung, die es in diesem geben kann.

Denkt man sich alle einzelnen Abmessungen von einem festen Punkte aus nach derselben Richtung auf dieselbe Gerade abgetragen, dann bilden alle Endpunkte ein System diskreter Punkte von gleicher Bedeutung. Die eben erwähnte Regel verlangt, dass als richtigster Endpunkt der gesuchten Strecke der Schwerpunkt des Punktsystems zu betrachten sei, wenn man allen Punkten dieselbe Masse zuerteilt. Nun ist aber die wichtigste Eigenschaft des Schwerpunktes die, dass für jede durch ihn gezogene Gerade die Summe der statischen Momente der Einzelpunkte zu Null wird. Haben die Punkte alle die gleiche Masse und liegen sie alle auf derselben Geraden, dann muss die algebraische Summe der Abstände der einzelnen Punkte vom Schwerpunkt gleich Null sein. Soll die Ausgleichung nur ein besonderer Fall der allgemeinen Regel sein, so wird diese lauten:

„Ist ein Punkt zeichnerisch überbestimmt, so ist der ausgeglichene Punkt so zu wählen, dass die geometrische Summe der Fehler verschwindet."

Die „geometrische Summe" von Strecken bedeutet nach Schell (Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Bd. 1 S. 11) die Strecke, die entsteht, wenn man die gegebenen Einzelstrecken in beliebiger Reihenfolge unter Beibehaltung ihrer Richtungen aneinander fügt und dann den Anfangspunkt der ersten Strecke mit dem Endpunkt der letzten verbindet. Wird die geometrische Summe eines Streckensystems zu Null, dann schliesst sich der Zug der Einzelstrecken; durch die geometrische Summation entsteht ein geschlossenes Polygon. Wir können die Regel auch so aussprechen: „Die Zeichnung wird für einen überbestimmten Punkt so ausgeglichen, dass die Summe der Fehler für den gewählten Punkt ein geschlossenes Polygon bildet."

Handelte es sich bei Zeichnungen bloss darum, überbestimmte Punkte auszugleichen, dann könnte man mit der eben ausgestellten Regel vollständig auskommen. Es bliebe dann nur noch übrig, zu zeigen, wie man in jedem gegebenem Fall den gesuchten Punkt finden kann und ferner, wie die Schlüsse die gegebene Regel auf die Form der Funktion $\varphi(x)$ zulässt. Da jedoch auch Strahlen- und Kurven auszugleichen sind, bei denen eine unmittelbare Übertragung der Regel unmöglich ist, erscheint es angebracht, dem Ausgleichungsprinzip eine allgemeinere Fassung zu geben.

Fig. 1. Ich beschränke mich hier der Kürze halber auf den Fall, dass die Lage eines Punktes durch drei Gerade überbestimmt ist. Sollten statt der Geraden etwa Kurven zur Bestimmung des Punktes gezeichnet sein, so wird angenommen, dass die Konstruktionen genau genug sind, um die Kurven in der Nähe ihrer Schnittpunkte durch drei Tangenten ersetzen zu dürfen. Die drei Bestimmungsgeraden bilden ein kleines Dreieck, innerhalb dessen der gesuchte Punkt wohl liegen muss. Wo ich ihn auch annehme, immer werden die drei Fehler, die hier die Abstände des gewählten Punktes von den Seiten des Dreiecks sind, unter einander dieselben Winkel bilden. Bestimmt man die Reihenfolge der Seiten des Dreiecks dadurch, dass man ihnen die Bezeichnung a, b und c giebt, so ist damit auch die Reihenfolge der Fehler n_1, n_2 und n_3 mitbestimmt. Es möge der Winkel zwischen n_1 und n_2, der zwischen n_2 und n_3: λ_1 und der letzte λ_2 heissen. Denkt man sich noch in der Ebene zwei einander senkrechte Gerade, von denen die erste mit n_1 zusammenfällt, dann sind die Projek-

Fehler auf die erste Axe der Reihe nach: $n_1, n_2 \cos \lambda_3, n_3 \cos \lambda_2$. Die Projektionen der Fehler Fig. 1
die zweite Axe sind der Reihe nach: $0, n_2 \sin \lambda_3 - n_3 \sin \lambda_2$.

Die Summe der Projektionen auf die erste Axe möge A heissen, dieselbe Summe in Bezug auf zweite Axe sei B. Nennt man den Inhalt des von den drei Geraden gebildeten Dreiecks J, dann ehen zwischen den Fehlern n_1, n_2, n_3 folgende drei lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} a n_1 + b n_2 + c n_3 - 2J &= 0 \\ n_1 + \cos \lambda_3 \, n_2 + \cos \lambda_2 \, n_3 - A &= 0 \\ \sin \lambda_3 \, n_2 - \sin \lambda_2 \, n_3 - B &= 0. \end{aligned}$$

Bildet man die Matrix dieses Gleichungssystems und nennt die Determinanten dieser Matrix Reihe nach $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, dann ist:

$$n_1 = -\frac{\Delta_1}{\Delta_4}; \quad n_2 = +\frac{\Delta_2}{\Delta_4}; \quad n_3 = -\frac{\Delta_3}{\Delta_4}.$$

Wir wollen versuchen, die Summe der Quadrate der Fehler zu bilden:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{1}{\Delta_4^2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2).$$

leichtesten ist die Bildung von Δ_4:

$$\Delta_4 = a \sin \lambda_1 + b \sin \lambda_2 + c \sin \lambda_3.$$

Entwickelt man die Determinanten $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ nach den Elementen der letzten Vertikalreihe, ssen sich die Entwicklungen schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2Je_1 + Ae_2 + Be_3 \\ \Delta_2 &= 2Jf_1 + Af_2 + Bf_3 \\ \Delta_3 &= 2Jg_1 + Ag_2 + Bg_3. \end{aligned}$$

ach ist:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 4J^2(e_1^2 + f_1^2 + g_1^2) + A^2(e_2^2 + f_2^2 + g_2^2) + B^2(e_3^2 + f_3^2 + g_3^2)$$
$$+ 4JA(e_1 e_2 + f_1 f_2 + g_1 g_2) + 2AB(e_2 e_3 + f_2 f_3 + g_2 g_3) + 4BJ(e_3 e_1 + f_3 f_1 + g_3 g_1).$$

eun Koëffizienten $e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$ sind Determinanten zweiten Grades.

Bildet man unter Anwendung der bekannten Sätze aus der Determinantenlehre diese quadra- n Trinome und beachtet, dass:

$$a + b \cos \lambda_3 + c \cos \lambda_2 = 0 \text{ und } b \sin \lambda_3 - c \sin \lambda_2 = 0$$

ann erhält man:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 =$$
$$\frac{\text{in}^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_3) + (a^2 + b^2 + c^2)\,[A^2(\sin^2 \lambda_2 + \sin^2 \lambda_3) + B^2(1 + \cos^2 \lambda_2 + \cos^2 \lambda_3) + 2AB \sin(\lambda_2 - \lambda_3)\,]}{(a \sin \lambda_1 + b \sin \lambda_2 + c \sin \lambda_3)^2}$$

Der Faktor von $a^2 + b^2 + c^2$ lässt sich, unter Beachtung der leicht zu findenden Formel:

$$(\sin^2 \lambda_2 + \sin^2 \lambda_3)\,(1 + \cos^2 \lambda_2 + \cos^2 \lambda_3) - \sin^2(\lambda_2 - \lambda_3) = \sin^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_2 + \sin^2 \lambda_3,$$

ender Gestalt schreiben:

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda_2 + \sin^2 \lambda_2}\,[A(\sin^2 \lambda_2 + \sin^2 \lambda_3) + B \sin(\lambda_2 - \lambda_3)\,]^2 + B^2[\sin^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_2 + \sin^2 \lambda_1].$$

eser zweiten Form des Ausdrucks für die Summe:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$$

erhellt sofort die charakteristische Bedeutung der Forderung, dass das Polygon der Fehler sich s
Ist nämlich die geometrische Summe der Fehler $= 0$, dann wird $A = 0$ und $B = 0$. Daraus
sich, dass $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2$ und also auch: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ ein Minimum ist. Wir könn
behaupten, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird, wenn wir den Punk
Ausgleich wählen, für welchen die geometrische Summe der Fehler verschwindet.

Aber die hier vorgetragene Schlussweise lässt sich auch umkehren; das ist immer
Mathematik das Kriterium dafür, dass die Folgerung genau denselben Inhalt hat, wie die
setzung, dass es daher gleichgiltig ist, welche von beiden man zur Grundlage weiterer Untersu
macht. Ich darf deshalb an Stelle der oben ausgesprochenen Forderung auch diese stellen:

Ist ein Punkt überbestimmt und sind die Kurven alle gleich genau gezei
so muss man zum Ausgleich den Punkt wählen, für den die Summe der Fehlerqu
ein Minimum wird.

Dies ist die spezialisierte Form des allgemeinen Gauss'schen Ausgleichungsprinzips,
gewöhnlich als die „Methode der kleinsten Quadrate" bezeichnet wird. Die Bezeichnung rü
Legendre[1] her, der das Ausgleichungsverfahren zuerst la méthode des moindres carrés genan
Gauss hat die Bezeichnung angenommen, wiewohl er meistens von der „sogenannten" Meth
kleinsten Quadrate spricht; trotzdem wäre es richtiger, wenn man vom Prinzip der kleinsten
der Fehlerquadrate spräche. Da Dienger[2] bereits in diesem Sinne vorangegangen ist, so wir
hier die letztere Bezeichnung gebraucht.

Die leichte Ausdehnung des gegebenen Beweises auf den Fall, dass n Fehler auszug
sind, der auf demselben Gedankengang beruht, kann um so eher unterbleiben, weil wir spä
den Zusammenhang der beiden Ausgleichungsprinzipe von der anderen Seite her zurückkomme

Diese zuletzt gegebene Fassung der Verbesserungsmethode unvollkommener Bestimmun
den ausserordentlichen Vorzug vor der ersten, dass sie sich mühelos auf alle anderen Fälle,
hier bei auszugleichenden Zeichnungen vorkommen können, ausdehnen lässt.

Sehen wir zu, in welcher Weise das zuletzt gewonnene Resultat dazu benutzt werde
um die analytische Form der Funktion $\varphi(x)$ zu finden, deren Grösse die Wahrscheinlichkeit
Fehler x ausdrückt. Oben war in dem Produkte: $\varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2) \cdot \varphi(n_3) \cdot \cdot = \Omega$ die Wahr
lichkeit für das gleichzeitige Auftreten der Fehler $n_1, n_2, n_3, \cdots n_q$ gefunden worden.
Produkt muss ein Maximum werden, wenn die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wir
Multiplikation wird aber in der Form einer Addition nur dann ausgeführt, wenn die F
Potenzen mit gleicher Basis sind. Daraus geht hervor, dass $\varphi(x)$ die Gestalt einer Potenz i
veränderlicher Basis haben muss und dass im Exponenten ein Vielfaches des Fehlerquadrate
Wählt man zur Basis die Zahl e, was immer erlaubt ist, dann muss:

$$\varphi(x) = a\, e^{b\, x^2}$$

sein. Damit aber Ω ein Maximum wird, wenn die Summe der Fehlerquadrate möglichst kl
muss b eine negative Zahl sein. Wir setzen $b = -h^2$; a dagegen lässt sich vollständig bes
wenn man bedenkt, dass:

---

[1] Legendre: Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris 1806.

[2] Dienger: Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen. Vieweg u. Sohn.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\, e^{-h^2 x^2}\, dx = 1$$

muss. Setzt man $hx = t$, dann wird dieses Integral zu:

$$\frac{a}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{a\sqrt{\pi}}{h} = 1$$

Daraus ergiebt sich $a = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, mithin also:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}$$

Bei der soeben erhaltenen Form der Funktion, die die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von nnter Grösse ausdrückt, ist die einzige, nicht völlig bestimmte Zahl, die darin vorkommt, der meter h. Er wird sich ändern, je nachdem die Qualität der Zeichnung sich ändert, je genauer Zeichnung ist, um so grösser wird h sein. Der Parameter h kann geradezu als Mass Genauigkeit einer Zeichnung angesehen werden.

Denn, wenn in einer Zeichnung von bestimmter Genauigkeit die Wahrscheinlichkeit gesucht dass der begangene Fehler die Grösse δ nicht überschreite, so findet man, nach dem früheren, ir den Ausdruck:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2 x^2}\, dx$$

Ist dagegen bei einer zweiten Zeichnung der Parameter h', dann hat das Integral:

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}}\int_{-\delta'}^{+\delta'} e^{-h'^2 x^2}\, dx$$

he Bedeutung. Beide Integrale geben aber denselben Wert, wenn $h\,\delta = h'\,\delta'$ ist. Ist also $2h$, dann ist $\delta' = \frac{1}{2}\,\delta$, d. h. der Spielraum für den Fehler ist in diesem Falle bei gleicher scheinlichkeit nur halb so gross; dieses aber bedeutet, dass die Genauigkeit der zweiten nung doppelt so gross ist, wie die der ersten.

Die Bedeutung, die dem Parameter h zukommt, ermöglicht es uns, auch Zeichnungen, die aus bestandteilen von verschiedener Genauigkeit zusammengesetzt sind, auszugleichen. Denn anmen, ein Punkt soll ausgeglichen werden, der durch drei Kurven überbestimmt ist, deren erste er Genauigkeit h_1, die zweite mit der Genauigkeit h_2 und die dritte mit der von h_3 gezeichnet ann ist die Ausgleichung dieselbe, als ob alle Kurven mit der Genauigkeit $= 1$ gezeichnet dagegen aber nicht die Summe der einfachen Fehlerquadrate, sondern die der Quadrate der n verschiedenen Parametern multiplizierten Fehler ein Minimum würde.

Das Quadrat der Genauigkeit einer Bestimmung soll das Gewicht der Benung heissen.

Demgemäss lässt sich das verallgemeinerte Ausgleichungsprinzip so aussprechen:

Jede Ausgleichung muss so vorgenommen werden, dass dabei die Summe der mit ntsprechenden Gewichten multiplizierten Fehlerquadrate ein Minimum wird.

Diese Entwicklungen sind die Grundlage für die weiteren Auseinandersetzungen. Sie wie schon gesagt, dem Inhalt nach identisch mit den entsprechenden Abschnitten der theoria Dagegen sind sie ganz elementar behandelt und dadurch für unsere speziellen Anwendungen geeig als der ursprüngliche Text. Ihre Bekanntschaft wird auch im allgemeinen für das Verständn folgenden Darlegungen ausreichen, dennoch kann es nicht ausbleiben, dass hier und da Sät der theoria combinationis benutzt werden, deren Inhalt für eine genauere Kenntnis dessen, w eine vollständige Ausgleichung erforderlich und brauchbar ist, sich als notwendig erweist.

II.

Die Ausgleichung einer Geraden.

1.

Mit dem eigentlichen Ausgleichungsgeschäft kann man rein geometrisch, ohne das Dazw treten von irgend welchen Rechnungen ans Ziel kommen. Dem entsprechend sollen die Entwick hier in lediglich geometrischem Sinn vorgenommen werden. Dieses Verfahren entspricht au Sache: denn es wäre eine seltsame Zumutung für den Zeichner, dass er, um seine Zeichnung zugleichen, von seinem Reissbrett aufstehen sollte, um eine mehr oder minder lange algeb Rechnung für seinen Zweck vorzunehmen.

Wenn es sich aber darum handelt, das Gewicht der ausgeglichenen Gebilde festzu dann hat die Analysis einen unverkennbaren Vorteil vor der Geometrie voraus, jedes Gewicht Verhältnis, also eine Zahl, und Zahlen sind das Element der Analysis.

2.

Wir beginnen mit der einfachsten Aufgabe: Ein Strahl soll möglichst genau durch drei gelegt werden. Wie wir auch die Gerade legen mögen, immer wird mindestens einer der ausserhalb der Geraden liegen und infolge davon wird ein Fehler in Bezug auf diesen Punkt en Der Fehler eines Punktes in Bezug auf eine Gerade ist der Abstand des Punkts der Geraden. Nehmen wir zunächst an, dass alle drei Punkte mit gleicher Genauigkeit ge sind, dann verlangt das oben aufgestellte Ausgleichungsprinzip, dass diejenige Gerade gefunden soll, für welche die Summe der Quadrate der Abstände möglichst klein wird. Denkt man Punkte als materielle Punkte mit der Masse 1, dann kann ich die Aufgabe auch mechanisch denn sie verlangt die Auffindung der Axe kleinsten Trägheitsmoments in Bezug auf die drei In dieser Fassung kann die Lösung der Aufgabe auf folgende Weise gefunden werden: I kleinsten Trägheitsmoments muss durch den Schwerpunkt der drei Punkte gehen; denn es der Mechanik bekannt, dass in einem gegebenen Punktsystem unter allen Parallelaxen die punktsaxe das kleinste Trägheitsmoment besitzt. Deshalb suchen wir zuerst den Schwerpu Systems, entweder durch die Elementarkonstruktion oder auch nach der Theorie des Seilp

weitere Ausführung beruht auf dem Mohr'schen[1] Verfahren zum Auffinden des Trägheitsmomentes s Punktsystems oder eines Parallelkräftesystems in Bezug auf eine zur Kraftrichtung parallele Die Hauptmomente dieses Verfahrens sind folgende:

Man denke sich, dass die Parallelkräfte an einem biegsamen undehnbaren Faden (einem Seil) Fig. 2. iffen und durch die Spannungen des Seils im Gleichgewicht gehalten würden. Der Punkt, in hem das Seil von der Richtung der Kraft geschnitten wird, heisse Knotenpunkt. In jedem dieser tenpunkte müssen die dort angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Nach der Mechanik ver- indet die geometrische Summe der im Gleichgewicht befindlichen Kräfte. Am ersten Knoten- :t kann man die Richtung der aneinander stossenden Seilstrecken beliebig annehmen. Mit der hlten Richtung ist aber die Grösse der in den beiden Seilstücken auftretenden Spannungen mit- mmt. Man findet sie, indem man durch die Endpunkte der ersten Kraft Parallele zu den Seil- ungen zieht und so ein Dreieck herstellt, dessen Seiten die Grösse der gesuchten Kräfte darstellen. in Seilstück nur dann im Gleichgewicht ist, wenn die beiden die Spannung erzeugenden Zugkräfte gengesetzt gleich gross sind, so ist am zweiten Knotenpunkt nichts mehr unbestimmt, denn hier zwei Kräfte nach Grösse und Richtung gegeben; sollen die Kräfte im Gleichgewicht sein, dann die dritte nach Grösse und Richtung die schliessende Seite des Dreiecks sein, welches bei der ng der geometrischen Summe der Kräfte entsteht. Dieses neue Dreieck hat aber mit dem ersten Seite gemeinschaftlich. Legt man diese gemeinschaftlichen Seiten aufeinander, so dass die zweite lelkraft in die Verlängerung der ersten fällt, dann liegen die Basen der beiden Dreiecke neben der auf einer Geraden, und die Figuren haben eine gemeinschaftliche Spitze. Bildet man für Knotenpunkt die geometrische Summe der Kräfte immer im Anschluss an die vorangehende enbildung, dann entsteht eine fächerartige Figur, deren Spitze der Pol des Kräftesystems heisst. anze Figur kann als „Fächer des Kräftepolygons" bezeichnet werden.

Man kann aber auch umgekehrt zuerst die Kräfte zu einem Streckenzug aneinandersetzen, den illkürlich wählen und durch die entstehenden Polstrahlen die Richtung der Seilstrecken bestimmen. esamtheit der Seilstrecken heisst das Seilpolygon.

Denkt man sich etwa vier Punkte in beliebiger Lage, deren Massen (proportional den Gewichten Fig. 2. unkte) als Parallelkräfte dargestellt werden mögen, so erhält man das Trägheitsmoment dieser unkte in Bezug auf eine zur Kraftrichtung parallele Axe g, indem man die Parallelkräfte mensetzt zu dem geraden Streckenzug $P_1, P_2\ P_3\ P_4\ P_4'$. Wir wählen dann willkürlich einen und bilden den Fächer des Polygons. Zieht man durch die vier Parallelstrahlen die fünf Seil- en, deren Knotenpunkte etwa K_1, K_2, K_3, K_4 sind und verlängert sie bis zum Schnittpunkte er Axe g, welche Schnittpunkte der Reihe nach R, K_2, T, K_3, S heissen mögen, so entstehen reiecke, die denen des Fächers ähnlich werden. Ist der Abstand der Fächerspitze von der gleich h, die Abstände der vier gegebenen Punkte von der angenommenen Axe jeweils x_1, x_2, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$h\,(RK_2) = x_1\,(P_1\,P_2)$$
$$h\,(K_2T) = x_2\,(P_2\,P_3)$$
$$h\,(TK_3) = x_3\,(P_3\,P_4)$$
$$h\,(K_3S) = x_4\,(P_4\,P_4').$$

[1] Mohr: Zeitschrift des hann. Architekten- und Ingenieurvereins Jahrgang 1870 S. 41. Der Inhalt ist über- n in alle Lehrbücher der graph. Statik, z. B. in von Ott Grundzüge II. Teil, 2. Abt. S. 24.

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, x_4 und addiert ihre b
Seiten, dann ist die Summe der rechten Seiten gleich dem Trägheitsmoment des Punktsyste
Bezug auf die angenommene Axe, links steht als Faktor von h jeweils der doppelte Inhalt der
das Seilpolygon entstandenen Dreiecke, die sich zur Gesamtfigur: $K_1 RSK_4 K_3 K_2 K_1$ zusammenschli
Daher der Mohr'sche Satz: „Der Inhalt der von dem Seilpolygon und der gewählten Axe gebil
Figur, multipliziert mit dem doppelten Polabstand, ist das Trägheitsmoment des Punktsystems in I
auf die angenommene Axe".

Fig. 3. Es seien in unserem Falle die drei Punkte A, B, C, ihre Gewichte und also auch die Genau
ihrer Zeichnung seien gleich, so kann ich sie nach irgend einer beliebigen Richtung als ein S
von Parallelkräften darstellen. Zieht man durch den Schwerpunkt S eine Parallelaxe zu
Richtung und bildet den Fächer des Kräftepolygons und dem entsprechend das Seilpolygon,
wird der Inhalt der von den Strahlen des Seiles gebildeten Figur dem Trägheitsmoment des P
systems in Bezug auf die Parallelaxe des Massenmittelpunktes proportional sein. Lässt man jet
vier Parallelstrahlen durch A, B, C, S um diese vier Punkte als feste Drehpunkte eine Kreisbew
ausführen, dann wird auch der Inhalt der soeben erwähnten Figur eine Änderung erfahren, er
von einer beliebigen Grösse beispielsweise sich seinem Minimum nähern, durch dieses hindurch
und zunehmen, sich seinem Maximum nähern u. s. w. Gelingt es, bei dieser Drehung die Ric
herauszufinden, für welche der Inhalt der Figur ein Minimum wird, dann ist die in dieser Ric
durch den Schwerpunkt gezogene Gerade die Axe kleinsten Trägheitsmoments und mithin u
gesuchte Lösung.

3.

Eine vorsichtige Wahl des Poles erleichtert die Lösung der Aufgabe gar sehr; daher m
unsere erste Sorge sein, seine Lage zu bestimmen. Denkt man sich die gegebenen Kräfte wi
durch das Seil im Gleichgewicht gehalten, so sieht man, dass die beiden freien Enden des Sei
einem Punkte der Resultanten des Kräftesystems, d. h. in diesem Falle auf unserer Trägh
sich schneiden müssen; denn die beiden äussersten Spannungen halten dem Kräftesystem das
gewicht, also auch der Resultanten des Systems, was nur dann sein kann, wenn sich die Rich
linien der Spannungen auf der der Resultanten schneiden. Da die Resultante durch den Schwe
geht, so muss ihre Richtung die der gewählten Trägheitsaxe sein. Legt man den ersten Sei
durch den Schwerpunkt S, dann muss auch der letzte Seilstrahl durch S hindurchgehen. Kons
man über A, B und S einen Kreis und legt durch A hindurch eine beliebige Gerade, auf de
den Streckenzug der Kräfte bildet, d. h. auf ihr drei gleichlange Strecken aufträgt, so könn
den Pol sehr günstig so wählen, dass wir den zweiten Schnittpunkt U dieser Geraden mi
Kreise mit S und B verbinden und diese Verbindungsgerade zu den beiden ersten Strahl
Seilpolygons machen; dadurch ist die Lage des Poles mitbestimmt, denn die Polstrahlen müss
Seilstrahlen parallel sein. Vollendet man den Fächer des Kräftepolygons und dem entsprech
Seilpolygon, dann müssen sich die beiden letzten Seilstrahlen auf einem Punkte V des Kreise
schneiden; denn diese Seilstrahlen gehen durch zwei feste Punkte B u. S und bilden zusamme
gegebenen Winkel, den letzten Winkel des Fächers, also liegt ihr Schnittpunkt auf einem
über der Sehne SB. Auf demselben Kreise muss auch C liegen, wie man leicht einsieht, wen
an die Bedingungen des Seilpolygons denkt.

Nimmt man in dieser Weise die Lage des Poles an, dann ist die Mohr'sche Figur ein Viereck
den beiden festen Punkten S und B, dessen übrige Punkte auf zwei durch S und B gehenden
isen liegen; ihr Inhalt kann aufgefasst werden als die Summe der Inhalte zweier Dreiecke mit
einschaftlicher Basis, deren Spitzen auf zwei durch die Endpunkte der Basis gehenden Kreisen
bewegen.

Dreht man jetzt alle Parallelstrahlen um ihre festen Punkte A, B, C, S, dann bleibt die
einschaftliche Basis der Dreiecke ungeändert, die Spitzen bewegen sich auf den beiden Kreisen SBA
SBC, der Inhalt der Mohr'schen Figur ist proportional der Projektion der Verbindungsstrecke
beiden Spitzen auf die Zentrale der beiden Kreise. Diejenige Richtung, für welche diese Pro-
on ein Minimum wird, giebt die Lage der ausgeglichenen Geraden.

4.

An Stelle der Strecke UV projizieren wir lieber den Streckenzug UA, AC, CV auf die
rale der beiden Kreise; die Projektion von AC auf die Zentrale ist unveränderlich; UA und VC
parallele Kreissehnen, deren Projektionssumme gleich der Projektion der Summe oder Differenz
er ist, je nachdem ich bei der Bildung des Streckenzuges beide in derselben oder in entgegen-
zter Richtung überfahre.

Denkt man sich den Kreis ASB um die Strecke AS so verschoben, dass A nach S zu liegen
nt und rückt den Kreis CSB unter ähnlichen Bedingungen um die Strecke CS vor, dann liegen
beiden Kreise so aufeinander, dass sie den Punkt S gemeinschaftlich haben. Die Summe oder Fig. 5.
renz von UA und VC ist dann die Summe oder Differenz der beiden durch S gehenden Kreis-
en von paralleler Richtung wie UA und VC, und als solche doppelt so gross, wie die Projektion
Zentralen der Kreise in neuer Lage auf die Sehnenrichtung.

Denkt man sich die Summe oder Differenz der beiden Sehnen als den Fahrstrahl einer neuen
e, dessen Richtung mit der Richtung der durch S gehenden Sehnen zusammenfällt, dann ergiebt
dass diese neue Kurve ein Kreis ist, dessen Radius gleich der Zentralen der beiden Kreise ASB
CSB in der neuen Lage sein muss und für den der Pol des Koordinatensystems auf den An-
punkt des Durchmessers fällt. Dieser Kreis lässt sich aber leicht konstruieren, dadurch, dass
die erwähnte Zentrale parallel zu sich so weit vorschiebt, dass ihr Anfangspunkt nach S fällt.
Endpunkt ist dann der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, die Zentrale selbst sein Radius.

Legt man durch den Mittelpunkt des eben gefundenen Kreises eine Parallele zur Zentrale der
n Kreise SAB und SCB in ursprünglicher Lage und verbindet den Punkt S mit den Grenz-
en des so entstandenen Durchmessers, dann erhält man diejenigen Sehnenrichtungen, für welche
rojektion der Summe oder Differenz von UA und CV auf die ursprüngliche Zentrale nach beiden
lungen hin ein Maximum wird, d. h. für welche die Projektionen der Parallelsehnen zur Pro-
n von AC möglichst viel hinzufügen oder von ihr möglichst viel wegschneiden, d. h. wofür der
der Mohr'schen Figur ein Maximum oder Minimum wird, d. h. die Hauptträgheitsaxen des
enen Punktsystems. Der Axe kleinsten Trägheitsmomentes ist die von uns gesuchte Gerade,
ch diejenige unter allen möglichen Geraden, wofür die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird.

Man kann auch in der Konstruktion einen rein geometrischen Beweis für den Satz erblicken,
lie beiden Hauptträgheitsaxen eines Systems dreier Punkte im Schwerpunkt aufeinander senk-
stehen.

5.

Von der ausserordentlichen Einfachheit dieser Konstruktion bekommt man erst dann
richtige Vorstellung, wenn man alle zum Beweise notwendigen Hilfslinien weglässt und graden V
Fig. 4. auf das Ziel losgeht. Von allem Nebenwerk entkleidet, lautet die Konstruktionsregel: Man suche
Schwerpunkt der Punkte A, B, C und nenne ihn S. Dann errichte man auf SA, SB, SC die M
senkrechten und nenne ihre Schnittpunkte M_3, M_1, M_2. Darauf bilde man von S aus die geometri
Summe von $-AM_3$ und $+CM_1$, setze in ihrem Endpunkt ein und ziehe einen Kreis der du
geht. Dann lege man durch den Mittelpunkt dieses Kreises eine Parallele zu M_3 M_1 und ver
S mit den Endpunkten des so entstandenen Durchmessers. Diese Verbindungsgeraden sind H
trägheitsaxen. Diese leichte Konstruktion genügt auch zur Bestimmung der Zentralaxen einer Dre
fläche, wie es die Figur zeigt. (Fig. 4.)

Aus unserer Regel ist es auch ersichtlich, dass der Punkt B vor den anderen keinen V
besitzt. Die Änderungen, die vorzunehmen sind, wenn man den Punkt C an die Stelle von B r
lässt, liegen so nahe, dass darüber eine Auseinandersetzung kaum nötig ist.

Wir haben zwar bei den Entwicklungen angenommen, dass die Gewichte aller Punkte
gross sind. Dieser Fall wird im allgemeinen am häufigsten vorkommen, ist aber für unsere
struktionsweise keineswegs Vorbedingung. Alle Entwicklungen behalten ihre volle Giltigkeit,
man statt gleicher Gewichte beliebige annimmt. Nur muss man dann den verschiedenen Gewi
entsprechend auch die Lage des Schwerpunktes bestimmen. Besonders erwähnenswert ist der Fall
eines der Gewichte unendlich gross wird, z. B. das des Punktes B. Dann fällt der Schwerpunkt
dem Punkte B zusammen, aber die Richtung der Geraden SB wird nicht unbestimmt, denn die S
linie muss immer noch die Strecke AC im umgekehrten Verhältnis der Gewichte von A und C
Haben A und C gleiche Massen, dann wird die eine Hauptträgheitsaxe parallel zu AC, die
steht darauf senkrecht. Dieser Fall tritt bei Zeichnungen ein, wenn einer der Punkte (also B) g
und demnach absolut richtig ist, die anderen beiden Punkte aber durch Konstruktion gefunden

Ebenso einfach und leicht, wie die Auffindung der Hauptaxen selbst ist die Konstruktion
aus der Schar konzentrischer, koaxialer und ähnlicher Cauchy-Poinsot'scher Ellipsen (Cauchy:
cices de mathématiques t. II p. 93).

Fig. 6. Man verwandle den Inhalt des Mohr'schen Vierecks für die Axe grössten und kl
Trägheitsmomentes in ein Quadrat und trage die Seite des grossen Quadrates von S aus auf d
des kleinsten Trägheitsmomentes nach beiden Seiten hinauf, ebenso mache man es mit der Se
kleinen Quadrates auf der zweiten Axe, dann hat man die vier Scheitel der gesuchten Ellipse.

6.

Bei weitem schwieriger als die gelöste Aufgabe ist die Ausgleichung einer Geraden, die
vier Punkte überbestimmt ist. Auch hier wollen wir die Axe grössten und kleinsten Trä
Fig. 7 momentes durch die Betrachtung des Inhaltes der Mohr'schen Figur, die hier ein Fünfeck is
u. 7b. zufinden versuchen. Es seien die vier Punkte mit den Buchstaben A, B, C, D bezeichnet
nehmen wiederum an, dass ihnen gleiche Gewichte zukommen. Zunächst bestimmen wir den S
punkt S des Punktsystems. Dann legen wir einen Kreis durch die drei Punkte S, A, B und
durch die fünf Punkte ebenso viele Parallelstrahlen. Auf dem ersten, durch A gehenden od
auf einem beliebigen parallelen Strahle tragen wir vier gleiche Strecken neben einander auf,

ftepolygon des Punktsystems darstellen. Vom Schnittpunkt A' des ersten Strahles mit dem kon-ierten Kreise aus ziehen wir zwei Gerade nach S und B und legen durch die beiden ersten kte des Kräftepolygons Parallele zu diesen Verbindungsgeraden. Der gemeinschaftliche Punkt er beiden zuletzt gezogenen Linien soll der Pol P des Kräftepolygons sein. Nun vervollständigen den Fächer des Polygones und stellen dementsprechend für die gegebenen Punkte und die durch gelegten Parallelstrahlen das Seilpolygon her. Den Knotenpunkt des Seiles, der auf den durch C ogenen Strahl fällt, nennen wir C' und ähnlich sei die Bedeutung des Punktes D'. Wir legen ch die drei Punkte B, C, C' einen Kreis, ebenso durch die drei Punkte S, D, D'. Im allgemeinen l der erste dieser beiden Kreise nicht durch S, der zweite aber nicht durch B gehen.

Dreht man jetzt die fünf Parallelstrahlen um ihre festen Punkte A, B, C, D, S, dann bleiben rend der Bewegung zwei Punkte des Mohr'schen Fünfecks unverändert in ihrer alten Lage, nämlich Punkte B und S, während sich die drei anderen Punkte A', C', D' auf Kreisen bewegen, und r: A' auf dem Kreise ASB, C' auf dem Kreise BCC' und D' auf dem Kreise SDD'.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen folgt wegen der beim Drehen unveränderten Gestalt des ners aus der Unveränderlichkeit der Winkel und daraus, dass diese Winkel Peripheriewinkel auf selben Kreisbogen sind.

Wir wollen versuchen, die Aufgabe der Lösung dadurch näher zu bringen, dass wir das r'sche Fünfeck in ein Viereck verwandeln.

Zu diesem Zweck verbindet man B mit D' und zieht durch den Punkt C' eine Parallele zu Fig. 7b. soeben erwähnten Verbindungsgeraden. Diese soll den Seilstrahl SD' im Punkte G' schneiden. bindet man jetzt B mit G', dann ist das Viereck $A'BG'S$ dem ursprünglichen Fünfeck an Inhalt ch, kann also auch an Stelle des letzteren zur Auffindung der Axen grössten und kleinsten heitsmomentes benutzt werden.

7.

Wollte man versuchen, die Bahn des Punktes G' für den Verlauf der Drehung aufzufinden, auf diese Weise die gesuchte Axe kleinsten Trägheitsmomentes zu erhalten, so hätte man insofern se Schwierigkeiten, als G' eine Kurve dritter Ordnung beschreibt, die in der Verbindungsgeraden eine Asymptote besitzt. Mit einer derartigen Linie ist schon wegen der Mühe, die die Behand-solcher Kurven verursacht, die Aufgabe schwerlich zu Ende zu führen.

Der Inhalt des gebildeten Vierecks, dessen eine Diagonale bei der Drehung aller Parallelstrahlen rändert bleibt, hängt wesentlich von der Projektion des Fahrstrahles SG' auf die zu SB senk-e Gerade ab. Verlängert man den Seilstrahl BC' bis zu seinem Schnittpunkt mit SD', dann gt sich dieser Schnittpunkt, der mit E' bezeichnet werden soll, auf einem Kreis der durch S, B die bei einer beliebigen Bildung des Mohr'schen Fünfecks erhaltene Lage des Punktes E' geht. Mittelpunkt dieses Kreises wollen wir mit M_e bezeichnen. Ebenso heisse der Mittelpunkt des ses $BCC' : M_c$, der Mittelpunkt des Kreises $SDD' : M_d$ und der des Kreises $ASB : M_a$.

Die Projektion des Fahrstrahles SE' auf die Richtung $M_a M_e$ macht keine weiteren Schwierig-n. Die Strecke $E'G'$, die auf der Richtung des erstgenannten Strahles liegt, wollen wir durch die ke, die sich bis jetzt durch die Konstruktion ergeben haben, ausdrücken. Aus den Bedingungen Verwandlung des Mohr'schen Fünfecks in ein Viereck ergiebt sich zunächst die Proportion:

$$E'G' : ED' = E'C' : E'B.$$

Daraus aber:

$$E'G' = \frac{E'D' \cdot E'C'}{E'B}.$$

Wir wollen in dem Dreieck der drei Mittelpunkte: $M_c M_d M_e$ die Zentrale $M_d M_e$ mit c und
Fig. 7a. Zentrale $M_c M_e$ mit d bezeichnen. Ferner soll r der Radius um M_e beschriebenen Kreises sein.
Aussenwinkel des Dreiecks der Zentralen, der seinen Scheitel auf dem Punkte M_e hat, soll ε hei
Ich bezeichne den Winkel zwischen der Seite d und der Axe $M_a M_e$ mit $\varkappa$.

Wir bedürfen noch zweier Winkel, nämlich des Winkels zwischen dem Fahrstrahl SE'
der Zentralen $M_a M_e$. Dieser werde φ genannt; ferner müssen wir für den Peripheriewinke
Fig. 8. Kreise um M_e auf dem Bogen SB eine Bezeichnung einführen. Wir wollen ihn λ nennen. E
heisse der ihm gleiche halbe Zentriwinkel auf dem Bogen SB im Kreise um M_e.

Zuerst suchen wir einen metrischen Ausdruck für $E'D'$. Diese Strecke ist die Differenz
Kreissehnen zweier Kreise, nämlich der Kreise um die Mittelpunkte M_d und M_e. Die beiden K
sehnen haben ihren gemeinschaftlichen Anfangspunkt in dem beiden Kreisen gemeinsamen Punk
Ihre Differenz ist also nach dem schon früher angeführten Satze gleich der doppelten Projektio
Zentralen auf die Richtung der beiden Kreissehnen. Die Zentrale heisst c. Die Grösse des Neig
Fig. 7a. winkels von c gegen die Richtung des Fahrstrahls SE' ergiebt sich nach der Figur als $\varkappa + \varepsilon$
mithin ist:

$$E'D' = 2\,c \cos(\varkappa + \varepsilon - \varphi)$$

In ähnlicher Weise drückt sich $E'C'$ aus. Auch diese Strecke ist Sehnendifferenz un
solche, genau wie oben, doppelt so gross, wie die Projektion der Zentralen auf die Sehnenrich
Nur ist dieses Mal die Zentrale gleich d und der Neigungswinkel nach der Figur g
$\lambda + \varkappa + \varepsilon - \varphi$. Dennoch erhalten wir für $E'C'$ den Ausdruck:

$$E'C' = 2d \cos(\lambda + \varkappa + \varepsilon - \varphi).$$

Am einfachsten drückt sich die Strecke BE' aus, denn sie ist Kreissehne im Kreise u
und also gleich dem Doppelten der Projektion des Radius r auf die Sehnenrichtung. Der Neig
winkel des Radius BM_e gegen BE' ergiebt sich leicht, wenn man den Aussenwinkel des au
Radius, der Seite BE' und dem Strahl SE' gebildeten Dreiecks zu Hilfe nimmt, der gleich
Aussenwinkel in dem Dreieck ist, das die Winkel φ und λ enthält. Die zweimalige Anwe
des Satzes über die Grösse der Aussenwinkel ergiebt, dass der gesuchte Neigungswinkel gleich
Daher ist denn:

$$BE' = 2\,r \cos\varphi$$

und daraus:

$$E'G' = \frac{2cd}{r} \cdot \frac{\cos(\varkappa + \varepsilon - \varphi)\cos(\lambda + \varkappa + \varepsilon - \varphi)}{\cos\varphi}$$

Wollte man $E'G'$ als den Fahrstrahl einer Kurve auffassen, die den Punkt S zum P
den Winkel φ zur Anomalie hätte, dann wäre die Kurve abermals von dritter Ordnung und
davon einer geometrischen Behandlung fast unzugänglich. Glücklicherweise kommt es abe
auf die Länge von $E'G'$ an, sondern nur auf die Grösse der Projektion dieser Strecke a
Richtung der Zentralen $M_a M_e$. Diese aber ist gleich $E'G' \cos\varphi$ und also gleich:

$$\frac{2cd}{r} \cos(\varkappa + \varepsilon - \varphi)\cos(\lambda + \varkappa + \varepsilon - \varphi).$$

8.

Es ist leicht, die Grösse der Projektion von $E'G'$ auf die Axe $M_a M_e$ auch in anderer Weise zustellen. Denkt man sich durch den Punkt S einen Kreis gezogen mit dem Radius $\frac{cd}{r}$ und zwar dass der Mittelpunkt dieses Kreises auf einer Parallelen zu $M_a M_e$ liegt, welche von S den stand $\frac{cd}{r} \sin \lambda$ besitzt und deren Lage vom Punkte S aus entgegengesetzt ist zu der von $M_a M_e$, ergiebt sich, dass die Projektion von $E'G'$ auf die Richtung von $M_a M_e$ gleich der einer Kreisne des oben erwähnten Kreises ist. Zieht man nämlich durch S einen weiteren Strahl, der mit der raden SE' einen Winkel gleich $\varkappa + \varepsilon$ bildet und zwar in dem Sinn, dass dadurch der zweite enkel dieses Winkels, wenn ich ihn als Halbstrahl betrachte, von der Richtung der Geraden M_a abrückt, dann schneidet die Verlängerung dieses Schenkels den zuletzt erwähnten Kreis in er Kreissehne, die die gewünschte Eigenschaft besitzt. Projiziert man sie nämlich auf die Richtung M_e, dann ist ihre Projektion, wie die Betrachtung der zugehörigen Figur ergiebt, gleich $\cos(\varkappa + \varepsilon - \varphi) \cos(\lambda + \varkappa + \varepsilon - \varphi)$, also gleich der oben berechneten Projektion von $E'G'$ auf selbe Richtung. Fig. 8.

Diese Darlegung zeigt, dass man an Stelle der ursprünglichen Kreise BCC' und SDD' zwei ere setzen darf, nämlich den eben jetzt gefundenen und den Kreis um M_e, ohne dass deshalb die sse des gesuchten Trägheitsmoments geändert wird. Was aber noch mehr ist; man kann an Stelle gegebenen Punkte C und D zwei andere setzen, ohne dass deshalb das Trägheitsmoment in ug auf eine beliebige Axe des Schwerpunktes eine Verminderung oder Vermehrung erfährt.

Diese beiden Punkte findet man, wenn man durch E' und den Schnittpunkt G'' der Verlerung des zweiten Schenkels von $\varepsilon + \varkappa$ mit dem zuletzt konstruierten Kreis, Parallelstrahlen zu Richtungen legt, in denen die Gewichte der Punkte aufgetragen wurden, und mit diesen Strahlen beiden hierher gehörigen Kreise schneidet. Diese Schnittpunkte mögen E und G heissen. Aus r einfachen Betrachtung ergiebt sich, dass die Summe der Projektionen der Sehnen SG'' und SE' die Richtung $M_a M_e$ gleich der Summe der Projektionen von GE' und der beiden Parallelsehnen Bezug auf die angegebene Axe ist. Daraus geht hervor, dass die Punkte C und D gänzlich tzt werden können durch die Punkte E und G und dass man diese letzteren Punkte von vorn in mit demselben Erfolge hätte zum Ausgleich der Geraden benützen können, wenn man ihnen entsprechenden Gewichte beigelegt hätte. Nun ist aber gerade die Gewichtsbestimmung für diese kte mit Hilfe des Seilpolygons auserordentlich leicht. Wir nennen diese Ersetzbarkeit des Systems Punkte $ABCD$ durch das Punktsystem $ABEG$ in Bezug auf unsere Ausgleichung eine Äquivalenz. Betrachtung der Bedingungen solcher Äquivalenzen von Punktsystemen in Bezug auf eine ausichende Gerade, noch mehr aber in Bezug auf die Trägheitsmomente überhaupt auf Grund des behandelten graphischen Verfahrens würde zu weit führen, so sehr sie auch viele Vorgänge Ausgleichungsgeschäft verdeutlichen könnte. Wir gehen deshalb zu unserer, nun freilich chterten Aufgabe zurück. Der Inhalt der Mohr'schen Figur wird ein Minimum, wenn die Summe Projektionen SB', SG'', SE' auf die Richtung senkrecht zu SB möglichst klein wird. An Stelle oben erwähnten Fahrstrahlen projizieren wir besser den festen Streckenzug AGE und noch die Parallelsehnen $AA', GG'' EE'$ unter Berücksichtigung ihrer Richtung. Die Summe der Sehnen GG'', EE' ist aber gleich einer einzigen Sehne und zwar in einem Kreis, der durch S geht und

dessen Mittelpunkt man findet, wenn man von S aus die geometrische Summe der Strecken $-A$ $-GM_g + EM_e$ (oder auch mit umgekehrten Vorzeichen) bildet. Zieht man um den gefunde Mittelpunkt einen zu $M_a M_e$ parallelen Durchmesser und verbindet die Endpunkte dieses Du messers mit S, dann erhält man diejenigen Richtungen, für welche die Projektionssumme di Parallelsehnen nach beiden Richtungen ein Maximum wird, d. h. die Projektion des Streckenz AGE nach Möglichkeit vergrössert oder verkleinert, d. h. die Hauptträgheitsaxen des Punktes Die Axe kleinsten Trägheitsmoments ist unsere gesuchte, ausgeglichene Gerade. Damit ist geometrisch die Aufgabe gelöst, eine Gerade auszugleichen, die durch vier Punkte überbestimmt

9.

Auch hier verdecken die vielen zum Beweise nötigen Hilfslinien die relative Einfachheit Konstruktion fast gänzlich. Ich will es aber unterlassen, die nackte Konstruktionsregel aus gegebenen Auseinandersetzungen herauszuschälen. Angebrachter wäre es vielleicht, auf einige Deg rationsfälle, die beim Konstruieren vorkommen können, einzugehen. Ganz besonders möchte der interessieren, unter welchen Umständen wohl die beiden Punkte C und D durch einen einzigen P ersetzt werden können. Nach unserem Verfahren kann das nur eintreten, wenn der Radius Hilfskreises, dessen Mittelpunkt M_g ist, gleich Null wird. Aber dieser Fall tritt nur ein, entweder c oder d verschwindet, das heisst aber, wenn entweder der Kreis durch BCC' gleich durch S, oder der Kreis durch SDD' zugleich durch B geht, oder wenn wir S und B die G punkte eines durch sie bestimmten Kreisbüschels nennen, so oft einer der beiden Kreise Büschel angehört.

Um die Grösse des kleinsten und grössten Trägheitsmomentes selbst zu erhalten, projiziere die Strecke AE auf die Senkrechte auf SB und subtrahiere oder addiere die Projektionen der b Katheten des in dem zuletzt erhaltenen Kreises einbeschriebenen Dreiecks auf den Durchmesser. D erhaltene Strecke multipliziere man mit SB und dem doppelten Polabstand, dann stellt dieses Pr im einen oder anderen Falle die Grösse des Trägheitsmomentes dar. Einfacher noch is Konstruktion einer der Kurven aus der Schar der Cauchy-Poinsot'schen Zentralellipsen. Man auf der Axe des kleinsten Trägheitsmomentes die oben gebildete Summe, auf der Axe gr Momentes die entsprechende Differenz auf, und zwar jeweils nach zwei Richtungen, dann erhäl in den Endpunkten der aufgetragenen Strecken die vier Scheitel der gesuchten Ellipse. Wenn aber die Zentralellipse gezeichnet hat, dann ist es leicht, die Grösse des Trägheitsmomentes für i eine Axe der Ebene zu finden. Wegen der weiteren Ausführung genüge es, auf irgend ein Leh der graphischen Statik zu verweisen, z. B. auf von Ott's Grundzüge der graphischen Statik, Abteilung Seite 29 fg.

10.

Wir wollen die aufgefundene Konstruktion dazu benutzen, die Hauptträgheitsaxen beliebigen Punktes in Bezug auf das Punktsystem dreier Punkte A, B, C zu bestimmen. F aber hier angenommen werden, dass die drei Punkte auf einem Kreise liegen und die Trägheit für den Kreismittelpunkt zu bestimmen seien. Diese Annahmen erleichtern die Lösung der A in keiner Weise; sie werden nur deshalb gemacht, damit wir uns später auf die hier ge Behandlung des Problems beziehen können.

Die gestellte Aufgabe ist insofern ein besonderer Fall der bereits behandelten allgemeinen Fig. 9.
onstruktion, als wir das Gewicht des letzten Punktes unendlich gross werden lassen. Da unsre onstruktionsweise durchaus nicht auf der Voraussetzung der Gleichheit der Gewichte beruhte, so icht sie auch hier noch vollständig aus. Dadurch, dass ich dem letzten Punkt, den ich im Mittel- nkt des gegebenen Kreises annehme, ein unendlich grosses Gewicht zuteile, wird er von selbst zum hwerpunkt des Systems. Infolge davon wird die eine Strecke im Kräftepolygon unendlich lang, n Polstrahl also parallel zur Richtung der Kräfte. Dieser Umstand stört die Konstruktion in keiner eise. Ich suche zunächst die Mittelpunkte der Hilfskreise, die früher mit M_a, M_c, M_d bezeichnet rden. Ihre Lage ist vollständig bestimmt. Dagegen wird der Punkt M_d scheinbar unbestimmt, il von den drei, die Lage des Kreises um M_d bestimmenden Punkten zwei, nämlich D und S im eismittelpunkt zusammenfallen. Trotzdem lässt sich M_d völlig eindeutig auffinden, wenn man wägt, dass, wenn schon D und S aufeinanderfallen, die Richtung der Geraden DS dennoch bekannt . Denn die Gerade DS muss durch den Schwerpunkt von A, B, C gehen. Bestimmt man also irgend eine Richtung der Kräfte den Punkt D' (von dem nur vorauszusetzen ist, dass er nicht fällig ebenfalls in den Kreismittelpunkt fällt), dann bestimmt dieser Punkt in Verbindung mit der eistangente DS den Kreis um M_d und damit M_d völlig eindeutig. Die ganze übrige Konstruktion liesst sich so enge an die bereits gegebenen Ausführungen an, dass es wohl nicht nötig ist, sie r nochmals im einzelnen durchzugehen. Nur die Richtuug, in der die drei Kreisradien AM_a, GM_g, M_e bei der Bildung der geometrischen Summe zu nehmen sind, erfordert eine besondere Aufmerk- nkeit. Hat man die geometrische Summierung der Kreisradien richtig vollendet, dann zieht man den Endpunkt des Streckenzuges einen Kreis durch den Kreismittelpunkt, legt einen Durchmesser ch diesen Kreis parallel zu $M_a M_e$ und verbindet den gegebenen Mittelpunkt mit den Grenzpunkten ses Durchmessers; auf diese Weise erhält man in den so gezogenen Geraden die gesuchten Träg- tsaxen. Welche von ihnen die Axe kleinsten Trägheitsmomentes ist, lässt sich in der Regel durch blossen Anblick der Figur entscheiden. Nur wenn die geometrische Summe der oben erwähnten dien sehr klein wird, fällt die Unterscheidung schwer und muss unter Umständen konstruktiv unden werden.

Wird gar die geometrische Summe zu Null, dann sind alle Durchmesser Axen gleichen Trägheits- mentes, eine Unterscheidung zwischen der Axe grössten und kleinsten Trägheitsmomentes fällt m fort.

11.

Wie man eine Gerade auszugleichen hat, die durch fünf, gleich scharf bestimmte Punkte über- timmt ist, lässt sich verhältnismässig leicht aus dem Vorangehenden ableiten. Ebenso wie wir n die beiden Punkte C und D durch die ihnen äquivalenten Punkte E und G ersetzt haben und nit die Konstruktion zu Ende führen konnten, könnte man bei gegebenen fünf Punkten zweimal i Punktpaare durch äquivalente Paare ersetzen. Es bliebe dann immer noch die schwierige, emeine Aufgabe bestehen, eine durch n Punkte überbestimmte Gerade auszugleichen. Dieses blem ist indessen viel zu schwer, als dass es ohne grosse und umständliche Vorbereitungen über- tigt werden könnte. Dazu ist jedoch hier kein Platz; auch liegt durchaus kein praktisches ürfnis vor, die Ausgleichung einer Geraden für mehr als vier Punkte zu bewerkstelligen. Denn

es wird schon zu den selteneren Fällen gehören, dass eine Gerade jemals durch mehr als drei Pu überbestimmt wird.

Aus diesen Gründen wird es besser sein, hier die Untersuchung abzubrechen, um sie bei e anderen Gelegenheit mit grösserer Ausführlichkeit wieder aufzunehmen; denn das ganze Th verdient gar wohl eine genauere und eindringendere Darlegung.

III.

Die Ausgleichung eines Punktes.

1.

Ein Punkt ist auf die einfachste Weise durch drei Gerade überbestimmt. Sollten anstatt Geraden drei Kurven für die Bestimmung der Lage des Punktes vorhanden sein, so soll Zeichnung als so genau vorausgesetzt werden, dass die Kurven in der Nähe der Schnittpunkte merklichen Fehler durch ihre Tangenten ersetzt werden können. Schon bei der Ableitung Gauss'schen Ausgleichungsmethode ergab sich für Ausgleichung eines Punktes ein besonderer Ausd für das Prinzip: Es muss die geometrische Summe der Abstände gleich Null werden. Dieser Um

Fig. 10. erleichtert die Auffindung des gesuchten Punktes ausserordentlich. Konstruiert man zunächst nu geometrische Summe der Abstände eines Punktes von zweien der drei Geraden, so entsteht Parallelogramm, dessen Endpunkte der gewählte Punkt, die Fusspunkte der Abstände und der punkt der geometrischen Summe sind. Fragt man, wie ein Punkt liegen muss, damit die geometr Summe seiner Abstände von zwei Seiten des Dreiecks senkrecht zur dritten Seite sei, so ergiebt dass das Dreieck, welches bei der Bildung der geometrischen Summe entsteht, dem gegebenen Dr ähnlich sein muss: denn seine Seiten stehen sämtlich normal zu den Seiten der ursprünglichen I Verbindet man noch die freien Eckpunkte dieses Dreiecks mit dem Schnittpunkt der zwei S in Bezug auf welche die Abstände gebildet wurden, dann erhält man die drei Ähnlichkeitsstr für alle Dreiecke, die die vorgeschriebene Bedingung erfüllen. Alle solche Dreiecke sind der perspektivisch-ähnlich und der Ort aller Punkte, für welche die geometrische Summe der Abs senkrecht auf der dritten Seite steht, ist einer der oben gezogenen Ähnlichkeitsstrahlen und derjenige, der durch den Endpunkt des in seiner Lage belassenen Abstandes geht.

Aus der Ähnlichkeit des Hilfsdreiecks mit dem gegebenen findet man aber ohne Mühe, der als Ort des gesuchten Punktes bezeichnete Ähnlichkeitsstrahl der Teilstrahl ist, dessen verhältnis (worunter der Quotient der Sinus der Teilwinkel verstanden wird) gleich dem Verh der anliegenden Seiten wird. Dieser Strahl ist aber leicht zu konstruieren. Dadurch, dass m beiden Seiten um ihre eigene Länge parallel zu sich nach der Richtung des Winkelraumes hi schiebt und den Schnittpunkt der dadurch erhaltenen Geraden mit dem Scheitel des Winkel bindet, erhält man den gesuchten Strahl.

Wiederholt man die Konstruktion noch für einen weiteren Winkel des gegebenen Dre dann ist der Schnittpunkt beider Strahlen der gesuchte Punkt, der die drei Eckpunkte des Dr

leicht. Da dieser Punkt ein sogenannter „besonderer Punkt“ im Dreieck ist, so habe ich bei anderen Gelegenheit für ihn den Namen „Gauss'scher Punkt“ vorgeschlagen, unter welchem en er auch hier eingeführt werden soll. (Zuschrift an den Herausgeber der Zeitschrift für mathe- schen und physikalischen Unterricht. Frühjahr 1901).

2.

Hat man in einem Dreieck die Lage des Gauss'schen Punktes aufgefunden, so kann mit zwei- er Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes die Strecke finden, deren Quadrat gleich der ne der Fehlerquadrate ist. Das Reziproke dieser Strecke stellt nach der Theorie annäherungs- den Masstab der erreichten Genauigkeit in genere dar, obwohl auf diesen Masstab bei nur r Überbestimmung kein grosser Verlass ist (das Nähere siehe Gauss: theoria combinationis, posterior, art. 37—40).

Will man aber andererseits die Summe der Fehlerquadrate durch die Stücke des erhaltenen cks ausdrücken, so kommt man damit zum Ziele, wenn man bedenkt, dass die Fehler den n des Dreiecks proportional sind, auf denen sie stehen, und dass man den Proportionalitätsfaktor lem Inhalt des Dreiecks leicht bestimmen kann.

Bezeichnet man die Fehler wieder wie im ersten Abschnitt mit n_1, n_2, n_3, den Inhalt des cks mit J und den Proportionalitätsfaktor mit k, dann ist

$$n_1 = ka;\ n_2 = kb;\ n_3 = kc$$
$$an_1 + bn_2 + cn_3 = 2J$$
$$k(a^2 + b^2 + c^2) = 2J$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = k^2(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4J^2(a^2 + b^2 + c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{4J^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

wenn man die Höhen des Dreiecks einführt, erhält man für $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ den Ausdruck:

$$\frac{1}{h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_3^{-2}}.$$

Wir hatten schon im ersten Teil der Abhandlung die Summe der Fehlerquadrate für unseren und zwar unter Annahme eines ganz beliebigen Punktes gebildet. Wählt man als plausibelsten zum Ausgleish den Gauss'schen Punkt, dann werden die früher mit A und B bezeichneten ktionssummen beide zu Null und die erwähnte Summe erhält den Ausdruck:

$$\frac{4J^2(\sin^2\lambda_1 + \sin^2\lambda_2 + \sin^2\lambda_3)}{(a\sin\lambda_1 + b\sin\lambda_2 + c\sin\lambda_3)^2}.$$

Erwägt man, dass die hier gebrauchten Winkel supplementär zu den Dreieckswinkeln sind, an man einen anderen Ausdruck für die Summe der Quadrate erhalten, wenn man den Radius em Dreieck umbeschriebenen Kreises r einführt:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{J^2}{r^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem direkt abgeleiteten, wie man sieht, überein. Die Genauigkeit ere wird aber:

$$\frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{r}{J}\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}.$$

3.

Will man einen Punkt ausgleichen, der durch vier Gerade oder, unter den gestellten einsc
kenden Bedingungen, durch vier Kurven überbestimmt ist, dann empfiehlt es sich, zuerst für dr
den gegebenen Geraden den Gauss'schen Punkt zu suchen und in dem von den drei Geraden gebi
Fig. II. Dreieck den Ort der Punkte zu bestimmen, für die die Summe der Quadrate der Abstände vo
Seiten unveränderlich ist. Zu diesem Zwecke lege ich durch den Gauss'schen Punkt zwei aufein
senkrechte Koordinatenaxen, nenne die Abstände dieses Punktes von den Seiten, wie früher: n_1,
die Winkel aber, die diese Abstände mit der ersten der beiden Axen bilden: φ_1, φ_2, φ_3. Die K
naten eines beliebigen Punktes in Bezug auf das angenommene Koordinatensystem seien x
Die Abstände eines solchen Punktes von den drei gewählten Geraden wollen wir d_1, d_2, d_3 n
Für die Koordinaten eines Punktes auf der ersten Geraden gilt dann die Gleichung:

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - n_1 = 0.$$

Ähnliche Gleichungen bestehen für die Koordinaten der Punkte der zweiten und dritten G
nämlich diese:

$$x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - n_2 = 0$$
$$x \cos \varphi_3 + y \sin \varphi_3 - n_3 = 0.$$

Liegt aber ein Punkt nicht auf einer der Geraden und setzt man seine Koordinaten in die Gl
der betreffenden Geraden ein, dann wird nach einem bekannten Satze der analytischen Geomet
Wert der rechten Seite nicht mehr gleich Null, sondern gleich der Grösse des Abstandes des P
von der Geraden mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem der Punkt mit dem
natenursprung auf verschiedenen Halbebenen liegt oder auf gleicher; daher erhalten wir
Koordinaten eines beliebigen Punktes die drei Gleichungen:

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - n_1 = \pm d_1$$
$$x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - n_2 = \pm d_2$$
$$x \cos \varphi_3 + y \sin \varphi_3 - n_3 = \pm d_3.$$

Die Summe der Quadrate der Abstände liefert demnach folgendes Resultat:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = x^2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3) + y^2 (\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3)$$
$$+ 2\,xy (\cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_3 \sin \varphi_3) - 2\,x (n_1 \cos \varphi_1 + n_2 \cos \varphi_2 + n_3 \cos \varphi$$
$$- 2\,y (n_2 \sin \varphi_1 + n_2 \sin \varphi_2 + n_3 \sin \varphi_3) + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

Wir wollen für die Koeffizienten dieser Gleichung die leicht verständlichen Abkü
T_{11}, T_{22}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{33} einführen, wodurch wir zu dem Resultate kommen:

$$T_{11} x^2 + T_{22} y^2 + 2\,T_{12} x y - 2\,T_{13} x - 2\,T_{23} y + T_{33} = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2.$$

Die Bedingung aber, die wir für den Gauss'schen Punkt aufgestellt haben, nämlich d
die geometrische Summe der Fehler verschwinde, macht die Grössen T_{13} und T_{23} zu Null: de
Grössen stellen die Summen der Projektionen der Fehler auf die Axe der x und y dar; diese
müssen aber für unsern Koordinatenursprung wegfallen. Demnach bleibt nur noch die G
bestehen:

$$T_{11} x^2 + 2\,T_{12} x y + T_{22} y^2 + T_{33} = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2.$$

Alle Punkte, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen, haben dieselbe Summe
Quadrate ihrer Fehler, mithin also auch die gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die g
Punkte sind.

Diese Gleichung ist aber die eines Kegelschnittes, der hier eine Ellipse sein muss. Denn die riminante: $T_{11} \cdot T_{22} - T_{12}^2$ lässt sich in folgender Form darstellen:

$$T_{11} \cdot T_{22} - T_{12}^2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi_1, \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1, \sin\varphi_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\varphi_2, \cos\varphi_3 \\ \sin\varphi_2, \sin\varphi_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\varphi_3 \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_3 \sin\varphi_1 \end{vmatrix}^2$$

ist mithin positiv.

Diese Ellipse hat den Gauss'schen Punkt zum Mittelpunkt. In ihrer Gleichung kommen die er erster Ordnung nicht mehr vor. Wir wollen versuchen, auch die Hauptaxen der Kurve estimmen.

Zu diesem Zweck ziehen wir um ihren Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius = 1, und iden diesen Kreis mit den Strecken: n_1, n_2, n_3, oder mit ihren Verlängerungen. Wenn man n Schnittpunkten die Masse = 1 erteilt, dann stellt T_{11} das Trägheitsmoment dieser drei Punkte ezug auf die y-Axe dar, T_{22} bedeutet dasselbe in Bezug auf die x-Axe, während T_{12} die Grösse ellt, die von manchen Schriftstellern „Deviationsmoment", von anderen „Zentrifugalmoment" nt wird. Wir wollen hier den ersten Ausdruck gebrauchen.

Aus der Lehre von den Trägheitsmomenten ist aber bekannt, dass das Deviationsmoment verndet, wenn die Koordinatenaxen mit den Hauptträgheitsaxen zusammenfallen.

Drehen wir also unser Koordinatensystem so lang, bis seine Axen mit den Hauptträgheitsder drei Punkte auf dem Einheitskreis zusammenfallen, dann fällt aus der oben aufgestellten hung das Glied mit $x \cdot y$ heraus, d. h. aber: die Gleichung ist auf Hauptaxen bezogen. Daraus der Satz: „In einem Dreieck liegen die Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf einer Ellipse, Mittelpunkt der Gauss'sche Punkt des Dreiecks ist, während die Hauptaxen zusammenfallen len Hauptträgheitsaxen der Schnittpunkte der Normalen vom Gauss'schen Punkt aus auf die des Dreiecks mit dem Einheitskreis, wenn diese Axen auf den Kreismittelpunkt bezogen werden."

Wie man aber durch Konstruktion die Hauptträgheitsaxen des Mittelpunktes findet, ist im n Abschnitt unter 10. ausführlich gezeigt worden.

Bezeichnet man diese Hauptträgheitsmomente mit den Buchstaben Ty und Tx, wobei $Tx < Ty$ nag, dann sind die Quadrate der Halbaxen der Ellipse proportional der Differenz: $(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$ $^2 + n_2^2 + n_3^2)$ und umgekehrt proportional den Grössen Ty und Tx.

Mit wachsender Summe $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \Sigma d^2$ erhält man statt einer Ellipse eine Schar ntrischer, prospektivisch-ähnlicher Ellipsen, die alle dieselben Hauptaxen haben. Der Ähnlichkeits- ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt. Eben deshalb liegen auch für alle diese Ellipsen die gleichlangen, konjugierten Durchmesser auf demselben Geradenpaare.

Nun besagt aber ein bekannterer Satz aus der Kegelschnittslehre, dass die Summe der Quadrate ostände, die ein Punkt der Ellipse von den beiden gleichlangen, konjugierten Durchmessern besitzt, inderlich bleibt bei einer Verschiebung des Punktes. (Man vergleiche z. B. Salmon-Fiedler: tische Geometrie der Kegelschnitte, 6. Aufl., I. Teil, S. 341.)

Zwischen dieser Quadratsumme und der oben aufgestellten Summe der Fehlerquadrate besteht nfacher Zusammenhang, dessen bequemste Darstellung vielleicht die ist, die ich dem freundlichen genkommen des Herrn Professor Dr. Stickelberger verdanke. Nach den früheren Ableitungen ie Summe der Fehlerquadrate:

$$\Sigma d^2 = T_{11} x^2 + T_{22} y^2 + 2 T_{12} xy + T_{33} \equiv f(x, y), \text{ wobei:}$$

$$T_{11} + T_{22} = \cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 + \sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_3 = 3$$

ist. Wird Σd^2 konstant und betrachte ich x und y als veränderliche Koordinaten eines Pun dann ist die Gleichung die einer Ellipse. Wenn die beiden gleichlangen konjugierten Durchm in der Ellipse folgende Gleichungen besitzen:

$$x \cos \psi_1 + y \sin \psi_1 = 0$$
$$x \cos \psi_2 + y \sin \psi_2 = 0$$

dann ist die Summe der Quadrate der Abstände, die irgend ein Punkt der Ellipse von besitzt, gleich:

$$x^2 (\cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2) + 2\, xy (\cos \psi_1 \sin \psi_1 + \cos \psi_2 \sin \psi_2) + y^2 (\sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2) \equiv g(x, y)$$

oder in abgekürzter Weise geschrieben:

$$\Sigma d_1^2 = U_{11}\, x^2 + 2\, U_{12}\, xy + U_{22}\, y^2 \equiv g(x, y).$$

Wenn nun für alle Werte von x und y sowohl $f(x, y)$ als $g(x, y)$ einen konstanten Wert h so geht daraus hervor, dass $f(x, y) \equiv \lambda\, g(x, y) + \mu$ sein muss.

Daraus ergiebt sich sogleich, dass $\mu = T_{33} = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$ ist. Ferner bestehen die Identi

$$T_{11} + T_{22} \equiv \lambda (U_{11} + U_{22})$$
$$T_{12} \equiv \lambda U_{12}.$$

Nun ist aber $T_{11} + T_{22} = 3$; $U_{11} + U_{22} = 2$, also $\lambda = \frac{3}{2}$.

Will man also die drei ursprünglichen Geraden durch die zwei gleichlangen konjugierten Durchm der Schaar der Wahrscheinlichkeitsellipsen ersetzen, so muss man beachten, dass, von einer add Konstanten abgesehen, jedes Quadrat eines Fehlers, der in Bezug auf diese Durchmesser beg wird, mit $\frac{3}{2}$ zu multiplizieren ist, damit die Summe dieser Quadrate der Summe der Fehlerqu in Bezug auf die gegebenen Geraden äquivalent wird. Das aber heisst, dass ich bei der i ausgleichung den konjugierten, gleichlangen Durchmessern das Gewicht $\frac{3}{2}$ beilegen muss.

Fig. II. Wenn wir unter diesen Bedingungen eine geometrische Ausgleichung vornehmen, dann i wir durch die früher angestellte Vergleichung zwischen dem Schwerpunkt eines linearen Punktsy und dem Gauss'schen Punkt eines ebenen Vielseits, dass die geometrische Summe der jewe den Gewichten multiplizierten Abstände des gesuchten Punktes von den Seiten des Vielseit schwinden muss. Wir finden diesen Punkt auf ganz ähnliche Art, wie früher, dadurch, dass w nächst von allen Punkten, die auf einem vom Schnittpunkt zweier Seiten aus über den zwischen diesen Seiten gespannten Kreisbogen liegen, denjenigen aussuchen, für den die geome Summe der Abstände von diesen Seiten, jeweils multipliziert mit den zu den Seiten geh Gewichten, normal ist zur dritten Seite.

Das Dreieck, welches bei der Bildung der geometrischen Summe entsteht, muss dem Dreieck ähnlich sein, weil alle seine Seiten senkrecht stehen zu denen des Hauptdreiecks. a folgt, dass die entsprechenden Seiten beider Figuren proportional sind. Da aber die Abstäne gesuchten Punktes von den zwei durch einen Kreisbogen verbundenen Seiten des Hauptdreiecks erst mit den Gewichten dieser Seiten multipliziert werden müssen, so kann der gesuchte Punkt n einem Teilstrahl des Dreieckswinkels liegen, für den das Teilverhältnis (i. e. der Quotient aus de der Teilwinkel) gleich ist dem Verhältnis der Seiten des Hauptdreiecks, jeweils dividiert durch e wichte dieser Seiten. Auf diesem Teilstrahl muss nun aber der Gauss'sche Punkt der Ausgleichungi

Wenn ich also zur Bestimmung eines Punktes ein Vierseit konstruiere und das Dreiseit der zuerst gezogenen Geraden durch die gleichlangen, konjugierten Durchmesser unsrer Wahrscheinlichsellipsen ersetze, so bilden diese Durchmesser mit der vierten Seite des Vierseits ein neues Dreiseit, en Seitenlängen ich mit den leicht verständlichen Buchstaben d_1, d_2, g_4 festhalte. In diesem en Dreiseit finde ich den gesuchten Gauss'schen Punkt, indem ich den Winkel zwischen d_1 und d_2 h einen Strahl so teile, dass das Teilverhältnis gleich $d_1 : d_2$ ist. Den Winkel zwischen d_1 und g_4 s ich dagegen so zerschneiden, dass das Verhältnis der Sinus der erhaltenen Einzelwinkel gleich ist. Der Schnittpunkt dieser beiden Teilstrahlen ist der gesuchte Gauss'sche Punkt des Vierseits.

4.

Auf welch' einfache Weise die Ausgleichung vor sich geht, wenn ein Punkt durch mehr als Gerade überbestimmt ist, lässt sich leicht absehen. Man wähle aus den n die Lage bestimmenden den vier nach Gutdünken heraus und suche nach den Anleitungen des vorigen Artikels den s'schen Punkt dieses Vierseits. Dann bestimme man wiederum die Hauptaxen der Ellipsen, auf n die Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit liegen, und ersetze die vier Geraden durch die beiden ilangen, konjugierten Durchmesser dieser konzentrischen, perspektivisch-ähnlichen Schar von lschnitten. Mit diesen Durchmessern verbinde man die fünfte Gerade zu einem Dreiseit, in em man nach dem dritten Artikel dieses Abschnitts den Gauss'schen Punkt bestimmt. Dieses eit lässt sich abermals äquivalent durch die beiden gleichlangen Durchmesser einer Ellipsenersetzen und auf diese Weise findet man ohne theoretische Schwierigkeiten den Punkt, der Geraden die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat, der richtige zu sein.

Eine grössere Anzahl von Ausführungen, die lehren, wie man beispielsweise bei vier Geraden auptaxen der Ellipsenschar für den Gauss'schen Punkt des Vierseits direkt findet, ohne gleich-Durchmesser zu gebrauchen und noch andere mit der Punktausgleichung zusammenhängende n müssen hier der Kürze wegen bei Seite gelassen werden.

Wenn man übrigens bedenkt, dass bei einigermassen genauen Zeichnungen die erste Korrektur rösste sein wird und dass mit zunehmender Anzahl der Überbestimmungen die Quadratsummen 'all zu Fall kleiner werden und gegen die erste Verbesserung als verschwindend anzusehen sind, ält man auch hier eine Bestätigung für den Satz, dass bei Überbestimmungen die Genauigkeit Bestimmung proportional der Wurzel aus der Anzahl der überschüssigen Bestimmungsstücke t, einen Satz, den auch Gauss, noch von der Anzahl der Fehler redend, in der theoria combis pars prior art. 15 folgendermassen ausdrückt: Generaliter autem affirmare possumus, sionem duplicatam in ista determinatione requirere errorum copiam quadruplicatam e. ct.

Da nämlich für die Genauigkeit in genere eine Masszahl in der Wurzel aus der Anzahl der hüssigen Bestimmungen, dividiert durch die Summe der Fehlerquadrate gefunden wird und erner bei der Ausgleichung des Punktes bei jeder neuen Ausgleichsbestimmung zu der Summe rher gebildeten Fehlerquadrate die neugebildete Summe hinzukommt, so sieht man den Grund zu sgesprochenen Satze leicht ein. Man erkennt aber auch hieraus, dass es eine mühsame issliche Sache ist, den Grad der absoluten Genauigkeit einer Zeichnung durch zahl- Überbestimmungen zu heben; besser thut man, schon bei der Anfertigung durch erhöhte lt die absolute Genauigkeit der Zeichnung auf eine möglichst hohe Stufe zu bringen.

IV.

Die Bestimmung der Gewichte der ausgeglichenen Gebilde

1.

Die Gewichte sind, wie schon erwähnt, den Quadraten der Zahlen, die in jedem einzelnen die Genauigkeit der Bestimmungen angeben, proportional. Setzt man die Genauigkeit irgend Bestimmung gleich eins, dann sind die Gewichte die Quadrate der relativen Genauigkeit. Als s sind sie für das Ausgleichungsverfahren von höchster Bedeutung.

Die Gewichte bestimmen sich leichter auf analytischem Wege als auf dem rein geometri Betrachtungen. Wir sind dadurch gezwungen, zur algebraischen Behandlung des Ausgleich geschäftes überzugehen.

Zunächst sollen die Gewichte für die Ausgleichungen eines Punktes bestimmt werden. der Punkt soll nur die Möglichkeit haben, sich auf einer Geraden zu bewegen, so dass den Fe der Bestimmung nur die Richtungsverschiedenheit zukommt, die man mit den Vorzeichen plus minus ausdrücken kann.

Wir wollen die Gerade, auf der der Punkt liegen muss, als die x-Axe eines Koordinatensy betrachten. Es sei zunächst der Abstand des Punktes vom Ursprung des Systems a mal aufgeti wodurch die Lage des Punktes überbestimmt ist. Die Summe der aufgetragenen Abstände s Gleicht man nach dem einfachsten Prinzip aus, dann besteht die Gleichung:

$$ax - m = 0.$$

Eine ähnliche Lagebestimmung sei später abermals vorgenommen worden, bei denen die Z a' und m' gleiche Bedeutung haben wie a und m. Dann besteht noch die zweite Gleichung:

$$a'x - m' = 0.$$

Ebenso bestehe noch die dritte u. s. w. Gleichung:

$$a''x - m'' = 0$$

. . . . . .

Es sollen die Einzelausgleichungen nochmals in beste Übereinstimmung gebracht werden Wirkung ist dann die, dass keine der angeschriebenen Gleichungen noch streng erfüllt ist, s jede eine kleine Verbesserung erfährt, die man den Fehler nennen kann. Die Summe der Qu dieser Fehler wird sein:

$$(ax - m)^2 + (a'x - m)^2 + a''x - m'')^2 + \cdots$$

Damit sie ein Minimum wird, muss die Ableitung der Summe nach x verschwinden, woraus m x den Wert erhält:

$$x = \frac{am + a'm' + a''m'' + \cdots}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}$$

Dieser plausibelste Wert von x werde mit A bezeichnet. Wir wollen untersuchen, wi die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein von A um ξ abweichender Wert der richtige wird.

Nach den früheren Darlegungen stellt

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass ein Fehler von der Grösse x begangen wird.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den sämtlichen angeschriebenen Gleichungen chzeitig der Fehler

$$a(A+\xi) - m,\ a'(A+\xi) - m',\ a''(A+\xi) - m'' \ldots$$

ngen wird, proportional der Funktion:

$$e^{-h^2}\{(a(A+\xi)-m)^2 + (a'(A+\xi)-m')^2 + (a''(A+\xi)-m'')^2 + \ldots$$

net man die einzelnen Quadrate aus und summiert die erhaltenen Glieder, dann erhält man Exponenten:

$$-h^2(a^2+a'^2+a''^2+\ldots)\left\{\xi^2 + \frac{m^2+m'^2+m''^2\ldots}{a^2+a'^2+a''^2} - A^2\right\}$$

it wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch proportional der Grösse:

$$e^{-h^2(a^2+a'^2+a''^2+\ldots)\xi^2}$$

Der konstante Faktor muss wegen der Bedingung, dass das Integral der mit $d\xi$ multiplizierten rscheinlichkeit von $-\infty$ bis $+\infty$ gleich 1 ist, immer in gleicher Weise vom Exponenten abhängig und braucht deshalb nicht besonders betrachtet zu werden. Wir ziehen aus den Ableitungen den ss, dass die Wahrscheinlichkeit des Abweichens einer Bestimmung vom plausibelsten Wert ganz ch ausgedrückt wird, wie die Wahrscheinlichkeit des Abweichens der gefundenen Bedingungen wahren Wert, dass aber beim Ausgehen von dem plausibelsten Wert anstatt von den gefundenen truktionen das Quadrat der Genauigkeit im Verhältnis von $1 : a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots$ vermehrt n ist, dass mithin: $a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots$ das Gewicht des plausibelsten Punktes ist.

2.

Gleicht man einen allgemeinen Punkt in der Ebene aus, so wird die Aufgabe der Gewichtsmung alle Richtungen zu berücksichtigen haben, nach denen hin die Lage des Punktes fehlerhaft n kann. Die Lösung ist erst vollständig, wenn das Gewicht für zwei Hauptrichtungen bestimmt nd dann eine Regel aufgefunden wird, nach der man leicht das Gewicht für jede beliebige lung aus den Hauptgewichten bestimmen kann.

Ein Punkt sei durch n Gerade (oder auch unter der angegebenen Beschränkung durch rven) überbestimmt. Für die Koordinaten der Punkte dieser Geraden sollen in Bezug auf ein iges, rechtwinkliges Koordinatensystem folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 - p_1 &= 0 \\ x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 - p_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots &\ldots \\ x\cos\varphi_n + y\sin\varphi_n - p_n &= 0. \end{aligned}$$

Wählt man irgendwo in der Ebene einen Punkt und setzt dessen Koordinaten in die Gleichungen ann werden die rechten Seiten nicht mehr zu Null, sondern sie stellen jeweils den Fehler des

Punktes in Bezug auf die betreffende Gerade dar. Bildet man für diesen Punkt die Summe der F quadrate, die durch E bezeichnet werden mag, dann erhält man die Gleichung:

$$E = T_{11}\,x^2 + 2\,T_{12}\,xy + T_{22}\,y^2 - 2\,T_{13}\,x - 2\,T_{23}\,y + T_{33}.$$

Die Koeffizienten $T_{11} \cdots T_{33}$ sind Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke:

$$T_{11} = \cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cdots + \cos^2\varphi_n$$
$$T_{12} = \cos\varphi_1 \sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_2 + \cdots + \cos\varphi_n \sin\varphi_n$$
$$T_{22} = \sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2 + \cdots + \sin^2\varphi_n$$
$$T_{13} = p_1 \cos\varphi_1 + p_2 \cos\varphi_2 + \cdots + p_n \cos\varphi_n$$
$$T_{23} = p_1 \sin\varphi_1 + p_2 \sin\varphi_2 + \cdots + p_n \sin\varphi_n$$
$$T_{33} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \cdots + p_n^2.$$

Der Ort der Punkte, für die die Summe der Fehlerquadrate konstant bleibt, ist eine E Ändert man E, dann erhält man eine Schar konzentrischer, koaxialer Ellipsen, welche mit der schon gefundenen Ellipsenschar um den letzten Gauss'schen Punkt identisch sein muss; denn dort stellten die Ellipsen die Örter der Punkte dar, für welche die Summe der Fehlerquadr Bezug auf das letzte Dreieck konstant blieb. Nun unterscheiden sich nach dem früheren diese Summen, von einer additiven Konstanten abgesehen, nur durch die Faktoren, die die Gewicht stellen, was aber für die Schar von Kurven nichts ausmacht.

Soll diese Quadratsumme ein Minimum werden, dann müssen die partiellen Ableitungen nach x und y verschwinden, wonach wir für die Bestimmung des Gauss'schen Punktes fo Gleichungen erhalten:

$$T_{11}\,x + T_{12}\,y - T_{13} = 0$$
$$T_{12}\,x + T_{22}\,y - T_{23} = 0$$

Die Bedeutung der sechs Koeffizienten $T_{11} \cdots T_{33}$ ergiebt sich am deutlichsten, wenn m den Koordinatenursprung einen Kreis mit dem Radius gleich: eins, zieht. Die Schnittpunkt Normalabstände $p_1 \cdots p_n$ mit diesem Kreis bilden ein System von Punkten, denen wir die eins beilegen.

Für dieses Punktsystem bedeutet T_{11} das Trägheitsmoment in Bezug auf die y-Axe, T dieselbe Bedeutung für die x-Axe, T_{12} aber ist das Deviationsmoment des Systems in Bezug a z-Axe. T_{13} und T_{23} sind die Summen der Projektionen der Normalabstände jeweils auf die Axe T_{33} ist die Summe der Fehlerquadrate des Ursprungs in Bezug auf die angenommenen Gerade

Um auf die Gewichte der Bestimmung des Gauss'schen Punktes zu kommen, geben wi Ausdruck für E eine andere Gestalt. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es sei:

$$f_1 \equiv T_{11}\,x + T_{12}\,y - T_{13}$$
$$f_2 \equiv T_{21}\,x + T_{22}\,y - T_{23}$$
$$f_3 \equiv -T_{31}\,x - T_{32}\,y + T_{33}$$

Aus diesem Gleichungssystem bilden wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & -T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & -T_{23} \\ -T_{31} & -T_{32} & +T_{33} \end{vmatrix}$$

und nennen die zu T_{11} zugehörige Unterdeterminante: Δ_{11} und ähnlich die zu jedem adjungierten Unterdeterminanten.

Dann ist:

$$E = \frac{f_1^2}{T_{11}} + \frac{1}{T_{11}\,\Delta_{33}}(\Delta_{33}\,y - \Delta_{32})^2 + \frac{\Delta_{22}\,\Delta_{33} - \Delta_{23}^2}{T_{11}\,\Delta_{33}},$$

on man sich leicht durch Ausrechnen überzeugen kann.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Punkt der richtige sei, ist nach den früher leiteten Formeln proportional dem Ausdruck

$$e^{-h^2 E} \text{ oder } e^{-h^2\left\{\frac{f_1^2}{T_{11}} + \frac{(\Delta_{33}\,y - \Delta_{23})^2}{T_{11}\,\Delta_{33}} + \frac{\Delta_{22}\,\Delta_{33} - \Delta_{23}^2}{T_{11}\,\Delta_{33}}\right\}}$$

Die Wahrscheinlichkeit aber dafür, dass die y-Koordinate die richtige ist, erhält man, wenn für ein veränderliches x die Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten bilden, d. h. rechnerisch em Ausdruck:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\left(\frac{f_1^2}{T_{11}} + \frac{(\Delta_{33}\,y - \Delta_{23})^2}{T_{11}\,\Delta_{33}} + \frac{\Delta_{33}\,\Delta_{22} - \Delta_{23}^2}{T_{11}\,\Delta_{33}}\right)} dx.$$

es Integral ist also ein Vielfaches von dem folgenden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \frac{f_1^2}{T_{11}}} dx.$$

nkt man, dass der Ausdruck: $E - \frac{f_1^2}{T_{11}}$ von x frei und dass $\frac{\partial E}{\partial x} = 2 f_1$ ist, dann erhält man die hung: $2 f_1 - \frac{2 f_1}{T_{11}} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$ oder $\partial x = \frac{\partial f_1}{T_{11}}$. Infolge davon lässt sich der Wert des Integrales finden. t gleich $\frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{T_{11}}}$.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die y-Koordinate des angenommenen Punktes g ist, proportional dem Wert der Funktion:

$$e^{-h^2 \frac{(\Delta_{33}\,y - \Delta_{32})^2}{T_{11}\,\Delta_{33}}}.$$

Für die y Koordinate des Gauss'schen Punktes, die mit B bezeichnet werden mag, wird diese scheinlichkeit zu einem Maximum, da hierbei

$$\Delta_{33}\,y - \Delta_{23} = 0$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Wert der y-Koordinate, der um η gegen die Koordinate des 'schen Punktes abweicht, ist proportional der Funktion:

$$e^{-h^2 \frac{\Delta_{33}}{T_{11}} \eta^2}$$

ganz analog der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in Bezug auf die angenommenen Geraden, nur lie Genauigkeit im Verhältnis von $1 : \sqrt{\frac{\Delta_{33}}{T_{11}}}$ gestiegen ist. Wir schliessen daraus, dass $\frac{\Delta_{33}}{T_{11}}$ das cht für die Bestimmung der y-Koordinate des Gauss'schen Punktes ist.

Genau so ergiebt sich, dass $\frac{\Delta_{33}}{T_{22}}$ das Gewicht der Bestimmung der x-Koordinate des s'schen Punktes ist.

Ist mithin die Gewichtsbestimmung für beliebige zwei aufeinander senkrechte Axenrichtu durch die durchgeführte Untersuchung aufgefunden, so bleibt noch die Antwort auf die Frage ü ob unter allen rechtwinkligen Strahlenpaaren des Gauss'schen Punktes nicht ein hervorragend g netes Axenpaar vorhanden ist, für dessen Richtungen die Gewichte einen möglichst einfachen Aus annehmen. Schreibt man für Δ_{33} den vollen Ausdruck, dann findet man für das Gewicht i Bestimmung der x-Koordinate den Wert:

$$\frac{T_{11}\,T_{22} - T_{12}^{\,2}}{T_{22}}$$

und ähnlich für die zweite Richtung:

$$\frac{T_{11}\,T_{22} - T_{12}^{\,2}}{T_{11}}.$$

Hätte man die Hauptträgheitsaxen des oben beschriebenen Punktsystems in Bezug auf Gauss'schen Punkt als Koordinatenaxen gewählt, dann wäre T_{12} zu Null geworden und die Ausd gingen über in:

$$T_{11} \text{ und } T_{22}.$$

Dieses aber heisst: Für jeden ausgeglichenen Punkt giebt er zwei senkrechte A für deren Richtungen die Gewichte der Bestimmungen „Extrema" werden und Richtungen fallen mit den Hauptträgheitsaxen eines Punktsystems auf dem um Gauss'schen Punkt beschriebenen Einheitskreis zusammen, dessen einzelne Punkt Normalprojektionen des Mittelpunktes in Bezug auf die den Punkt bestimme Geraden sind.

Für die Hauptträgheitsmomente wollen wir die Bezeichnungen T_y und T_x gebrauchen, $T_y > T_x$ sein mag.

Will man aber das Gewicht der Bestimmung für eine beliebige Richtung, dann denke sich nach dieser Richtung, die mit der ersten Hauptaxe einen Winkel ϑ bilden mag, einen begangen von der Grösse dr. Dieser lässt sich linear zusammensetzen aus zwei Fehlern i Richtung der Hauptaxen, so dass:

$$dr = dx \cos\vartheta + dy \sin\vartheta$$

ist. Nach der theoria combinationis wird das Reziproke des Gewichtes das Quadrat der mit Fehler einer Bestimmung genannt und das berühmte, unter 18 gestellte Problem löst die Au wie der mittlere Fehler einer linearen Funktion zu bestimmen ist. Wendet man diese Lösun an, dann ist der mittlere Fehler von dr gleich

$$\sqrt{\frac{\cos^2\vartheta}{T_y} + \frac{\sin^2\vartheta}{T_x}}$$

und daraus das Gewicht der Bestimmung nach der angenommenen Richtung:

$$\frac{T_x\,T_y}{T_x\cos^2\vartheta + T_y\sin^2\vartheta}$$

Die Identität dieser Formel mit der Euler'schen für die Bestimmung des Krümmungs eines ebenen Normalschnitts einer Oberfläche aus den Hauptkrümmungsradien liegt zu nahe, al man sie übersehen könnte. Ausserdem aber ist der Nenner des Ausdrucks das Trägheitsmome

eführten Punktsystems auf die in Betracht genommene Richtung, so dass es leicht wäre, die ndene Formel in einem einfachen Satze wiederzugeben.

3.

Was die Ausgleichung eines Punktes durch Auflösung der oben gefundenen Gleichungen angeht, rgeben sich die Koordinaten des Punktes in sehr einfacher Weise. Es ist nämlich

$$x = \frac{T_{13}\,T_{22} - T_{12}\,T_{23}}{T_{11}\,T_{22} - T_{12}^{2}} \text{ und ähnlich auch } y = \frac{T_{11}\,T_{23} - T_{13}\,T_{12}}{T_{11}\,T_{22} - T_{12}^{2}}.$$

Setzt man aber den Wert der Ausdrücke, die wir früher mit f_1 und f_2 abkürzender Weise ichnet haben, nicht gleich Null, sondern gleich F_1 und F_2 und lösen dann die Gleichungen auf, ist, mit Beibehaltung der oben eingeführten Abkürzungen:

$$x = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{33}} + F_1\frac{T_{22}}{\Delta_{33}} - F_2\frac{T_{12}}{\Delta_{33}}$$

$$y = \frac{\Delta_{32}}{\Delta_{33}} + F_2\frac{T_{11}}{\Delta_{33}} - F_1\frac{T_{21}}{\Delta_{33}}$$

Man sieht also, dass die Gewichte für die Koordinaten x und y die Nenner der rechten Seiten id F_2 der Gleichungen in der allgemeinen Auflösung sind. Dem aber muss immer so sein, wie im Artikel der theoria motus gezeigt ist. Dadurch wird die Gewichtsbestimmung gar sehr erleichtert. Soll der Gauss'sche Punkt Ursprung des Koordinatensystems werden, dann muss $T_{13} = 0$ und $= 0$ sein. Die Bedeutung dieser Gleichungen ist leicht anzugeben. Sie besagen nämlich, dass die etrische Summe der Fehler für den Gauss'schen Punkt verschwindet, so dass das oben nur für Gerade Bewiesene jetzt als allgemeiner Satz ausgesprochen werden kann. In jedem ebenen eit ist der Punkt, für den die geometrische Summe seiner Normalbestände von Seiten des Vielseits verschwindet, der Gauss'sche Punkt der Figur.

4.

Um das Gewicht einer ausgeglichenen Geraden zu finden, betrachte ich dieselbe Gleichungs- (die Hesse'sche Normalform), die früher als die Gleichung einer Geraden angesehen wurde, ls die eines Punktes. Ich denke mir jetzt die drei Grössen $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, p als variabel, dagegen y als konstant. Unter diesen Annahmen ist es augenscheinlich, dass zwischen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, p en Koordinaten x und y der Zusammenhang bestehen muss:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0,$$

eine Gerade mit dem Normalabstand p des Ursprungs von der Geraden und dem Neigungs- φ dieses Abstandes gegen die x-Axe durch den Punkt x, y geht.

Wir wollen annehmen, dass eine Gerade durch n Punkte überbestimmt sei. Die Koordinaten Punkte seien: $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_n, y_n$.

Die Gerade sei schon ausgeglichen. Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Schwerpunkt nktsystems. Ausserdem seien die Hauptträgheitsaxen die Koordinatenaxen. Die ausgeglichene wird von den folgenden n Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p &= 0 \\ x_2\cos\varphi + y_2\sin\varphi - p &= 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ x_n\cos\varphi + y_n\sin\varphi - p &= 0 \end{aligned}$$

im allgemeinen keine streng erfüllen, sondern, wenn wir die Werte von φ und p der ausgegli Geraden in das Gleichungssystem einsetzen, so ergiebt jede der Gleichungen einen etwas grö oder kleineren Wert, der als Fehler der Geraden gegen den Punkt zu bezeichnen ist. Bilde auch hier unter den oben angegebenen Bedingungen die Summe der Fehlerquadrate, die n bezeichnet werden mag, dann ist $F^2 = \cos^2\varphi\,\Sigma x^2 + \sin^2\varphi\,\Sigma y^2 - n\,p^2$.

Es besteht aber noch die Gleichung:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

mit deren Hilfe F^2 so dargestellt werden kann:

$$F^2 = \cos^2\varphi\,(\Sigma x^2 - \Sigma y^2) - n\,p^2 + \Sigma y^2 = 0.$$

Auch hier ist die Bedingung des Minimums die, dass

$$\frac{\partial(F^2)}{\partial\varphi} = 0 \text{ und } \frac{\partial(F^2)}{\partial p} = 0 \text{ ist.}$$

Daraus folgt, dass:

$$\sin\varphi\cos\varphi\,(\Sigma x^2 - \Sigma y^2) = 0 \text{ und } n\,p = 0$$

ist. Wenn nicht gerade $\Sigma x^2 = \Sigma y^2$ ist, muss für das Minimum: $\cos\varphi$ zu Null werden, d geglichene Gerade also parallel zur x-Axe sein. Dabei ist aber, wie wir gleich sehen werde dingung, dass $\Sigma x^2 > \Sigma y^2$ sei, d. h., dass die x-Axe Axe kleinsten Trägheitsmomentes wird. dagegen die Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, dann ist die Richtung der ausgegl Geraden unbestimmt, jede durch den Schwerpunkt gezogene Gerade besitzt die gleiche Wahrsch keit, die richtige zu sein, wie alle anderen.

Die zweite der durch Differentiation erhaltenen Gleichungen verlangt, dass $p = 0$ werde dass die Gerade durch den Schwerpunkt des gegebenen Punktsystems gehe.

So weit stimmen die analytischen Ergebnisse für den Ausgleich einer Geraden vollstän den Resultaten der früheren geometrischen Betrachtungen überein.

Wir haben sie hier nur sehr kurz durchgeführt zum Zweck der Gewichtsbestimmung. „theoria motus“ findet man infolge der im 183. Artikel gegebenen Entwicklungen die G dadurch, dass man die durch Differentiation der Summe der Fehlerquadrate erhaltenen Gleic nicht gleich Null, sondern irgend einer Grösse z. B. P, Q u. s. w. gleichsetzt und angeschriebenen Gleichungen auflöst. Der Nenner von P bei der ersten Unbekannten, von Q zweiten u. s. w. ist das jeweilige Gewicht. Wollen wir diesen Satz hier anwenden, dann Gewicht für die Bestimmung von $\cos\varphi$ gleich $\Sigma x^2 - \Sigma y^2$; das Gewicht aber für die Best von p ist gleich n, d. h. gleich der Anzahl der bestimmenden Punkte.

Eine Gerade ist also um so mehr gegen einen Fehler in ihrer Richtung ges je grösser der Unterschied der beiden Hauptträgheitsmomente ist; die Sich gegen eine Parallelverschiebung nimmt zu, wie die Wurzel aus der Anzahl bestimmenden Punkte.

Aus der Eigenthümlichkeit, dass das gesuchte Gewicht eine Quadratzahl ist, geht herv nur die Axe kleinsten Trägheitsmomentes als ausgeglichene Gerade betrachtet werden darf.

V.

Anwendungen.

1.

Die Anzahl der Anwendungen, die man von voranstehenden Auseinandersetzungen in der hnenden Geometrie machen kann, ist ebenso gross, wie die Zahl der Aufgaben, die die Geometrie :tellen vermag. Dabei macht es im Prinzip keinen Unterschied, ob die zu lösende Aufgabe dem :ete der Elementar- oder der höheren Geometrie angehört, sobald sie nur eine Konstruktion ıngt. Ich werde mich also darauf beschränken müssen, das Vorgetragene an einigen, beliebig ihlten Beispielen zu erläutern, ohne aber damit sagen zu wollen, dass die gewählten Anwendungen hundert anderen, gerade so nahe liegenden, irgend welchen Vorzug hätten.

2.

Erstes Beispiel: Eine gegebene Strecke soll halbiert werden (Euclidis elem. Lib. I, 10).

Da der Mittelpunkt der Strecke nur nach einer Richtung hin fehlerhaft werden kann, so muss diejenige Konstruktion wählen, wofür das Gewicht des Punktes für die Streckenrichtung ein mum wird. Fig. 12.

Wird der Mittelpunkt durch den Schnitt einer Geraden mit der Strecke bestimmt, so erfordert Bedingung grösster Genauigkeit zweierlei:

1. Die Konstruktionslinie muss die Strecke in der für die Lagebestimmung des Punktes igsten Richtung schneiden.

2. In den Schnittpunkt muss der am sichersten bestimmte Punkt der Konstruktionslinie ıfallen.

Die erste dieser Bedingungen ist erfüllt, wenn die Strecke von der Geraden normal geschnitten Denn wir wollen annehmen, dass die Strecke und die Gerade einen Winkel φ zusammen bildeten. man um den Schnittpunkt den Einheitskreis und errichtet auf beiden Graden in diesem Punkte ale, dann erhält man auf diesem Kreis zwei Punkte, denen man die Masse 1 beilegt und deren :trägheitsaxen die beiden Winkelhalbierenden sind. Ist φ der spitze Winkel zwischen den beiden en, dann ist das eine Hauptträgheitsmoment $2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, das andere $2\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Nach der oben iteten Formel ist das Gewicht des Schnittpunktes in der Richtung der Strecke gleich:

$$\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos^2\varphi} \text{ oder } \frac{1}{\frac{2}{\sin^2\varphi}-1},$$

:m Ausdruck man sogleich ansieht, dass er ein Minimum wird für $\varphi = 90^0$.

Selbst, wenn man in strengerem Sinne dem von der Hilfsgeraden herrührenden Punkte ein :es Gewicht als 1 erteilt, bleibt die Schlussfolgerung dieselbe. Wie könnte auch ein kleineres ıt ein Überneigen nach der einen oder anderen Seite erfordern?

Die zweite Bedingung erfordert, dass der Schnittpunkt Schwerpunkt der Hilfsgera
Denn von allen Punkten einer bestimmten oder überbestimmten Geraden ist der Schwerpu
sichersten bestimmt: Sein Gewicht ist ohne alle Einschränkung gleich der Summe der Gewi
bestimmenden Punkte, während das Gewicht eines um die Strecke r vom Schwerpunkt en
Punktes nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts und nach dem 18. Artikel der theoria
nationis gleich:

$$\frac{n\,(T_x - T_y)}{T_x - T_y + nr^2}$$

ist, wenn T_x das grösste Hauptträgheitsmoment und T_y das kleinste Moment des Punkt
darstellt. Sind die Gewichte der Punkte verschieden, so ist an Stelle von n die Summe der
gewichte zu setzen.

Bei unsrer Konstruktion wird die Hilfsgerade durch die Schnittpunkte zweier um die
punkte gezogenen Kreise bestimmt.

Die Gewichte dieser Schnittpunkte werden nach der Theorie in der Richtung der
schaftlichen Sekante desto grösser, je kleiner der Winkel wird, unter welchem sich die
schneiden, am grössten also, wenn sich die beiden Kreisbogen berühren. In diesem letzte
wird das Gewicht der beiden Schnittpunkte gleich 2. Das Gewicht des Schwerpunktes wäre
diesem Falle gleich 4.

Nicht so aber ist es mit dem Gewicht des gesuchten Mittelpunktes. Denn da ich ihn n
Berührungspunkt zweier Kreisbögen darstellen kann, so folgt, dass ich eine Hilfsgerade ziehe
Sobald ich aber durch zwei Punkte eine Gerade lege, begehe ich einen Fehler, dessen mittlere
(im Gauss'schen Sinn) eben von der Qualität der Zeichnung abhängt und einen Masstab
absolute Genauigkeit abgiebt. Welcher Art diese auch sei: wir wollen sie mit 1 bezeichnen,
also für einen absolut richtigen (gegebenen) Punkt das Gewicht von ∞ auf 1 sinkt. Ist a
Punkt seiner Lage nach schon abgeleitet, so ist sein Gewicht nicht mehr unendlich, sondern g
daher denn auch durch die mit ihm vorzunehmende zeichnerische Handlung sein Gewicht noc
als auf 1 herunterdrücken muss. Wenn man also den Schnittpunkten zweier sich unter sehr
Winkeln schneidenden Bögen das Gewicht 2 beilegt, so sinkt dieses Gewicht in Bezug auf ihre
gerade von 2 auf $\frac{2}{3}$ und damit das Gewicht des Schwerpunktes auf $\frac{4}{3}$. Dies aber ist das
des gesuchten Mittelpunktes unsrer Strecke. Daher die Regel: Will man eine Strecke n
genau halbieren, so wähle man als Radien für die Kreise, deren Schnittpunkte die Hilfslinie bes
Strecken, die nur wenig grösser als die Hälfte der gegebenen Strecke sind.

Diese Regel wurde empirisch schon von Ch. Wiener (Wiener: Lehrbuch der darst
Geometrie, 1. Band S. 191) aufgefunden.

Man kann das Gewicht des Mittelpunktes noch etwas steigern dadurch, dass man d
Fig. 12a. gerade durch den unendlich fernen Punkt überbestimmt. Weil alle nach dem unendlichen
gezogenen Geraden sich unter einen verschwindend kleinen Winkel schneiden, so ist ihm für die R
in der er allein benützt werden kann, das Gewicht 2 beizulegen. Für eine Gerade aber,
nach ihm hinzieht, sinkt indessen sein Gewicht auf $\frac{2}{3}$. Berechnet man unter der Annahme,

de auf die erwähnte Weise überbestimmt ist, das Gewicht des Mittelpunktes, so hat es sich von
ı $\frac{3}{2}$ gehoben, es ist also im Verhältnis von 8 : 9 gestiegen.

Man ersieht aus den Gewichtsbestimmungen, dass die aus den gegebenen Stücken durch die
chsten Operationen hergeleiteten Stücke die grössten Gewichte haben und dass diese Gewichte
so kleiner werden, je mehr Zwischenoperationen zwischen der Lage der gegebenen und der
ıdenen Stücke ausgeführt werden, wie es auch sein muss.

Anmerkung: Die von Euclid gegebene Konstruktion kann keine so hohe Gewichtszahl für den Mittelpunkt
ɔn, wie das gewöhnliche Verfahren der Streckenhalbierung.

3.

Zweites Beispiel: Ein Winkel soll möglichst genau halbiert werden (Euclidis elementa Lib. I, 9).
benützen die Euclidische Konstruktionsart, verwandeln also den Winkel in ein gleichschenkliges
ck, errichten aber auf der Basis dieses Dreiecks nicht ein, sondern zwei neue gleichschenklige
cke. Dadurch ist die Winkelhalbierende überbestimmt, was bei richtiger Ausgleichung die Sicher-
ler Konstruktion erhöht.

Wenn eine Gerade bestimmt oder überbestimmt ist, ergeben sich für ihre Lage zwei Gewichte:
in Bezug auf Parallelverschiebung und eines in Bezug auf eine Drehung um den Schwerpunkt.
Winkelhalbierende muss durch Scheitel des gegebenen Winkels gehen. Diesem Punkt ist als
gegebenen Punkt ein unendlich grosses Gewicht beizulegen. Damit wird er zum Schwerpunkt,
ɜs nur noch das Gewicht in Bezug auf eine Drehung zum Maximum werden muss. Nach unseren
nissen ist dieses Gewicht gleich der Differenz der Trägheitsmomente des gegebenen Punkt-
ıs in Bezug auf die Hauptaxen des Schwerpunktes. Diese sind in unserem Fall die gesuchten
ılhalbierende und die ihres Nebenwinkels. Das kleinste der beiden Trägheitsmomente kann man
ɔh vernachlässigen. Das grösste von ihnen wollen wir berechnen:

Fig. 13.

Es sei der gegebene Winkel gleich φ. Auf seinen Schenkeln tragen wir vom Scheitel aus die
e a auf. Die Basis des ersten gleichschenkligen Dreiecks ist dann gleich $2\,a \sin \frac{\varphi}{2}$. Zu Schenkeln
iden Hilfsdreiecke machen wir eine Strecke von der Grösse $a \sin \frac{\varphi}{2}\,(1+x)$, wobei also x das
tnis des Überschusses der gewählten Schenkel über die Hälfte der Basis, zur Basishälfte selbst
Venn überhaupt die Hilfsfigur zu Stande kommen soll, dann muss x positiv sein.

Wir bestimmen zuerst das Gewicht der Schnittpunkte der beiden Bogenpaare in Bezug auf
erschiebung senkrecht zur Winkelhalbierenden. Nach unseren Resultaten ist dieses Gewicht
$\frac{2}{(1+x)^2}$, nimmt also mit wachsendem x ab.

Der Abstand des vom Scheitel entferntesten Punktes von der Hauptaxe des Schwerpunktes ist

$$a \cos \frac{\varphi}{2} + a \sin \frac{\varphi}{2}\,(1+x)\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}$$

nächsten Punktes

$$a \cos \frac{\varphi}{2} - a \sin \frac{\varphi}{2}\,(1+x)\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}.$$

Daraus das Trägheitsmoment:

$$\frac{2\,a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{(1+x)^2}\left\{\left(1+tg\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{x\,(2+x)}\right)^2+\left(1-tg\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{x\,(2+x)}\right)^2\right\}$$

oder

$$4\,a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{\left(1+tg^2\,\frac{\varphi}{2}\,(x\,(2+x)\right)}{(1+x)^2}=\frac{4\,a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{(1+x)^2}\left(1-tg^2\,\frac{\varphi}{2}+tg^2\,\frac{\varphi}{2}\,(1+x)^2\right)$$

oder

$$4\,a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{4\,a^2\cos\varphi}{(1+x)^2}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass, so lange $\varphi < 90$, das Gewicht ein Maximum wird für $x = ($ aber auch das Gewicht zunimmt proportional zu a^2.

Ist $\varphi = 90^0$, dann giebt jedes beliebige Bogenpaar gleiche Sicherheit gegen eine Verd der Winkelhalbierenden.

Ist schliesslich $\varphi > 90^0$, dann wird das Gewicht desto höher, je grösser x ist.

Daher die Regel: Soll ein spitzer Winkel genau halbiert werden, dann wähle man zue Zirkelöffnung so gross, wie angängig und schlage damit vom Scheitel einen Bogen auf beide Sc Nun wähle man die Zirkelöffnung etwas mehr wie halb so gross als die Kreissehne des gez Bogens ist und ziehe damit von den Endpunkten der zuerst aufgetragenen Strecken Bögen. den Scheitel des Winkels und die Schnittpunkte dieser Bögen ist die Winkelhalbierende so wie möglich bestimmt.

Als Folgesatz der Bestimmung des Gewichtes der Winkelhalbierenden ergiebt sich au Art und Weise, wie man auf einem Punkte einer gegebenen Geraden am sichersten eine Senk errichtet. Auch hier stimmt das von Wiener gefundene empirische Resultat mit unseren theore Ergebnissen genügend überein (a. a. O. S. 190).

Noch sicherer werden sämtliche Resultate, wenn man noch den unendlich fernen Pun Winkelhalbierenden zu ihrer Bestimmung mitverwendet, die Gewichtsbestimmung erfordert aber sie den wirklichen Verhältnissen entsprechen soll, eine genauere Untersuchung über das dem un fernen Punkt beizulegende Gewicht, wovon wir hier abstehen.

4.

Drittes Beispiel: Es soll die Symmetrieaxe einer Strecke mit möglichst wenig Konstru so genau, wie es angeht, gefunden werden.

Auflösung: Man konstruiere nach 2. den Mittelpunkt der Strecke so genau wie mögli benutze zur Richtungsbestimmung den unendlich fernen Punkt. (Gilt aber nur, wenn die Winke rechtwinklig und gradlinig sind.)

Der Beweis folgt aus 2. und 3. von selbst.

5.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass eine grössere Anzahl von Anwendungen für das Vers der allgemeinen Grundlage förderlich und eine vermehrte Anzahl durchgearbeiteter Beispiele wün wert wäre, auch schon, um den Leser zu eigenen Untersuchungen in stärkerem Masse anzureg es die bloss abstrakte Theorie thut. Aber einerseits stellt sich bei näherem Zusehen heraus, d

essanteren Anwendungen weitläufiger Auseinandersetzungen bedürfen, die den Umfang dieser ft über Gebühr vergrössern würden, andererseits halte ich es für angebracht, eine Zusammenng der wichtigsten Elementarkonstruktionen mit ganz durchgeführter Anwendung der hier ausder gesetzten Grundsätze als besonderes Buch erscheinen zu lassen. Aus der Kenntnis der gungen, unter denen beim geometrischen Zeichnen die höchste relative Genauigkeit erzielt wird, ohne Zweifel eine Vertiefung der ganzen geometrischen Auffassung konstruktiver Probleme hervor. die Anwendung der Grundsätze, deren Entwicklung diese Schrift gewidmet ist, ist vielseitig mannigfaltig; auch die Frage, wie man bei einer beabsichtigten Aufgabe die Stücke geben müsse, eine möglichst vollkommene Lösung zu erhalten, findet ihre präzise und völlig befriedigende ort.

Aus all' diesen Gründen ist zu entnehmen, dass der Gedankenkreis, in dem wir uns bei unsren gungen bewegten, mit dem Ende dieser gegenwärtigen Schrift durchaus nicht erschöpft ist, rn dass noch viele und schöne Aufgaben der Lösung harren.

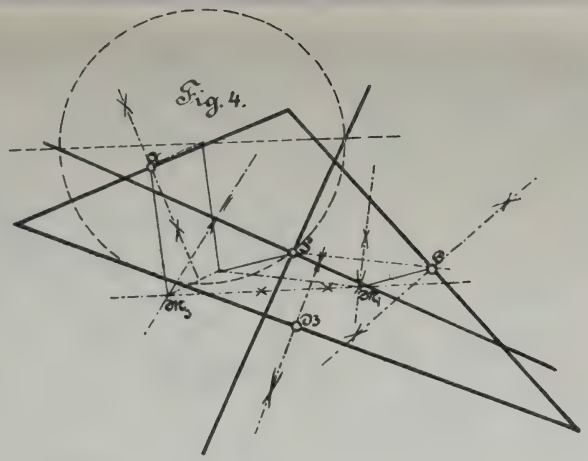


Fig. 4.

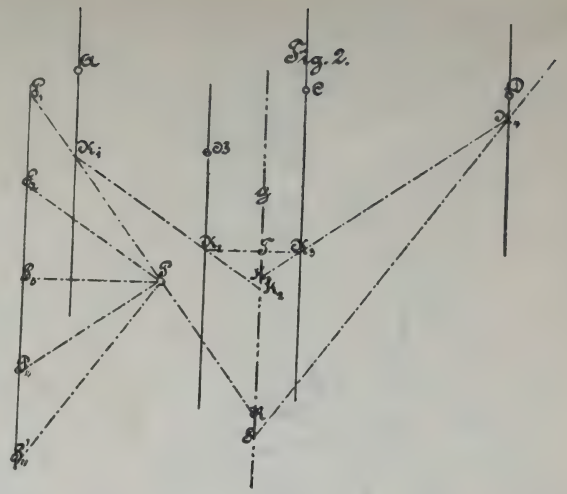


Fig. 2.

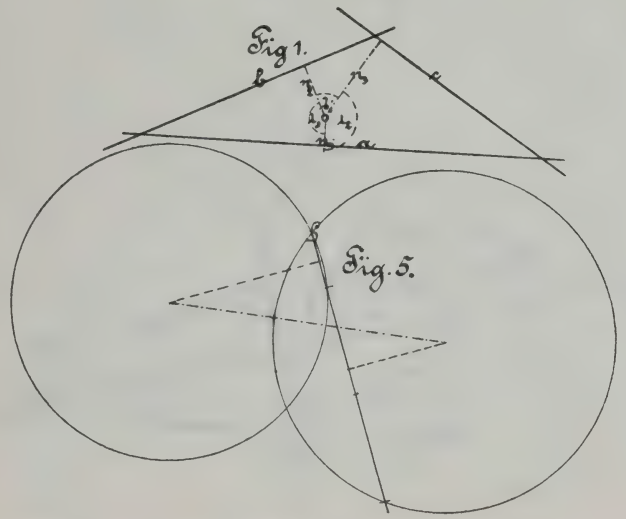


Fig. 1.

Fig. 5.

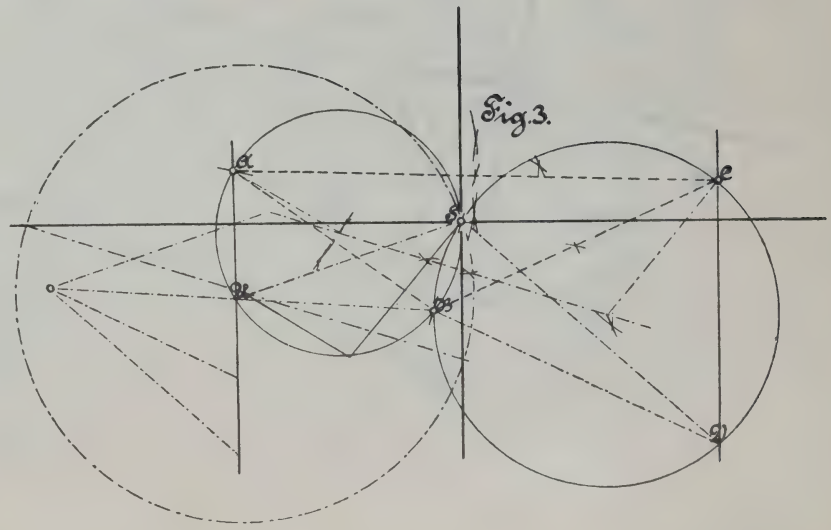


Fig. 3.

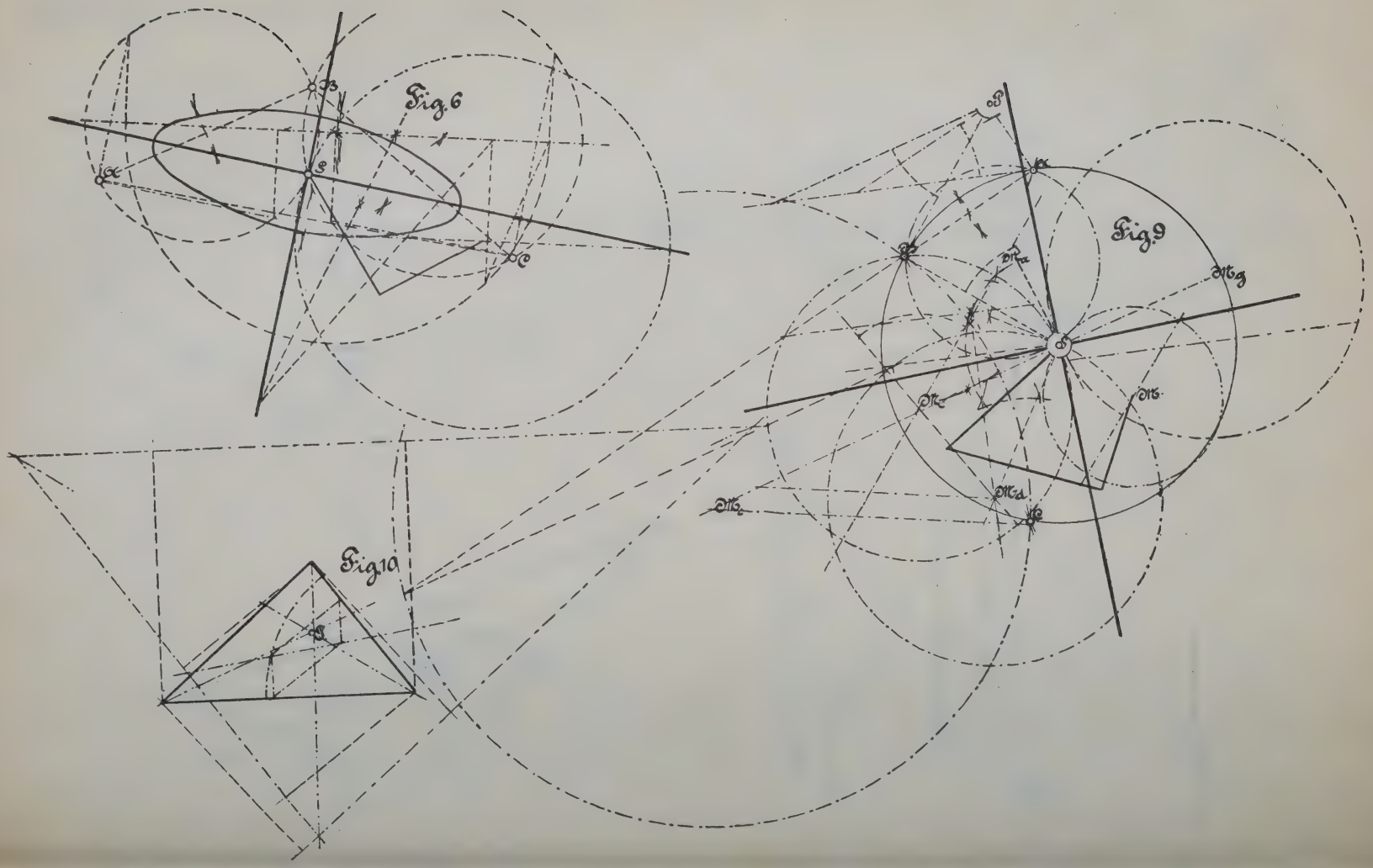


Fig. 6
Fig. 9
Fig. 10

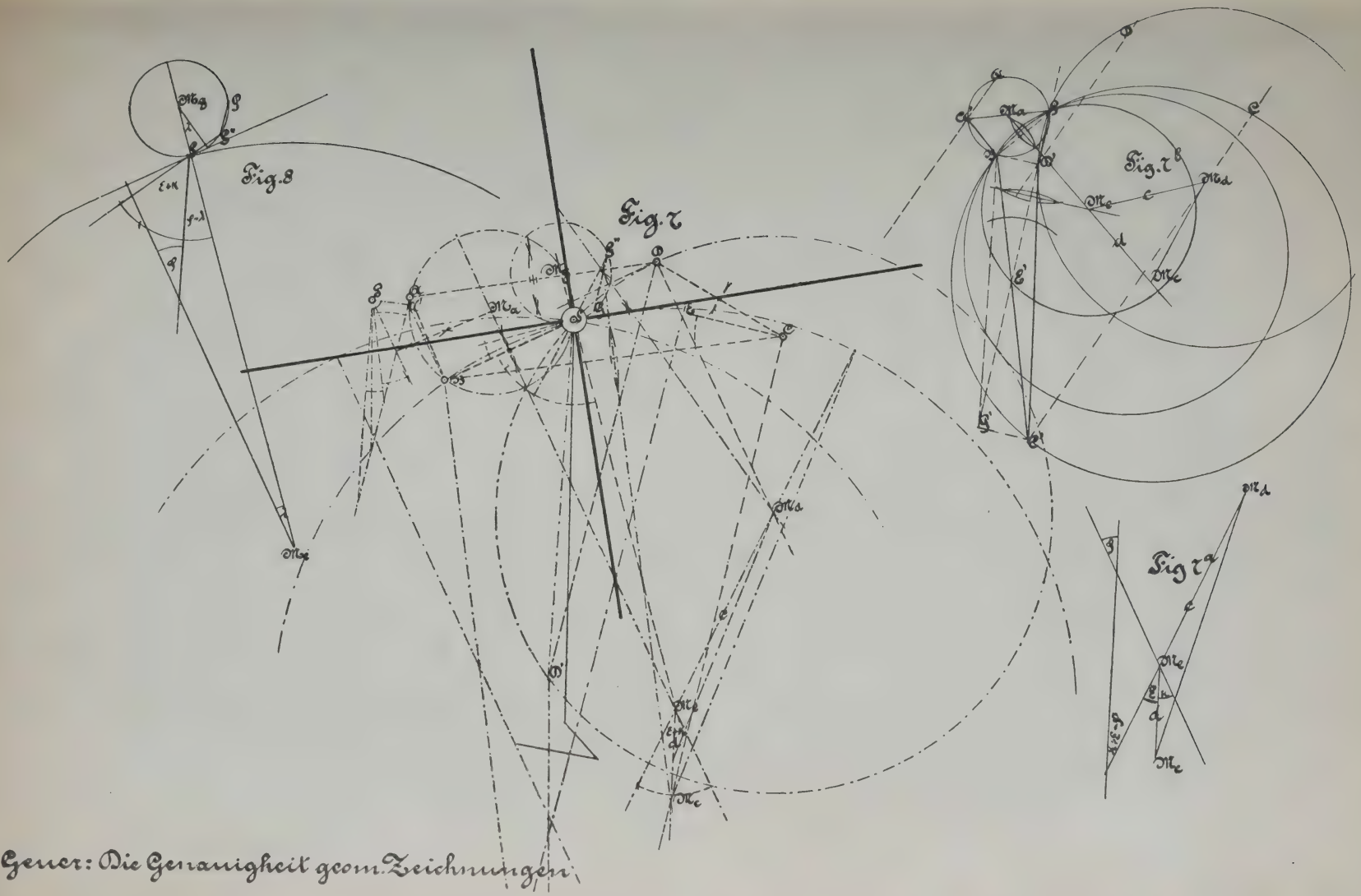


Fig. 8
Fig. 7
Fig. 7b
Fig. 7a

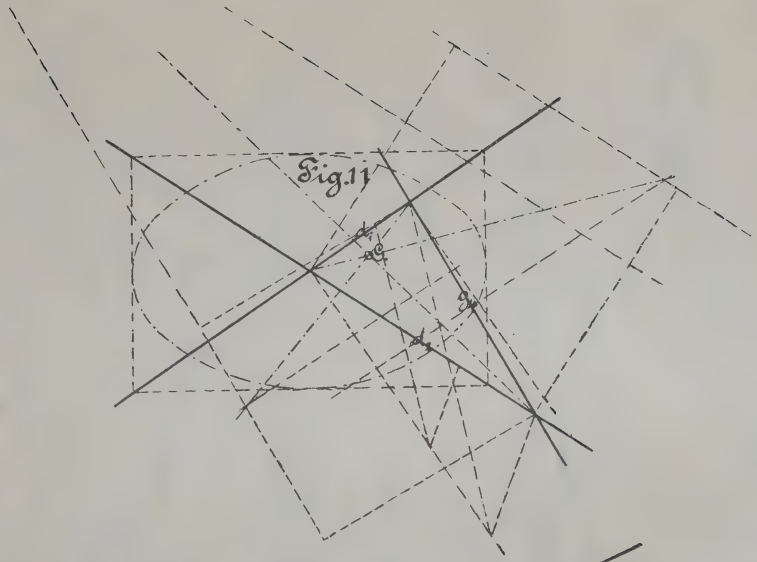
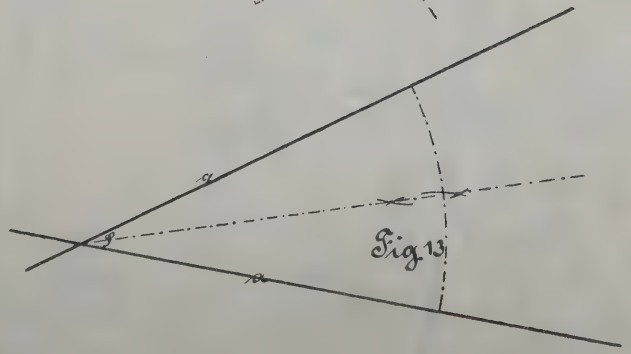


Fig. 11
a
g
a


a
g
a
Fig. 13

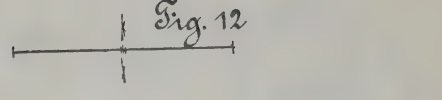


Fig. 12

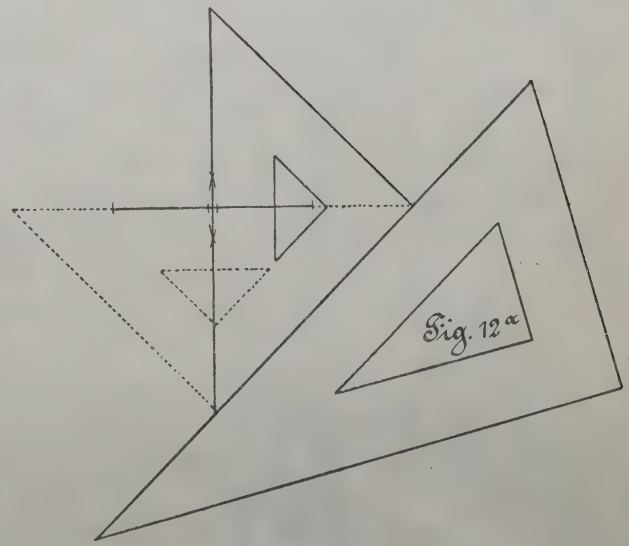


Fig. 12a

Programm

des

Königl. Domgymnasiums zu Magdeburg,

zu Ostern 1847

herausgegeben

vom

Director des Gymnasiums

Konsistorialrath D. K. Funk.

Inhalt: 1. Ueber die Analysis auf der Kugel. Von R. Gorgas.
2. Schulnachrichten über den Zeitraum von Michaelis 1845 bis Ostern 1847.

9.

R. Gorgas

Magdeburg, 1847.

bei W. Heinrichshofen.

Ueber die

Analysis auf der Kugel.

von

R. Gorgas,
Candidat des höheren Schulamts.

Einleitung.

Die Rechnung mit gekrümmten Coordinaten auf einer krummen Oberfläche ist eine erst uerdings in Frankreich versuchte Modification der bisher gebräuchlichen Analysis; aus diesem runde läßt sich von ihrer Literatur nur Weniges sagen. Als einleitendes Werk über die ana- ische Entwickelung von Curvengleichungen auf der Kugeloberfläche insbesondere ist zu nennen: Analysis auf der Kugel von Carl Dietrich 1843«, in welchem bis zu den Kegel- nitten die wichtigsten Verhältnisse von Punkten und Linien auf sphärischen Oberflächen abge- ndelt werden, wobei als Coordinatenachsen zwei sich rechtwinklig schneidende Normalkreise zu unde gelegt worden sind.

Meine Absicht ist es nun, in vorliegender Abhandlung das genannte Werk zu erweitern, leich aber auch die ganze analytische Entwickelung aus einem andern Prinzipe herzuleiten, in- ich jede Curve auf der Kugeloberfläche als den Durchschnitt der letztern mit einer gegebenen rfläche betrachte und also von den räumlichen drei Coordinaten auf die Normalkreiscoordinaten Uebergang mache.

Wie eng übrigens die Analysis auf der Kugel mit der auf der Ebene zusammenhange, heilweise schon von Andern dargethan worden, theils werden sich auch im Laufe der Ent- elung Beweise genug dafür finden. Eins soll noch angedeutet werden, was einen Vorzug analytischen Sphärik vor der ebenen Analysis bedingt: daß nämlich selbst Kurven mehrfacher nmung durch zwei Coordinaten bestimmt werden können, die ein leichteres Elimininen und chnen möglich machen, als die drei Coordinaten der Analysis im Raume.

Erstes Kapitel.

Vom Punkte auf der Kugel.

§. 1.

Bestimmt man einen Punkt **P** auf der mit dem Radius **r** construirten Kugel durch sei drei Raumcoordinaten **x, y, z**, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem im Centrum, u legt durch letzteres zwei Ebenen, deren eine durch das **x**, die andere durch das **y** des Punk geht, so schneiden diese die Kugeloberfläche in zwei Normalkreisen, auf denen im Durchschnitt punkte jenes **P** zugleich liegt; es geht außerdem die eine durch die **X**-und die andere dur die **Y**-Achse der Raumcoordinaten. Den Bogen des ersten Normalkreises zwischen **P** und d **YZ**-Ebene, nenne man ξ, den andern Bogen zwischen **P** und der **XZ**-Ebene, zum zweiten N malkreis gehörig, nenne man η, ferner den Bogen, in welchem eine durch die Achse der $\left\{\begin{matrix}\text{Y u. Z}\\ \text{X u. Z}\end{matrix}\right.$ gelegte Ebene die Kugel schneidet, nenne man $\left\{\begin{matrix}\text{die } \eta\text{-Achse}\\ \text{die } \xi\text{-Achse}\end{matrix}\right\}$ des sphärischen Systems; der e Punkt, in dem beide letztgenannten Achsen sich schneiden, heiße *der Anfangspunkt der sph rischen Coordinaten*. Ein auf beiden Achsenbogen senkrechter Normalkreis, dessen Pol Anfangspunkt der sph. Coord. ist, werde der *Gränzkreis* genannt; die Normalentfernung des Pun **P** vom Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten sei $= \delta$. Alsdann findet man folgende Gleichung

$$(1.)\ x = r \sin \xi,\ y = r \sin \eta,\ z = r \cos \delta.$$

und daraus: $(2.)\ \sin^2 \xi + \sin^2 \eta = \sin^2 \delta.$

Den Bogen auf der ξ-Achse vom Anfangspunkt bis zum Fußpunkte des Bogens η ne man ξ', den auf der η-Achse ebenso bis zum Fußpunkte des Bogens ξ nenne man η', so i

$$(3.)\ \frac{x}{z} = \text{tang } \xi',\ \frac{y}{z} = \text{tang } \eta'$$

daraus: $(4.)\ \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta' = \text{tang}^2 \delta$

und $(5.)\ \sin \xi = \text{tang } \xi' \cos \delta;\ \sin \eta = \text{tang } \eta' \cos \delta.$

§. 2.

Da aber die trigonometrischen Functionen eine Vieldeutigkeit hinsichtlich der zugehör *Bogengröße* involviren, wenn man nicht auf deren *Vorzeichen* Rücksicht nimmt, so i nöthig, zu untersuchen, welche Lagen der Punkt **P** annimmt, je nachdem die Vorzeichen po oder negativ genommen werden. Die sphärische Oberfläche zerfällt aber durch die gehörige weiterung der 3 räumlichen Coordinatenebenen in acht Quartiere, welche so benannt werden fo

Rechts von der **YZ**-Ebene, oberhalb der **XZ**-Ebene auf der vordern Halbkugel liegt *erste* (**I.**) Quartier, auf der hintern Hälfte das *zweite* (**II.**) Quartier. Links von der Ebene oberhalb der **XZ**-Ebene auf der $\left\{\begin{matrix}\text{hintern}\\ \text{vordern}\end{matrix}\right\}$ Kugelseite das $\left\{\begin{matrix}\text{dritte}\\ \text{vierte}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}\text{III.}\\ \text{IV.}\end{matrix}\right\}$ Quartier,

der Kugelhälfte aber, welche unter der XZ-Ebene liegt, liegen die Quartiere 1. 2. 3. und 4, polarisch den gleichnamigen entgegengesetzt.

Hieraus ergeben sich folgende Tabellen-Data:

Größe von				Vorzeichen von:				Lage
ξ zwischen 0^0— 90^0	η zwischen 0^0— 90^0	ξ' zwischen 0^0— 90^0	η' zwischen 0^0— 90^0	sin ξ +	sin η +	tang ξ' +	tang η' +	des Punkts P im I. Quartier.
0^0— 90^0	0^0— 90^0	90^0—180^0	90^0—180^0	+	+	—	—	II. » »
270^0—360^0	0^0— 90^0	180^0—270^0	90^0—180^0	—	+	+	—	III. » »
270^0—360^0	0^0— 90^0	270^0—360^0	0^0— 90^0	—	+	—	+	IV. » »
180^0—270^0	270^0—360^0	180^0—270^0	180^0—270^0	—	—	+	+	1 » »
180^0—270^0	270^0—360^0	270^0—360^0	270^0—360^0	—	—	—	—	2 » »
90^0—180^0	270^0—360^0	0^0— 90^0	270^0—360^0	+	—	+	—	3 » »
90^0—180^0	270^0—360^0	90^0—180^0	180^0—270^0	+	—	—	+	4 » »

obei zu bemerken, daß alle Coordinaten-Bogen nach derselben Richtung von P aus gechnet werden, nach welcher sie im ersten Quartiere der Kugeloberfläche laufen.

Aus obiger Tabelle ersieht man

1) Daß alle Punkte, welche um den Kugeldiameter (polarisch) auseinanderliegen, in n Coordinaten ξ, ξ', η' um zwei Quadranten, in den Coordinaten η aber um drei Quadranten schieden sind;

2) daß die Vorzeichen von sin ξ und sin η allein nicht hinreichend alle 8 Punkte n einander unterscheiden, daß vielmehr die Betrachtung der Vorzeichen von tang ξ' und tang η' diesem Zwecke nothwendig mit gehöre, und endlich

3) daß je zwei diametral auseinander liegende zusammengehörige Punkte (z. B. des I. 1. Quartiers) dasselbe Vorzeichen der tang ξ' und tang η', aber entgegengesetztes die sin ξ und sin η haben.

§. 3.

Coordinatenverlegungen.

Verlegt man das System der 3 Coordinaten im Raume, ohne den Mittelpunkt desselben erändern, so sind folgende Fälle überhaupt möglich:

1.) Es dreht sich das System um den Winkel ω (vor- oder rückwärts) um die Z-, so wird aus den alten Coordinaten x, y, z des Punkts P die neue Ternion a, b, c, wo- olgende Gleichungen Statt haben:

(1.) $z = c$;

(2.) $y = a \sin \omega \underline{+} b \cos \omega$; (Das Vorzeichen $\underline{+}$ bezieht sich auf die Dreh

(3.) $x = a \cos \omega \overline{+} b \sin \omega$; vor- oder rückwärts)

Also die entsprechenden sphärischen Coordinatengleichungen:

(4.) $\sin \eta = \sin \alpha \sin \omega \underline{+} \sin \beta \cos \omega$:

(5.) $\sin \xi = \sin \alpha \cos \omega \overline{+} \sin \beta \sin \omega$;

(6.) $\operatorname{tang} \eta' = \operatorname{tang} \alpha' \sin \omega \underline{+} \operatorname{tang} \beta' \cos \omega$;

(7.) $\operatorname{tang} \xi' = \operatorname{tang} \alpha' \cos \omega \overline{+} \operatorname{tang} \beta' \sin \omega$;

wobei α, β, α', β' die entsprechenden sphärischen Coordinaten für ξ, η, ξ', η', bedeuten.

2) Oder es dreht sich das System der 3 Coordinaten xyz um die feste X-Achse, den Winkel ω, so ist, wenn a, b, c die neuen Coordinaten darstellen:

(1.) $x = a$

(2.) $y = c \sin \omega \underline{+} b \cos \omega$

(3.) $z = c \cos \omega \overline{+} b \sin \omega$;

Und daraus die sphärischen Formeln:

(4.) $\sin \xi = \sin \alpha$;

(5.) $\sin \eta = \cos \Delta \sin \omega \underline{+} \sin \beta \cos \omega$;

(6.) $\cos \delta = \cos \Delta \cos \omega \overline{+} \sin \beta \sin \omega$;

(7.) $\operatorname{tang} \xi' = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \Delta \cos \omega \overline{+} \sin \beta \sin \omega}$;

(8.) $\operatorname{tang} \eta' = \dfrac{\cos \Delta \sin \omega \underline{+} \sin \beta \cos \omega}{\cos \Delta \cos \omega \overline{+} \sin \beta \sin \omega}$;

} wobei dem alten δ das n Δ entspricht.

Durch Division mit $\cos \Delta$ im Zähler und Nenner von (7.) und (8.) wird

(9.) $\operatorname{tang} \xi' = \dfrac{\operatorname{tang} \alpha'}{\cos \omega \overline{+} \operatorname{tang} \beta' \sin \omega}$;

(10.) $\operatorname{tang} \eta' = \dfrac{\sin \omega \underline{+} \operatorname{tang} \beta' \cos \omega}{\cos \omega \overline{+} \operatorname{tang} \beta' \sin \omega} = \operatorname{tang} (\omega \underline{+} \beta')$.

3) Oder es dreht sich das System der xyz um die feste Y-Achse um den Winkel ω, fü

(1.) $y = b$;

(2.) $x = c \sin \omega \underline{+} a \operatorname{cosin} \omega$;

(3.) $z = c \operatorname{cosin} \omega \overline{+} a \sin \omega$;

Daraus hergeleitet für die Kugelcoordinaten:

(4.) $\sin \eta = \sin \beta$;

(5.) $\sin \xi = \cos \Delta \sin \omega \pm \sin \alpha \cos \omega$;

(6.) $\cos \delta = \cos \Delta \cos \omega \mp \sin \alpha \sin \omega$;

(7.) $\text{tang } \eta' = \dfrac{\sin \beta}{\cos \Delta \cos \omega \mp \sin \alpha \sin \omega}$;

(8.) $\text{tang } \xi' = \dfrac{\cos \Delta \sin \omega \pm \sin \alpha \cos \omega}{\cos \Delta \cos \omega \mp \sin \alpha \sin \omega}$;

oder:

(9.) $\text{tang } \eta' = \dfrac{\text{tang } \beta'}{\cos \omega \mp \sin \omega \text{ tang } \alpha'}$;

(10.) $\text{tang } \xi' = \dfrac{\sin \omega \pm \text{tang } \alpha' \cos \omega}{\cos \omega \mp \sin \omega \text{ tang } \alpha'} = \text{tang } (\omega \pm \alpha')$.

4) Geschehen zwei Drehungen verschiedener Achsen nach einander, so hat man nach 1) bis 3) die entsprechenden Formeln nach einander anzuwenden. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, das beliebige sphärische Coordinatensystem rückwärts wiederum auf das zu reduciren, welches die einfachsten Gleichungen liefert, da man den Drehungswinkel so bestimmen kann, daß alle, die Einfachheit der Gleichung störenden Funktionen, sich dadurch aus der sphärischen Coordinatengleichung eliminiren lassen.

§. 4.

Polarcoordinaten.

Zieht man von dem Punkte P nach dem Anfangspunkte des sphärischen Coordinatensystems den Normalkreisbogen $= \delta$, so bildet er mit der Achse der Abscissenbogen den Winkel φ, dessen Größe zugleich mit der von δ den Punkt P der Lage nach vollkommen bestimmt; alsdann ist:

$$\left.\begin{array}{l}(1.)\ \sin \eta = \sin \delta \sin \varphi \\ (2.)\ \sin \xi = \sin \delta \cos \varphi\end{array}\right\} \text{ daraus } \frac{\sin \eta}{\sin \xi} = \text{tang } \varphi \ (3.);$$

$$\left.\begin{array}{l}(4.)\ \text{tang } \eta' = \text{tang } \delta \sin \varphi \\ (5.)\ \text{tang } \xi' = \text{tang } \delta \cos \varphi\end{array}\right\} \text{ daraus } \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang } \xi'} = \text{tang } \varphi \ (6.);$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{daraus } \dfrac{\sin \eta}{\sin \xi} = \dfrac{\text{tang } \eta'}{\text{tang } \xi'} \\ (7.)\end{array}\right.$$

Reducirt man diese Formeln auf die Raumcoordinaten, so erhält man

(8.) $\dfrac{y}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \pm \sin \varphi$;

(9.) $\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \pm \cos \varphi$;

(10.) $\dfrac{y}{x} = \text{tang } \varphi$;

welche Ausdrücke zugleich einen Kugelwinkel bestimmen, dessen Scheitel in dem sphärischen Coordinaten-Mittelpunkt, dessen einer Schenkel in der sphärischen Abscissenachse liegt, und dessen andrer Schenkel durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche geht.

Zweites Kapitel.

Vom Normalkreise auf der Kugel.

§. 1.

Allgemeine Gleichungen.

Die Gleichung einer Ebne, die durch den Anfangspunct der Raumcoordinaten geht, (1.) $AX + BY + CZ = o$, sie gehe durch den Punkt x, y, z der Kugeloberfläche, für wel (2.) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ist. Beide Gleichungen zusammen ergeben die Gleichung der Di schnittscurve, eines größten Kugelkreises. Da nun aus (2.) [nach Cap. I. §. 1. (3.)] Gleichungen $\frac{x}{z} = \text{tang } \xi'$ und $\frac{y}{z} = \text{tang } \eta'$ sich ergeben, so ist, wenn wir letztere in einsetzen:

(3). $A \text{ tang } \xi' + B \text{ tang } \eta' + C = o$, woraus

(4.) $\frac{A}{C} \text{ tang } \xi' + \frac{B}{C} \text{ tang } \eta' + 1 = o.$

Zur Bestimmung der Constanten, setzen wir in letzterer Gleichung $\text{tang } \xi' = o$, so $\text{tang } \eta' = -\frac{C}{B}$ (5.) setzen wir $\text{tang } \eta' = o$, so ist $\text{tang } \xi' = -\frac{C}{A}$ (6.);

den aus (5.) sich ergebenden constanten Werth der sphärischer Ordinatentangente setze man $\text{tang } n$, den aus (6) resultirenden constanten Werth der sphärischen Abscissentangente $= \text{tang}$ so wird aus (4.):

(7.) $\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang } m} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang } n} = 1.$ als Gleichung eines beliebigen Kugel-K malkreises durch die $\Xi' H'$-Coordinaten.

Setzt man aber [nach Cap. I. §. 1. (1.)] $x = r \sin \xi$, $y = r \sin \eta$, $z = r \cos$ in (1.) ein, so wird

(8.) $\frac{A}{C} \sin \xi + \frac{B}{C} \sin \eta + \cos \delta = o;$

und nach Obigem:

(9.) $\frac{\sin \xi}{\text{tang } m} + \frac{\sin \eta}{\text{tang } n} = \cos \delta;$ als Gleichung desselben Normalk ses durch die ΞH-Coordinaten.

Hierbei ist leicht zu entwickeln, daß $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}$ der Bogen vom Coordinatenanfang auf der Ku oberfläche an bis zum Durchschnitt des Normalkreises mit der $\left\{ \begin{matrix} \Xi \\ H \end{matrix} \right\}$-Achse des sphär. Systems

Zusatz. Geht der Normalkreis durch den Anfangspunkt der Kugelcoordinaten, so

$\left.\begin{matrix} m = o \\ n = o \end{matrix}\right\}$ durch welche besondere Werthe die Gleichungen (7.) und (9.) formlos werden. Die nähere Untersuchung dieses speciellen Falles muß also auf die Gleichungen tang $m = \frac{-C}{A}$ und tang $n = \frac{-C}{B}$ zurückgeleitet werden. Ist $\left.\begin{matrix} \text{tang } m \\ \text{tang } n \end{matrix}\right\} = o$, so wird $C = o$, also die Gleichung 3.) geht über in:

(10.) $A \text{ tang } \xi' + B \text{ tang } \eta' = o$;

so wie die Gleichung (8.) in:

(11.) $A \sin \xi + B \sin \eta = o$;

Aus beiden letztern folgt: $\frac{-A}{B} = \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang } \xi'} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi}$:

Nun ist [nach Cap. I. §. 4. (3.) u. (6.)] $\frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang } \xi'} = \frac{\sin \eta}{\sin \xi} = \text{tang } \varphi$;

Also, in (10.) und (11.) eingesetzt, wird

(12.) $\left.\begin{matrix} \text{tang } \eta' = \text{tang } \xi' \text{ tang } \varphi; \\ \sin \eta = \sin \xi \text{ tang } \varphi; \end{matrix}\right\}$ als Gleichungen eines durch den Anfangspunct der sphärischen Coordinaten gehenden Normalkreises, der mit der Abscissenachse den Winkel φ macht.

§. 2.

Andere Herleitung dieser Normalkreisgleichungen.

Eine Ellipse auf der XY-Ebne der Raumcoordinaten, deren Mittelpunct im Centrum der Kugel liegt, deren große Achse $= r$, deren kleine Achse $= b$ ist, hat als Gleichung

(1.) $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, also

(2.) $\frac{\text{tang}^2 \xi'}{r^2} + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{b^2} + \frac{1}{z^2}$; setze man nun $b = r \sin n$, so wird aus (2.)

(3.) $\text{tang}^2 \xi' + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\sin n} = \frac{r^2}{z^2} = \frac{1}{\cos \delta} = 1 + \text{tang}^2 \delta$;

also, nach Cap. I. §. 1. (4.)

und daraus: $\frac{\text{tang}^2 \eta'}{\sin^2 n} - \text{tang}^2 \eta' = 1$

oder: $\frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang } n} = \pm 1$ (4.)

d. h. die Gleichung eines Normalkreisbogens, dessen tang $m = \infty$, d. h. dessen $m = 90°$, dessen Höhe $= \pm$ tang η' ist. Der zugehörige Normalkreis geht also entweder auf der rechten oder linken Seite der Ordinatenachse auf der Kugeloberfläche durch die beiden Endpunkte der räumlichen Y-Achse. Daraus folgt:

1) Die Durchschnittscurven eines graden elliptischen Cylinders, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und dessen Erzeugun Ellipse mit der halben großen Achse = r construirt ist, — mit einer zu r gehörigen Kugeloberfläche sind zwei sich kreuzende Normalkreise, deren größ Bogenabstand zum Sinus die halbe kleine Ellipsenachse hat.

2) Die senkrechte Projection eines größten Kugelkreises, der auf Projectionsebene nicht senkrecht steht, auch nicht mit ihr zusammenfällt, stets eine Ellipse, deren große Achse = 2r, deren halbe kleine Achse = d Cosinus des Neigungswinkels der Normalkreisebne gegen die Projectio ebene, für den Radius = r ist.

3) Zwei zusammengehörige Kugelzweiecke haben stets dieselbe Ellip als senkrechte Projectionscurve auf der Ebene des durch ihre Scheitel geleg sie halbirenden Normalkreises.

§. 3.

a) Berechnung des zwischen den sphärischen Coordinatenachsen e haltenen Stückes eines Normalkreises:

Gesetzt der durch die Gleichung $\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n}} = 1$ gegebene Normalkreis habe Stück D zwischen beiden sphärischen Achsen, so ist

(1.) $\cos D = \cos m \,.\, \cos n$

also: $\frac{1}{1 + \text{tang}^2 D} = \frac{1}{(1 + \text{tang}^2 m)(1 + \text{tang}^2 n)}$; oder:

(2.) $\text{tang}^2 D = \text{tang}^2 m \text{ tang}^2 n \left(1 + \frac{1}{\text{tang}^2 m} + \frac{1}{\text{tang}^2 n}\right)$

Zusatz. Ist daher $D = 90°$, so muß tang m oder tang n unendlich groß werden, d entweder auch $m = 90°$ oder $n = 90°$, oder endlich beides zugleich.

b) Berechnung des auf dem Stücke D vom Anfangspunkte der sp rischen Coordinaten construirten senkrechten Normalkreisbogens Δ.

Der senkrechte Normalkreisbogen muß das Minimum aller Entfernungen sein, welche d größte Kreise vom Anfangspunkte der Kugelcoordinaten aus bis zu dem durch die Gleichung in a) gegebenen Normalkreise dargestellt werden, und die man allgemein durch δ bezeichnet h Nun war $\text{tang}^2 \delta = \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta'$: [nach Cap. I. §. 1.(4.)] Differentiiren wir, das Minimum zu finden, diese Gleichung, so ist:

(3.) $\text{tang } \delta \,.\, d\,(\text{tang } \delta) = \text{tang } \xi' \,.\, d\,(\text{tang } \xi') + \text{tang } \eta' \,.\, d\,(\text{tang } \eta')$;

Für $\delta = \Delta$ muß also $d\,(\text{tang } \delta) = o$ sein, folglich

(4.) $\text{tang } \xi' \,.\, d\,(\text{tang } \xi') + \text{tang } \eta' \, d\,(\text{tang } \eta') = o$;

Nun ist aber die Differentialgleichung des Normalkreises im Allgemeinen:

(5.) $\frac{d\,(\text{tang}\,\xi')}{\text{tang}\,m} + \frac{d\,(\text{tang}\,\eta')}{\text{tang}\,n} = 0$; daraus, durch Elimination der Differentiale, esultirt:

(6.) $\text{tang}\,n\,\text{tang}\,\eta' = \text{tang}\,m\,\text{tang}\,\xi'$ als Gleichung des dem Coordi=aten=Centrum nächsten Punktes.

Setzt man diese speciellen Werthe von $\text{tang}\,\xi'$ und $\text{tang}\,\eta'$ in die Gleichung $\text{tang}^2\,\Delta = \text{tang}^2\,\xi' + \text{tang}^2\,\eta'$ ein, so ist die gesuchte Gleichung:

(7.) $\text{tang}^2\,\Delta = \frac{\text{tang}^2\,m\,\text{tang}^2\,n}{\text{tang}^2\,m + \text{tang}^2\,n}$ für die kleinste Entfernung vom Coor=inaten=Centrum.

§. 4.

eber die Winkel, die der gegebene Normalkreis mit den sphärischen Coordi=natenachsen macht.

Der durch die Gleichung $\frac{\text{tang}\,\xi'}{\text{tang}\,m} + \frac{\text{tang}\,\eta'}{\text{tang}\,n} = 1$ gegebene Normalkreis schneide die härische Abscissenachse unter dem Winkel θ, die Ordinatenachse unter dem Winkel ψ, so ist $n\,\Delta : \sin\theta = \sin m : 1$ (1.), und $\sin\Delta : \sin\psi = \sin n : 1$ (2.)

un ist [nach II. §. 2. (7.)] $\pm\sin\Delta = \frac{\text{tang}\,m\,\text{tang}\,n}{\sqrt{\text{tang}^2\,m + \text{tang}^2\,n + \text{tang}^2\,m\,\text{tang}^2\,n}}$ (3.)

so [aus (1.) und (3.)]:

$$\pm\sin\theta = \frac{\text{tang}\,n\,\sqrt{1 + \text{tang}^2\,m}}{\sqrt{\text{tang}^2\,m + \text{tang}^2\,n + \text{tang}^2\,m\,\text{tang}^2\,n}}; \quad (4.)$$

$$\text{und}\ \pm\sin\psi = \frac{\text{tang}\,m\,\sqrt{1 + \text{tang}^2\,n}}{\sqrt{\text{tang}^2\,m + \text{tang}^2\,n + \text{tang}^2\,m\,\text{tang}^2\,n}}; \quad (5.)$$

Nach einer bekannten sphärischen Formel ist aber auch:

$$(6.)\ \text{tang}\,\theta = \frac{\text{tang}\,n}{\sin m} = \pm\frac{\text{tang}\,n\,\sqrt{1 + \text{tang}^2\,m}}{\text{tang}\,m}\ \text{und:}$$

$$(7.)\ \text{tang}\,\psi = \frac{\text{tang}\,m}{\sin n} = \pm\frac{\text{tang}\,m\,\sqrt{1 + \text{tang}^2\,n}}{\text{tang}\,n};$$

Da nun nach Vorigem [§. 3 (2.)] $\text{tang}\,D = \pm\sqrt{\text{tang}^2\,m + \text{tang}^2\,n + \text{tang}^2\,m\,\text{tang}^2\,n}$, ist, wegen (4.) und (5.), ferner:

$$\pm\sin\theta = \frac{\text{tang}\,n\,\sqrt{1 + \text{tang}^2\,m}}{\text{tang}\,D}\ (8.);$$

$$\text{und}\ \pm\sin\psi = \frac{\text{tang}\,m\,\sqrt{1 + \text{tang}^2\,n}}{\text{tang}\,D}\ (9).$$

§. 5.

Der Normalkreisbogen, der durch zwei feste Punkte geht, deren sph
rische Coordinaten $\left\{\begin{matrix}\alpha' & \beta' & \alpha & \beta \\ \xi' & \eta' & \xi & \eta\end{matrix}\right\}$ sind.

Die allgemeine Gleichung des Normalkreises sei

$$(1.)\quad \frac{\text{tang } \Xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } H'}{\text{tang n}} = 1$$

so muß (2.) $\left.\begin{aligned}\frac{\text{tang } \alpha'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \beta'}{\text{tang n}} &= 1 \\ \frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n}} &= 1\end{aligned}\right\}$ zugleich sein, also

$$(3.)\quad \text{tang m} = \frac{\text{tang } \alpha' \text{ tang } \eta' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi'}{\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta'} \text{ und}$$

$$(4.)\quad \text{tang n} = \frac{\text{tang } \alpha' \text{ tang } \eta' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi'}{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \xi'};$$

also in (1.) dies eingesetzt:

$$1 = \frac{\text{tang } \Xi' (\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta') + \text{tang } H' (\text{tang } \alpha' - \text{tang } \xi')}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } \eta' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi'}; \quad (5.)$$

als Gleichung eines Normalkreises, der durch zwei feste Punkte geht.

Zusatz 1. Liegen also drei Punkte $\left\{\begin{matrix}\xi' & \eta' \\ \alpha' & \beta' \\ \varrho' & \sigma'\end{matrix}\right\}$ in einem Normalkreise, so muß:

$$(6.)\quad 1 = \frac{\text{tang } \varrho' (\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta') + \text{tang } \sigma' (\text{tang } \alpha' - \text{tang } \xi')}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } \eta' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi'} \text{ sei}$$

Zusatz 2. Aus (3.) und (4.) folgt, daß

$$(7.)\quad \frac{\text{tang m}}{\text{tang n}} = \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \xi'}{\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta'} \text{ sei.}$$

Liegen also drei Punkte in demselben Normalkreise, so ist für dieselben auch:

$$(8.)\quad \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \xi'}{\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta'} = \frac{\text{tang } \varrho' - \text{tang } \xi'}{\text{tang } \eta' - \text{tang } \sigma'} = \frac{\text{tang } \varrho' - \text{tang } \alpha'}{\text{tang } \beta' - \text{tang } \sigma'}.$$

§. 6.

Die Entfernung zweier festen Punkte auf der Kugeloberfläche.

Das Stück des durch 2 Punkte $\left\{\begin{matrix}\alpha' & \beta' \\ \xi' & \eta'\end{matrix}\right\}$ gehenden Normalkreises zwischen diesen Pu
sei $= R$, so ist, wenn man die dazu gehörige gradlinige Sehne $= S$ nennt, nach der An
im Raume:

(1.) $S = 2r \sin \frac{R}{2} = \pm \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, wenn $\begin{Bmatrix} x, y, z \\ a, b, c \end{Bmatrix}$ die Coordinaten von $\begin{Bmatrix} \xi' & \eta' \\ \alpha' & \beta' \end{Bmatrix}$ sind; also:

(2.) $2 - 2 \cos R = (\sin \xi - \sin \alpha)^2 + (\sin \eta - \sin \beta)^2 + (\cos \delta - \cos \delta')^2$

[wo δ die Entfernung des Punkts $\xi\ \eta$, δ' die Entfernung des Punkts $\alpha\ \beta$ vom sphärischen Coordinaten-Centrum bezeichnet.]

Nun ist aber $\begin{Bmatrix} \sin \xi = \cos \delta \operatorname{tang} \xi' \\ \sin \alpha = \cos \delta \operatorname{tang} \alpha' \end{Bmatrix}$ ꝛc.; also:

$2 - 2 \cos R = \cos^2 \delta' (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha' + \operatorname{tang}^2 \beta') + \cos^2 \delta (1 + \operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta')$
$- 2 \cos \delta \cos \delta' (\operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \xi' + \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \eta' + 1)$,

woraus sich herleiten läßt:

(3.) $\cos R = \cos \delta \cos \delta' (1 + \operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \xi' + \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \eta')$; oder:

(4.) $$\cos R = \frac{1 + \operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \xi' + \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \eta'}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha' + \operatorname{tang}^2 \beta'} \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta'}}$$

(5.) $$\sin^2 R = \frac{(\operatorname{tang} \xi' - \operatorname{tang} \alpha')^2 + (\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} \beta')^2 + (\operatorname{tang} \eta' \operatorname{tang} \alpha' - \operatorname{tang} \xi' \operatorname{tang} \beta')^2}{(1 + \operatorname{tang}^2 \alpha' + \operatorname{tang}^2 \beta')(1 + \operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta')}$$;

Zusatz 1. Ist $R = 90°$, mithin $\cos R = o$, so ist demgemäß [nach (3.)]:

(6.) $1 + \operatorname{tang} \alpha' \operatorname{tang} \xi' + \operatorname{tang} \beta' \operatorname{tang} \eta' = o$;

welche Gleichung also zwischen jedem Paare von Punkten besteht, die auf der Kugel um 90° auseinander liegen.

Zusatz 2. Ist $\begin{Bmatrix} \alpha' = o \\ \beta' = o \end{Bmatrix}$, so liegt R mit dem einen Endpunkte im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten: alsdann ist $\sin^2 R = \frac{\operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta'}{1 + \operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta'} = \sin^2 \delta$, also dann $R = \delta$ oder $R = 180 - \delta$; wie nach der Annahme zu erwarten war.

§. 7.

Der Winkel, den zwei Normalkreise bilden.

Zieht man in einer beliebigen Richtung von dem Mittelpunkte der Kugel zwei Radien, deren Gleichungen sind:

(1.) $\begin{Bmatrix} x = Mz \\ y = Nz \end{Bmatrix}$ und

(2.) $\begin{Bmatrix} x' = M' z' \\ y' = N' z' \end{Bmatrix}$, so treffen diese die Kugel in den beiden Punkten, deren sphärische Gleichungen sind (3.) $\begin{Bmatrix} \operatorname{tang} \xi' = M \\ \operatorname{tang} \eta' = N \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} \operatorname{tang} \alpha' = M' \\ \operatorname{tang} \beta' = N' \end{Bmatrix}$ (4.)

diese letztern Punkte haben, als ihre Normalentfernung, zwischen sich den Bogen V, der zugleich das Maaß für den von den beiden Radien gebildeten Centriwinkel v ist.

Nach II. §. 6. (4.) ist also:

$$(5.)\quad \cos V = \cos v = \frac{1 + M M' + N N'}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}\,\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}};$$

bestimmt man nun einen dritten Punkt auf der Kugel so, daß er von jedem der Punkte in (3 und (4.) um 90° entfernt ist, [nach II. §. 6. (6.)] so bilden die 2 Verbindungs-Normalbog zwischen ihm und den beiden ersten Punkten mit einander einen sphärischen Winkel v dessen Maaß ebenfalls $V = v$ ist; also auch für diesen sphärischen Winkel v' muß

$$(6.)\quad \cos v' = \cos V = \frac{1 + M M' + N N'}{\sqrt{1 + M^2 + N^2}\,\sqrt{1 + M'^2 + N'^2}} \text{ sein.}$$

Um nun M, N, M', N', durch Ausdrücke dieser Winkel einschließenden Normalkreise bestimmen, muß man den Scheitelpunkt des sphärischen Winkels finden, der von ξ', η' u α', β' um 90° entfernt sein soll. Es ist aber, wenn seine Kugelcoordinaten t', u' sind:

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{l} 1 + M \operatorname{tang} t' + N \operatorname{tang} u' = o \\ 1 + M' \operatorname{tang} t' + N' \operatorname{tang} u' = o \end{array}\right\} \text{ nach II. §. 6. (4.)}$$

$$\text{also } \operatorname{tang} t' = \frac{N' - N}{M'N - MN'} \text{ (8.) und } \operatorname{tang} u' = \frac{M - M'}{M'N - MN'} \text{ (9.)}$$

Nun ist aber auch:

$$(10.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{tang} t'}{\operatorname{tang} m} + \dfrac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} n} = 1 \\ \dfrac{\operatorname{tang} t'}{\operatorname{tang} m'} + \dfrac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} n'} = 1; \end{array}\right\}$$

als Gleichungen der beiden Normalkrei die (als Schenkel des sphärischen Winke von t', u' ausgehen, folglich muß [n (7.) und (10.)]:

$$(11.)\quad \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{1}{\operatorname{tang} m} = M; & -\dfrac{1}{\operatorname{tang} m'} = M'; \\ -\dfrac{1}{\operatorname{tang} n} = N; & -\dfrac{1}{\operatorname{tang} n'} = N'; \end{array}\right\}$$

sein, so daß also [mit Hi von (8.) und (9.)] endlich gefunden wird:

$$(12.)\quad \cos v' = \frac{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} m'} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} n \operatorname{tang} n'}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 m} + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 n}}\,\sqrt{1 + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 m'} + \dfrac{1}{\operatorname{tang}^2 n'}}};$$

und (13.)

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tang} t' = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tang} n} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} n'}}{\dfrac{1}{\operatorname{tang} m' \operatorname{tang} n} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n'}} = \operatorname{tang} m \operatorname{tang} m' \dfrac{\operatorname{tang} n' - \operatorname{tang} n}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n' - \operatorname{tang} n \operatorname{tang}} \\ \operatorname{tang} u' = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tang} m'} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} m}}{\dfrac{1}{\operatorname{tang} m' \operatorname{tang} n} - \dfrac{1}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n'}} = \operatorname{tang} n \operatorname{tang} n' \dfrac{\operatorname{tang} m - \operatorname{tang} m'}{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} n' - \operatorname{tang} n \operatorname{tang}} \end{array}\right.$$

obei also t′ und u′ die sphärischen Coordinaten des Winkelscheitels, $\left\{\begin{matrix} \text{m u. n} \\ \text{m′ u. n′} \end{matrix}\right\}$ die Stücken der oordinaten-Achsen bis zum Coordinaten-Centrum sind, welche die Schenkel darauf abschneiden.

§. 8.

Zusätze.

Zusatz 1. Die beiden unter (13.) aufgestellten Gleichungen geben zugleich die Bestimmung des Durchschnittspunktes zweier gegebener Normalkreise

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n}} &= 1 \\ \frac{\text{tang } \alpha'}{\text{tang m′}} + \frac{\text{tang } \beta'}{\text{tang n′}} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{untereinander an.}$$

Zusatz 2. Sind also zwei in Zusatz 1. bezeichnete Normalkreise auf einander nkrecht, so muß $\cos v' = o$, also

$$(14.)\quad 0 = 1 + \frac{1}{\text{tang m tang m′}} + \frac{1}{\text{tang n tang n′}} \text{ sein.}$$

Zusatz 3. Wenn zwei Normalkreise **II.** und **III.**, der $\left\{\begin{matrix} \text{erste} \\ \text{andere} \end{matrix}\right\}$ mit den Achsenabschnitten $\begin{matrix} \text{m′ n′} \\ \text{m″ n″} \end{matrix}\Big\}$ auf demselben Normalkreise **I** senkrecht stehen, so ist:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\text{tang m tang m′}} + \frac{1}{\text{tang n tang n′}} + 1 &= 0 \\ \frac{1}{\text{tang m tang m″}} + \frac{1}{\text{tang n tang n″}} + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

glich auch $\dfrac{\text{tang m″} - \text{tang m′}}{\text{tang m tang m′ tang m″}} + \dfrac{\text{tang n″} - \text{tang n′}}{\text{tang n tang n′ tang n″}} = o$ (15.)

Der Durchschnittspunkt von den Normalkreisen **II.** und **III.** sei durch die sphärischen Coordinaten a′, b′, gegeben, so ist, [nach (13.)]:

$$\text{tang a′} = \frac{\text{tang m′ tang m″ (tang n″} - \text{tang n′)}}{\text{tang m′ tang n″} - \text{tang m″ tang n′}}$$

$$\text{tang b′} = \frac{-\text{tang n′ tang n″ (tang m″} - \text{tang m′)}}{\text{tang m′ tang n″} - \text{tang m″ tang n′}}$$

o ist, [dies in (15.) eingesetzt]:

$$\frac{\text{tang a′}}{\text{tang n}} = \frac{\text{tang b′}}{\text{tang m}} \quad (16.)$$

Diese Gleichung zwischen a′ und b′ ist aber nicht abhängig von den Abschnitten der einen Normalkreise **II** und **III.** ꝛc., sondern richtet sich allein nach der Lage des Normalkreises **I.**

Sie gilt daher für alle Durchschnittspunkte a'', b'' ꝛc. zwischen ähnlichen Normalkreisen wie I und III, folglich auch für den einen, der durch das Coordinaten-Centrum auf der Kugel geh Dieser aber bildet mit der sphärischen Abscissenachse einen Winkel φ, der durch die Gleichun [Cap. II. §. 1. (12.)] $\text{tang } \varphi = \frac{\text{tang } H'}{\text{tang } \Xi'}$ bestimmt wird. Schneidet dieser den Kreis I. in de Punkte, dessen sphärische Coordinaten ξ' η' sind, so ist [nach Cap. II. §. 3. (6.)] $\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang n}} = \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang m}}$

Folglich ist $\frac{\text{tang n}}{\text{tang m}} = \frac{\text{tang a}'}{\text{tang b}'} = \frac{\text{tang a}''}{\text{tang b}''}$ ꝛc. $= \frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang } \eta'}$; d. h. Alle die Punkte a', b', a' b'', ꝛc. ξ' η' liegen auf demselben Normalkreise, der durch das Coordinaten-Centrum geht, ur auf I. senkrecht steht. Nach Voraussetzung lagen aber die Punkte a' b', a'' b'' ꝛc. auch auf d übrigen Normalkreisen II. und III. ꝛc., die nicht durch das Coordinaten-Centrum auf der Kug gehn: folglich fallen, um den Widerspruch zu lösen, alle Punkte a' b', a'' b'' in den einen a' b' zusammen, d. h. alle auf dem Normalkreise I. senkrechten No malkreise schneiden sich in demselben Punkte, dessen Gleichung in (16.) angeg ben ist.

Zusatz 4. Wenn die Normalkreise II. und III. auf dem Normalkreise I. senkrecht stehe und zwischen sich den Bogen Δ des letztern haben, so ist nach bekannter Formel:

(17.) $\cos S = \cos S' \cos \Delta$;

wobei S und S' die Größe der Bogen II. und III. von I. an bis zu ihrem Durchschnittspunk bezeichnet. Nun ist aber auch

(18.) $\cos S' = \cos S \cos \Delta$;

beide Gleichungen (17.) und (18.) können aber, bei der beliebigen Größe von Δ, nur dann z gleich bestehen, wenn zugleich $\left\{\begin{matrix}\cos S = o \\ \cos S' = o\end{matrix}\right\}$, also $S = S' \left\{\begin{matrix}= 90° \\ = 270°\end{matrix}\right\}$ ist. Daher schne den sich zwei auf einem dritten senkrechten Normalkreise in zwei entgegeng setzten Punkten der Kugel, die zu dem Normalkreise, auf dem jene senkrech sind, als Pole gehören.

§. 9.

Verhältniß eines Normalkreises zu seinen Polen a' b' und a'' b''.

Wenn die Gleichung eines Normalkreises allgemein diese ist:

(1.) $\frac{\text{tang } \Xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } H'}{\text{tang n}}$ so ist jeder seiner Pole durch die Gleichungen gegeber

(2.) $\left\{\begin{matrix}1 + \text{tang a}' \text{ tang } \Xi' + \text{tang b}' \text{ tang } H'; \\ 1 + \text{tang a}'' \text{ tang } \Xi' + \text{tang b}'' \text{ tang } H';\end{matrix}\right.$

Denn nach Cap. II. §. 6. (6.) sind die unter (2.) angegebenen Gleichungen solchen Punkte eigen, die um 90° von einander abstehen, was auch die Eigenthümlichkeit des Pols ausmach

Also ist, durch Vergleichung von (1.) und (2.)

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{tang } a' = \dfrac{-1}{\text{tang } m}\,;\ \text{tang } b' = \dfrac{-1}{\text{tang } n}\,; \quad \text{also } a' = 90^\circ + m \\ \text{tang } a'' = \dfrac{-1}{\text{tang } m}\,;\ \text{tang } b'' = \dfrac{-1}{\text{tang } n}\,; \quad a'' = 270^\circ + m \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b' = 90^\circ + n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b'' = 270^\circ + n \end{array}\right\}$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus Cap. II. §. 7. (11.), wo zu zwei Punkten ein ter, von jedem um 90° abstehender gesucht wurde; derselbe Fall ist hier nur allgemeiner, für lle Punkte eines Normalkreises, aufgefaßt.

Hat man nun noch einen zweiten Normalkreis

$$(4.)\quad \frac{\text{tang } U'}{\text{tang } m'} + \frac{\text{tang } V'}{\text{tang } n'} = 1$$

nd dessen Pole sind $\alpha'\ \beta'$ und $\alpha''\ \beta''$, so ist auch für diesen

$$\text{tang } \alpha' = \frac{-1}{\text{tang } m'}\,;\ \text{tang } \beta' = \frac{-1}{\text{tang } n'}\,;$$

$$\text{tang } \alpha'' = \frac{-1}{\text{tang } m'}\,;\ \text{tang } \beta'' = \frac{-1}{\text{tang } n'}\,;$$

Nun ist der Winkel v' zwischen den beiden Normalkreisen bestimmt durch

$$\cos v' = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang } m \text{ tang } m'} + \dfrac{1}{\text{tang } n \text{ tang } n'}}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang}^2 m} + \dfrac{1}{\text{tang}^2 n}}\ \sqrt{1 + \dfrac{1}{\text{tang}^2 m'} + \dfrac{1}{\text{tang}^2 n'}}}\,;$$

ach Cap. II. §. 7. (12.)] also ist auch:

$$\cos v' = \frac{1 + \text{tang } a' \text{ tang } \alpha' + \text{tang } b' \text{ tang } \beta'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 a' + \text{tang}^2 b'}\ \sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha' + \text{tang}^2 \beta'}}\,;$$

Diese Formel ist aber [nach Cap. II. §. 6. (4.)] zugleich der Ausdruck für cos R, wenn die Entfernung von a' b' und $\alpha'\ \beta'$ angiebt. Daraus folgt:

Die Bogenentfernung zweier gleichartiger Pole ist zugleich auch das aaß für die Größe des von den beiden zugehörigen Normalkreisen gebildeten inkels; und umgekehrt.

§. 10.

rspectivische Projectionen vom Kugel-Centrum aus auf eine Tangentenebene.

Die hier entwickelten Gleichungen des Normalkreises, der Senkrechten, des Winkels auf der gel u. s. w. lassen sich auch noch durch ein anderes Projectionsverfahren aus der Raum-Ana- s herleiten, nämlich durch Projectionsstrahlen vom Mittelpunkt der Kugel nach einer Tangenten-

ebene, welche an den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten, (also an das Ende der räum lichen Z-Achse) gelegt wird. Durchläuft nämlich das Ende des durch das Kugel-Centrum gelegten Projectionsstrahls (den wir Leitstrahl nennen wollen) auf der Ebne eine Gerade so schneidet er die Kugeloberfläche in einem zugehörigen größten Kreise, dessen Gleichung mit der der Geraden im Zusammenhange stehen muß.

Geht ein Leitstrahl durch der Punkt x' y' z' der mit der XY-Ebene parallel laufende Tangentenebene, so ist, wegen des Abstands r (Kugelradius) beider Ebenen, das z' jenes Punktes stets constant, nämlich = r, so daß alle Linien der Tangentenebene nur durch x' y' ausgedrück zu werden brauchen. Zu dem Punkte x' y' z' gehört also auf der Kugel ein zweiter x y z durch folgende Gleichungen zu bestimmen:

(1.) $y' = \frac{y}{\cos \delta}$ und (2.) $x' = \frac{x}{\cos \delta}$, wenn δ die alte Bedeutung behält, de Bogenabstand des Punkts x y z der Kugeloberfläche von dem Anfangspunkte der sphärische Coordinaten (zugleich dem Berührungspunkte zwischen Ebne und Kugel) zu bezeichnen. D aber $y = r \sin \eta$ und $x = r \sin \xi$ war, so ist [nach I. §. 1. (1.) und (5.)]

(3.) $x' = r \operatorname{tang} \xi'$ und (4.) $y' = r \operatorname{tang} \eta'$; durch welche beiden Gleichunge die Verwandtschaft der projicirten ebnen Figur mit ihren Kugelprojectionen leicht zur Darstellur zu bringen ist. Durch diese Art der Ableitung der sphärischen Figuren aus den ebnen gewinn man außer an der Leichtigkeit des Uebergangs in die entsprechenden Gleichungen auch daran, de man nun jede sphärische Formel leicht in die entsprechende ebne reduciren kann, indem m den Kugelradius = ∞ annimmt, d. h. die Kugeloberfläche mit der Tangentenebene vertausch

So sind z. B. die Formeln

$\frac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1$ und $\frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$ auf diese Weise unter sich verwandt, denn m braucht nur $\left\{ \begin{array}{l} y' = r \operatorname{tang} \eta' \text{ und } n' = r \operatorname{tang} n \\ x' = r \operatorname{tang} \xi' \text{ und } m' = r \operatorname{tang} m \end{array} \right\}$ zu setzen, um eine in die andere überge zu lassen.

§. 11.

Senkrechte Bogenentfernung eines Punkts auf der Kugel von einem gegebenen Normalkreise.

Es sei der Normalkreis durch die Gleichung gegeben,

(1.) $\frac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1$

wenn der Fußpunkt des senkrechten Bogens $\xi' \eta'$ ist; der Ausgangspunkt des letztern sei a', dann ist, wenn die Achsenabschnitte desselben m' und n' sind, [nach Cap. II. §. 7. (14.)]

(2.) $\frac{1}{\text{tang m tang m}'} + \frac{1}{\text{tang n tang n}'} + 1 = o$ wegen der senkrechten Lage;

e Punkte $\xi' \eta'$ und $\alpha' \beta'$ sind untereinander verbunden, daher ist [nach Cap. II. §. 5. (3.)
d (4.)]

(3.) $$\begin{cases} \text{tang m}' = \dfrac{\text{tang } \alpha' \text{ tang } \eta' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi'}{\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta'} \\ \text{tang n}' = \dfrac{\text{tang } \alpha' \text{ tang } \eta' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi'}{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \xi'} \end{cases};$$

d [nach Cap. II. §. 6. (5.)]:

( ) $\sin R = \sqrt{\dfrac{(\text{tang } \xi' - \text{tang } \alpha')^2 + (\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta')^2 + (\text{tang } \eta' \text{ tang } \alpha' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi')^2}{(1 + \text{tang}^2 \alpha' + \text{tang}^2 \beta')(1 + \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta')}}$;

nn R die Entfernung von $\alpha' \beta'$ und $\xi' \eta'$ bedeutet: also aus (3.) und (4.), wenn wir, zur
Kürzung, $(\text{tang } \eta' \text{ tang } \alpha' - \text{tang } \beta' \text{ tang } \xi')^2 = Z^2$ nennen:

( ) $\sin R = \dfrac{Z}{\sqrt{(1+\text{tang}^2\alpha'+\text{tang}^2\beta')(1+\text{tang}^2\xi'+\text{tang}^2\eta')}} \sqrt{\left(\frac{1}{\text{tang m}'}\right)^2 + \left(\frac{1}{\text{tang n}'}\right)^2 + 1}$;

n ist aber aus (2.) und (3.)

(6.) $$Z = -\left[\frac{\text{tang } \eta' - \text{tang } \beta'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \xi'}{\text{tang n}}\right].$$

Dies in (5.) eingesetzt, erhält man eine, durch die Coordinaten der beiden Punkte und
Achsenabschnitte der beiden Linien ausgedrückte Gleichung, die die senkrechte Entfernung des
nkts $\alpha' \beta'$ von der Linie (1.) ausdrückt.

Drittes Kapitel.

Von den Kurven zweiten Grades auf der Kugel.

I. Der Kreis.

§. 1.

Ueber die Herleitung der Gleichung aus sphärischen Formeln.

Die Formel für die Entfernung zweier festen Punkte auf der Kugel ist [nach Cap. II. §. 6.]

$$\cos R = \frac{1 + \text{tang } \alpha' \text{ tang } \xi' + \text{tang } \beta' \text{ tang } \eta'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha' + \text{tang}^2 \beta'}\ \sqrt{1 + \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta'}};$$

daraus (1.) $\text{tang}^2 R$

$$= \frac{(\text{tang}\,\xi' - \text{tang}\,\alpha')^2 + (\text{tang}\,\eta' - \text{tang}\,\beta')^2 + (\text{tang}\,\eta'\,\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\xi'\,\text{tang}\,\beta')^2}{(1 + \text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\xi' + \text{tang}\,\beta'\,\text{tang}\,\eta')^2};$$

nimmt man nun den Punkt $\alpha'\ \beta'$ als fest an, während der Punkt $\xi'\ \eta'$ sich um denselben stets gleicher Entfernung $= R$ herumbewegt, so beschreibt letzterer auf der Kugel einen Kre mit dem Bogen R als Radius und obige Gleichungen sind daher zugleich die des Kreis

Zusatz a.) Wird $R = 90°$, so ist $\left\{ \begin{matrix} \cos R = o \\ \text{tang}\,R = \infty \end{matrix} \right\}$, also wird

(2) $1 + \text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\xi' + \text{tang}\,\beta'\,\text{tang}\,\eta' = o;$

als Gleichung eines Normalkreises, dessen Pol $\alpha'\ \beta'$ ist. [f. Cap. II. §. 9.]

b) Wird $R = 180 - r$, so ist $180° - R = r$

$$(3.)\ \cos R = -\cos r = \frac{1 + \text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\xi' + \text{tang}\,\eta'\,\text{tang}\,\beta'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2\,\alpha' + \text{tang}^2\,\beta'}\ \sqrt{1 + \text{tang}\,\xi' + \text{tang}\,\eta'}}$$

Erhebt man aber diese Formel auf das Quadrat, so verschwindet das negative Zeichen und m erhält eine der frühern identische Kreisformel. Das negative Cosinuszeichen bei r deutet at darauf hin, daß dieser Kreis dem früher durch R bestimmten diametral entgege liege [cf. Cap. I. §. 2. 3.)], daß also zweier diametral-conjugirten Kugelkrei Bogenhalbmesser sich wie Supplemente verhalten, wenn man beide aus de selben Centrum construirt.

c) Wird $\left\{ \begin{matrix} \alpha' = o \\ \beta' = o \end{matrix} \right\}$, d. h. liegt der Mittelpunkt des Kugelkreises im Anfangspun der sphärischen Coordinaten, so wird: [nach Cap. II. §. 1. (2.) und (4.)]

(4.) $\text{tang}^2\,R = \text{tang}^2\,\xi' + \text{tang}^2\,\eta'$ und

(5.) $\sin^2 R = \sin^2 \xi + \sin^2 \eta$, die Gleichung des zugehörigen Kreises, ausgedrü

durch die $\left\{ \begin{matrix} \Xi', & H'_z \\ \Xi, & H_z \end{matrix} \right\}$ Coordinaten.

§. 2.

Herleitung der Kreisgleichung mit Hülfe der senkrechten Projection.

a.) Hat man im Mittelpunkte der Kugel das [in Cap II. §. 1. (cf. Cap. I. §. 1.) e wähnte] räumliche 3-achsige Coordinatensystem, und beschreibt auf einer Achsenebne, z. B. d der XY-Ebne vom Centrum der Coordinaten aus einen Kreis mit dem Radius R, so ist

(1.) $R^2 = x^2 + y^2$. Da aber bei der senkrechten Projection dieses Kreises auf d Oberfläche der Kugel, $R = r \sin \varphi$, und $x = r \sin \xi$, $y = r \sin \eta$ wird [Cap. I. §. 1.), so

(2.) $\sin^2 \varphi = \sin^2 \xi + \sin^2 \eta$, woraus folgt [nach §. 1. Zusatz c) (5.)]:

daß ein gerader Cylinder, dessen Basis ein Kreis ist, die Kugeloberfläche

nem Kugelkreise schneiden müsse, wenn die Achse des Cylinders durch das ugelcentrum geht.

b.) Nehmen wir an, der Kugelkreis sei mit dem Radius R auf der sphärischen Y-Achse so schrieben, daß seine Peripherie durch den Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten geht, so wird, nn die Coordinaten des Mittelpunkts sind $\left\{ \begin{matrix} \alpha' = 0 \\ \beta' = b' \end{matrix} \right\}$, auch $R = b'$, folglich ist [nach p. III. §. 1. (1.)]

$$\text{tang}^2\, b' = \frac{\text{tang}^2\, \xi' + (\text{tang}\, \eta' - \text{tang}\, b')^2 + \text{tang}^2\, \xi'\, \text{tang}^2\, b'}{(1 + \text{tang}\, b'\, \text{tang}\, \eta')^2}$$

endet man darauf die Formeln an: $\text{tang}\, b' = \frac{b}{c}$, $\text{tang}\, \xi' = \frac{x}{z}$, $\text{tang}\, \eta' = \frac{y}{z}$, [wo b, c, x, y, z räumlichen Coordinaten derselben Punkte auf der Kugel bedeuten], so erhält man:

$$(1.)\quad \frac{b^2}{c^2} = \frac{x^2\,(b^2 + c^2) + (cy - bz)^2}{(cz + by)^2} = \frac{r^2\, x^2 + (cy - bz)^2}{(cz + by)^2};$$

t man diese Gleichung auf, so erhält man endlich:

$$(2.)\quad b^2\, y^2 + c^2\, z^2 + 2\, bcyz = c^2\, r^2 = (by + cz)^2$$

also: (3.) $by + cz = cr$, d. h. die Gleichung einer geraden Linie auf der YZ-bene: legt man durch dieselbe eine Ebne, welche zugleich durch den Anfangs-nkt der sphärischen Coordinaten geht, so schneidet diese die Kugeloberfläche jenem Kreise, dessen Gleichung oben angeführt worden ist.

twickeln wir aber die Gleichung (3.) nur für x und z, so erhält man

$$(4.)\quad x^2 + \frac{r^2}{b^2}\, z^2 - \frac{2\, c^2\, r}{b^2}\, z + \frac{r^2\,(c^2 - b^2)}{b^2} = o,$$ als die allgemeinste eichung einer Ellipse in der XZ-Ebne, deren große Achse in der Richtung der räumlichen sciſſenachse, nicht aber mit dieser zusammenfällt, und deren Mittelpunkt außerhalb des Anfangs-nktes der räumlichen Coordinaten ist, deren kleine Achse endlich auf der Z-Achse liegt und im fangspunkte der sphärischen Coordinaten endet.

Daraus folgt, daß ein elliptischer Cylinder, dessen Basis obige Ellipse der xz-Ebene ist, wenn er auf dieser Ebene senkrecht steht, die Kugelober-iche in einem Kugelkreise schneidet.

Aehnlich wird die Gleichung (3.) für x, y entwickelt, eine andre Ellipsen-Gleichung ischen diesen Coordinaten von der Form:

$$(5.)\quad x^2 + \frac{r^2}{c^2}\, y^2 - \frac{2\, br}{c}\, y = o,$$ zu einer Ellipse gehörig, deren Mittelpunkt eben-s nicht im Coordinaten-Centrum des räumlichen Systems liegt, deren eine Achse aber (die ne) mit einem ihrer Endpunkte in dieses Centrum fällt und zugleich mit der Y-Achse der aden Coordinaten coincidirt, während die große Achse der X-Achse desselben Systems parallel

läuft. Auch ein durch diese Ellipse gehender grader Cylinder schneidet die K geloberfläche in einem Kugelkreise.

Man kann also im Allgemeinen sagen:

Jeder Kugelkreis hat zur senkrechten Projection

aa) entweder eine gerade Linie,

bb) oder einen Kreis, [cf. (a)]

cc) oder eine Ellipse [cf. (b.) und (c.)].

§. 3.

Herleitung der Kreisgleichung aus der perspectivischen Projection.

Nach dem im Cap. II. §. 10. angedeuteten Verfahren erhält man die Gleichung eines bel bigen Kugelkreises auch als perspectivische Projection eines auf einer Tangentenebne aus de Berührungspunkte (als dem Centrum) construirten Kreises. Dessen Gleichung ist nämlich

(1.) $x^2 + y^2 = \varrho^2$; da nun $x = r \operatorname{tang} \xi'$, $y = r \operatorname{tang} \eta'$, $\varrho = r \operatorname{tang}$ so wird die Gleichung (1.) zu der folgenden:

(2.) $\operatorname{tang}^2 \xi' + \operatorname{tang}^2 \eta' = \operatorname{tang}^2 R$.

Daraus folgt:

Jeder sphärische Kreis kann als Durchschnittscurve der Kugelfläche m einem graden Kegel angesehen werden, dessen Spitze im Centrum der Kug liegt, dessen kreisförmige Grundfläche aber in ihrem Mittelpunkte die Kug berührt.

Da aber auch Kegel mit elliptischer Basis kreisförmige Durchschnittscurven mit bes ders geneigten Ebnen ergeben können, so können diese auch in solchen Fällen auf der Kugeloberflä sphärische Kreise abgränzen, wenn nämlich die Ebne jedes Kreisschnitts mit der eben erwähn Kegelschnitt-Ebne zusammenfällt. Wir wollen zeigen, wie auch dies aus den analytischen E wickelungen leicht folgt.

Gesetzt, auf der Tangentenebene, welche die auf der Kugeloberfläche zu projicirende Fi enthält, sei eine Ellipse verzeichnet, deren Coordinatencentrum im Berührungspunkte der Ele mit der Kugel liegt, und die Y-Achse sei in der YZ-Ebne des räumlichen Coordinatensyste gelegen, so ist die Gleichung dieser Ellipse im Allgemeinen:

(3.) $a^2 x^2 = 2 ab^2 y - b^2 y^2$;

wäre die Projection dieser Ellipse ein Kugelkreis, so müßte dieser folgende Gleichung haben

$$(4.)\ \operatorname{tang}^2 R = \frac{\operatorname{tang}^2 \xi' + (\operatorname{tang} \eta' - \operatorname{tang} R)^2 + \operatorname{tang}^2 \xi' \operatorname{tang}^2 R'}{(1 + \operatorname{tang} R \operatorname{tang} \eta')^2}$$

[cf. Cap. III. §. 1. (1.); worin die Coordinaten des Centrums $\left\{ \begin{matrix} \alpha' = o \\ \beta' = R \end{matrix} \right\}$ gesetzt werden müss

Entwickeln wir die Gleichung (4.) in derselben Form, wie (3.), so ergeben sich, nachdem $\left.\begin{array}{l} x = r \text{ tang } \xi' \\ y = r \text{ tang } \eta' \end{array}\right\}$ gesetzt worden ist, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (5.)\ a = \dfrac{r \text{ tang } R}{1 - \text{tang}^2 R} \\ \text{und} \quad (6.)\ \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{1}{1 - \text{tang}^2 R} \end{array}\right\} \text{ also } (7.)\ b = \frac{r \text{ tang } R}{\sqrt{1 - \text{tang}^2 R}};$$

erden diese Bedingungen durch die Gleichungen der Ellipsenelemente erfüllt, so ist die Pro- ction einer solchen Ellipse auf der Tangentenebne ebenfalls ein Kugelkreis:

§. 4.

Die Tangente an den Kugelkreis.

Der größern Einfachheit wegen nehmen wir an, der Mittelpunkt des mit dem Bogenradius l beschriebenen Kugelkreises liege im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten; so wird seine (leichung [nach Cap. III. §. 1. (4.)]

$$(1.)\ \text{tang}^2 R = \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta';$$

Ein Normalkreis gehe durch den speciellen Punkt $\xi'\ \eta'$ dieses Kreises, so ist seine Gleichung:

$$(2.)\ \frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang } m} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang } n} = 1$$

is beiden Gleichungen eliminire man tang η', so erhält man die quadratische Gleichung für tang ξ'

$$(3.)\ o = \text{tang}^2 \xi' - \frac{2 \text{ tang } m \text{ tang}^2 n}{\text{tang}^2 m + \text{tang}^2 n} \text{ tang } \xi' + \frac{\text{tang}^2 m (\text{tang}^2 n - \text{tang}^2 R)}{\text{tang}^2 m + \text{tang}^2 n}$$

i der Lösung:

$$(4.)\ \text{tang } \xi' =$$

$$\frac{\text{g } m \text{ tang}^2 n}{\text{g}^2 m + \text{tang}^2 n} \pm \sqrt{\frac{\text{tang}^2 m \text{ tang}^4 n - \text{tang}^2 m (\text{tang}^2 n - \text{tang}^2 R)(\text{tang}^2 m + \text{tang}^2 n)}{(\text{tang}^2 m + \text{tang}^2 n)^2}}$$

doppelte Werth für tang ξ', der durch das doppelte Vorzeichen der Wurzel bedingt wird, tet auf einen zwiefachen Punkt der Gemeinschaft zwischen Normalkreis und gelkreis, d. h. beide schneiden sich im Allgemeinen in zwei Punkten; soll aber s Schneiden in ein Berühren übergehn, so muß dieser Doppelwerth von tang ξ' zu m einfachen werden, d. h. die Wurzel mit $\pm$ muß $= 0$ werden. Daraus entspringt also gende Relation im Fall der Berührung zwischen m, n und R:

$$(5.)\ \text{tang}^2 R = \frac{\text{tang}^2 m \text{ tang}^2 n}{\text{tang}^2 m + \text{tang}^2 n};$$

Diese Gleichung ist aber [nach Cap. II. §. 3. (7.)] die der kleinsten Entfernung des angspunkts der sphärischen Coordinaten von der Linie (2.), d. h. die Gleichung der nkrechten auf letzterer, woraus gefolgert werden darf:

daß die Tangentenlinie in $\xi'\ \eta'$ an den mit R construirten Kugelkreis, se
recht auf dem nach $\xi'\ \eta'$ gezogenen Kreisradius steht.

In dem Falle der Berührung wird aber ferner:

$$(6.)\ \text{tang}\ \xi' = \frac{\text{tang m tang}^2\ \text{n}}{\text{tang}^2\ \text{m} + \text{tang}^2\ \text{n}};$$

$$(7.)\ \text{tang}\ \eta' = \frac{\text{tang}^2\ \text{m tang n}}{\text{tang}^2\ \text{m} + \text{tang}^2\ \text{n}};$$

als Gleichungen zur Bestimmung des Berührungspunkts.

Es ist nur noch übrig, die Gleichung des berührenden Normalkreises für den Punkt ξ'
zu finden: nun ist aber:

$$(8.)\ \frac{\text{tang}\ \Xi' - \text{tang}\ \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang}\ H' - \text{tang}\ \eta'}{\text{tang n}} = o$$

die Gleichung des durch $\xi'\ \eta'$ gehenden Normalkreises.

Nach (6.) und (7.) wird ferner:

$$(9.)\ \text{tang}\ \xi'\ \text{tang m} = \text{tang}\ \eta'\ \text{tang n}$$

daher: $(10.)\ \text{tang}\ \Xi'\ \text{tang}\ \xi' + \text{tang}\ H'\ \text{tang}\ \eta' = \text{tang}^2\ \text{R}$ die gesuchte Tangent
gleichung für den Kreis, dessen Centrum in dem Anfangspunkte der sphärisch
Coordinaten liegt.

§. 5.

Herleitnng der Tangentengleichung aus der perspectivischen Projection.

Die Bedingungen seien dieselben, als in §. 3. Auf der Tangentenebne sei ein Kreis t
zeichnet, dessen Gleichung

(1.) $x^2 + y^2 = r^2$ ist. Die zugehörige Tangente werde bestimmt durch

(2.) $Xx + Yy = r^2$. Der Kreis hat als Projection auf der Kugel den durch
Gleichung

(3.) $\text{tang}^2\ \xi' + \text{tang}^2\ \eta' = \text{tang}^2\ \text{R}$ bestimmten: Legt man nun durch
Tangente in (2.) und das Kugelcentrum eine Ebne, so schneidet diese die Kugeloberfläche in ein
Normalkreise, der für den Kugelkreis (3.) zur Tangente werden muß. Reducirt man also
Gleichung (2.) auf die Projectionsgleichung, so erhält man als Tangentengleichung
den Kugelkreis:

(4.) $\text{tang}\ \Xi'\ \text{tang}\ \xi' + \text{tang}\ H'\ \text{tang}\ \eta' = \text{tang}^2\ \text{R}$;

ganz wie in §. 4. (10.) entwickelt worden war. Die übrigen Gleichungen in §. 4. haben
auch ihre vollkommen entsprechenden auf der Tangentenebne, z. B.

$$(5.)\ \text{entspricht:}\ r^2 = \frac{m^2\ n^2}{m^2 + n^2};$$

$$\left.\begin{matrix}(6.)\\(7.)\end{matrix}\right\}\text{entspricht:}\quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{mn^2}{m^2+n^2}\\ y &= \frac{m^2 n}{m^2+n^2}\end{aligned}\right\}\ \text{daraus}\ xm = yn;\ \text{[entsprechend (9.)]}$$

nm x, y die räumlichen Coordinaten des Berührungspunkts sind.

Anmerkung. Es bedarf sicher nur einer Andeutung, daß das perspectivische Projiciren a der Kugel der beste Weg sei, zugleich die Verwandtschaft von ebner und sphärischer Analysis, si wie überhaupt von Ebne und Kugeloberfläche ins klare Licht zu stellen; in der That braucht nn nur den Kugelradius als unendlich groß anzunehmen, um zu bewirken, daß Tangenten-el e und Kugeloberfläche völlig ineinander fallen, d. h., daß die sphärischen Formeln sämmtlich r die entsprechenden der ebnen Analysis übergehn.

§. 6.

Der Pol einer Tangente.

Nach Cap. II. §. 9. (3.) ist zu einem Normalkreise, dessen Gleichung $\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n}} = 1$ net, als Pol der Punkt (eigentlich ein Paar) a′ b′ so zu bestimmen, daß

(1.) $\text{tang a}' = \frac{-1}{\text{tang m}}$ und

(2.) $\text{tang b}' = \frac{-1}{\text{tang n}}$ ist;

lich hat die Kreistangente wegen ihrer Gleichung

(3.) $$\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang}^2 \text{ R}} \text{tang } \Xi' + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang}^2 \text{ R}} \text{tang } H' = 1$$

Pol den Punkt a′ b′, dessen sphärische Coordinaten durch die Gleichung

(4.) $$\left.\begin{aligned} \text{tang a}' &= \frac{-\text{ tang } \xi'}{\text{tang}^2 \text{ R}}\\ \text{tang b}' &= \frac{-\text{ tang } \eta'}{\text{tang}^2 \text{ R}}\end{aligned}\right\}\ \text{gegeben sind.}$$

Daraus entsteht:

(5.) $$\text{tang}^2 \text{ a}' + \text{tang}^2 \text{ b}' = \text{tang}^2 \varrho = \frac{1}{\text{tang}^2 \text{ R}};$$

rückt eine Kugelkreis-Tangente an ihrem Kreise continuirlich fort, so reibt ihr Pol einen Kreis, dessen Radius-Tangente den reciproken Werth

der des gegebnen Halbmessers hat, d. h. dessen Radius das Complement z
gegebnen ausmacht, und dessen Centrum mit dem des gegebnen Kreises
sammenfällt.

Anmerkung. Ist also $R = 45°$, so ist auch $\varrho = 45°$, d. h. beide Kre
fallen alsdann völlig in einander.

Bemerkung.

Wegen Mangel an Raum sind die folgenden Abschnitte II. III. IV., welche von den merkwürdig
Eigenschaften der Kugel-Kegelschnitte handeln, hier nicht mit aufgenommen worden, und muß ihnen dahe
einem der folgenden Programme der Platz angewiesen werden.

Chronik des Gymnasiums

den Zeitraum von Michaelis 1845 bis Ostern 1847 umfassend.

1. Der Unterricht.

Uebersicht der Lectionen im

A. Wintersemester 184⅚.
B. Sommersemester 1846.
C. Wintersemester 184⅙.

Curſus ſind in allen Disciplinen: in Prima und Secunda zweijährig, in Ober- und Unter-tia einjährig, in Ober- und Unter-Quarta, Ober- und Unter-Quinta halbjährig, in Serta einjährig. Die Ausnahmen werden unten angezeigt.

I. Latein.

Prima. **A. Cicero de Officiis II. III. Terent. Phormio.** 3 St. **Horat.** 6 Satiren (privatim 11 Oden und 6 Episteln) 2. St. **B. Tacit. Agricola** (privatim 3 Reden von Cicero) 2 St. **Horat. Epist I, 15 — 20.** Stellen aus Virgils **Georg. I.** (privat. einzelne Horaz. Oden) 3 St. **C Cicero Tuscul. I.** ganz, **II.** zum Theil (privat. V.) 2 St. Stellen a. Virgils **Georg. II. Horat.:** 24 Oden a. Buch **I. u. III. Epist. II, 1.** 3 St. — **A. B. C.** Stilübungen — prosaische und metrische; mündliche Unterredungen, Disputirübungen mit den Geübteren, und Extemporalien mit der ganzen Klasse, 3 St.: Prof. Wiggert. (Ordinarius). Stil- und Disputirübungen mit den minder Geübten, 2 St. O. L. Ditfurt. **C.** Ausgewählte Stellen aus **Quintilian. de inst. or.**, besonders zu Sprechübungen. 1 St. Der Director. B. für die älteren Primaner: Einleitung in die Kunst-Archäologie der Griechen und Römer, mit Benutzung von Kupferwerken, Münzen und Gemmenabdrücken: 1 St. Prof. Wiggert.

Secunda. **A. Livius XXIII.** (privat.: **Cic. p. Arch.**) **Virg. Aen. V**, 666 bis **VI**, 336. **B. Cicero pro Roscio Amerino Cap. 1 — 23.** (priv. **Liv. IX.**) **Aen. VI**, 337 —678. **C. Cic. p. Rosc. Am.** 23 bis zu Ende (priv. **C. p. leg. M.**) **Aen. VI**, 679 — **VII. c.** 200: **A. B. C.** Schriftliche prosaische und metrische Uebungen und mündliche Unterredungen, besonders über gehaltene kurze Vorträge aus der Mythologie und den römischen Antiquitäten 3 St. Prof. Dr. Sucro. (Ordinarius.)

Obertertia. **A. Caes. Bell. civ. II. III, 1 — 40. Ovid. Metamorph. VII** mit einigen Auslassungen. **B** und **C.** Aus Friedemanns kl. Cic. Chrestomathie 80 Seiten. **B.** aus Jacobs Blumenlese. Abth. 1 ausgewählte Stücke. **C. Ovid. Metam. VIII**, 183 — 885. — 5 St. Prof. Wiggert. (Ordinarius). **A u. B. Curtius III. IV.** 1 — 4. 2 St. Lehrer Dr. Cruſius. **A. B u. C.** Schriftliche prosaische

und leichte metrische Uebungen; Grammatik nach Zumpt; Memorirübungen a
Cäsar, Cicero u. Ovid. 3 St. Prof. Wiggert.

4. Untertertia. A. Caesar Bell. gall. I. II. Ovid. Metam. I, 416 bis zu Ende, m. Auswa
B. Caes. Bell. G. III. IV. Jacobs Blumenlese Seite 1 — 53. C. Caes. Be
G. V. VI, 1 — 30, Ovid. Metam. II. mit Ausw. 6 St. A. B u. C Schr
liche prosaische und leichte metrische Uebungen, Grammatik nach Zumpt. 4
Oberlehrer Ditfurt (Ordinarius).

5. Oberquarta. A. Cornel. Nep. Datames — Atticus. B u. C. Corn. Nep. Praef. Themi
Alcib. Dion. Epamin. Pelop. Agesil. Eum. Phoc. Timol. Cato, Attic. 5
A. B. C. Schriftliche Uebungen, Vocabeln, Grammatik nach Zumpt: 5
O.-L. Sauppe. (Ordinarius).

6. Unt.-Quarta A. noch mit Oberquarta zu Einer Klasse — Quarta — vereinigt. B. u.
Wiederholung der leichteren Abschnitte aus Cornel. Themist. u. Alcibiad. fer
dessen Miltiad., Aristides, Pausan., Lysand., Conon, Iphicr. 4 St. Schriftli
Uebungen und Grammatik n. Zumpt. 3 St. Prof. Pax (Ordinarius). Mü
liche Uebungen und Vocabeln. 3 St. Lehrer Dr. Crusius.

7. O.-Quinta. Ausgewählte Stücke aus Ellendt's Lesebuch. A. Prof. Pax (Ordinarius) 3
Lehrer Dr. Crusius 2 St. B. Sch.-A.-Kand. Schönstedt (Ordinariu
5 St. C. Lehrer Krasper (Ordinarius) 5 St. Schriftliche und mündl
Uebungen, Vocabeln u. Grammatik nach Zumpt. 5 St. A. Prof. Pax 4
Lehrer Dr. Crusius 1 St. B. Kand. Schönstedt 3 St. Sch.-A.-Kand
Dr. Berthold 2 St. C. Lehrer Krasper 5 St.

8. U.-Quinta. A. B. C. Ausgewählte Stücke aus Ellendts Lesebuch 5 St. Schriftliche Uebung
Vocabeln und Grammatik nach Zumpt. 5 St. Lehrer Hase. (Ordinarius).

9. Serta. A. B. C. Grammatik nach Zumpt. Uebersetzen der leichtesten Stücke a. Ellen
Lesebuch, Vocabeln, 9 St. Lehrer Meyer. (Ordinarius.)

II. Griechisch.

1. Prima. A. Platons Apologie des Sokrates. B. Thukydides B. 3. (B. 8 privati
C. Demosthenes erste philipp. u. die 3 olynthischen Reden (1 privatim). A. B
Grammatik nach Rost und schriftliche Uebungen. Zusammen 4 St. Der
rector. A Ilias II. Sophokles Elektra v. 926 — 1385. (einige Bücher d.
priv.) B. Schluß der Elektra und Ilias III. und IV, 1 — 84. (Anfang
Philoktet priv.) C. Ilias IV, 85 bis z. E. u. V. (Einige Bücher priv.
2 St. Prof. Dr. Sucro.

2. Secunda. A. Xenophons Memorabilien I, 1 — 5 Odyssee III. u. IV. (priv.) B. Xe
phon I, 6 — II, 3. Odyss. VI. u. VII. (priv. VIII.) C. Xenoph. II, 4 —
4. Odyss. IX. u. XI. (priv. X.). A. B. C. Grammatik n. Rost, u. schrift
Uebungen. Zus. 6 St. Prof. Wolf.

3. O.-Tertia. Abschnitte aus Ditfurts Chrestom. Xenoph.. Grammatik n. Rost, schrift
Uebungen. A u. B. 3 St. Lehrer Krasper. C. 4 St. Kand. Schönst
Einübung der homerischen Formenlehre an Stellen der Odyssee. Memoriren
Gelesenen. 2 St. A. Lehrer Krasper. B. Kand. Dr. Berthold. C. K
Schönstedt.

4. U.-Tertia. A. B. C. Abschnitte aus Ditfurts Chrestom. Xenoph. 4 St. Grammatik
Rost, und schriftliche Uebungen: 2 St. Ober-Lehrer Ditfurt.

5. O.-Quarta. A. Anfangsgründe der Grammatik bis Verba auf μι, Uebungen im Lesen
im Verstehen leichter vorgesprochener Sätze, Vocabeln: B. C. Grammatik
(einschließlich) Verba auf μι, Vocabeln, Lesestücke a. Jacobs Elem. B. 6
A u. B. Lehrer Hase. C. Kand. Schönstedt.

U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. Formenlehre bis zu den Pronomin. Vocabeln. Uebungen wie 5 A. 5 St. Lehrer Dr. Cruſius.

III. Deutſch.

Prima. A. B. C. Recenſion aufgegebener Aufſätze, mit Vergleichung von Muſterſtellen; ertemporane Uebungen im Erfinden, Prüfen, Ordnen und Darſtellen von Gedanken, Uebungen im Declamiren und im freien Vortrage. — Einführung in das hiſtoriſche Studium der Sprache durch eine Ueberſicht über die bisherigen Leiſtungen darin, und durch Einzelnes aus der Formenlehre. — Literatur: A. (Nach kurzer Wiederholung der ältern Zeiten) Vom 15ten Jahrhundert bis auf die ſchleſiſchen Dichter. B. Von da bis um 1750. C. Fortſetzung: hauptſächlich verweilt bei Klopſtock, Leſſing und Herder — Zuſ. 2 St. Prof. Wiggert.

(In einer außerordentlichen Stunde für die, welche dazu beſondre Neigung hatten, und bei denen nicht weſentliche Lücken in andern nöthigeren Kenntniſſen die Theilnahme unrathſam machten, weitere Anweiſung zur Erkenntniß der älteren deutſchen Sprachdenkmäler, mit Benutzung von F. W. Reimnitz Leitfaden. A. Derſelbe.)

Secunda. A. B. C. Recenſion der Aufſätze, mit Vergleichung von Muſterſtellen. Uebungen im Declamiren und Interpretiren. Anleitung zur wiſſenſchaftlichen Meditation, Disponir- und logiſche Vorübungen. 2 St. Kand. Schönſtedt.

O.-Tertia. Wie Secunda. 2 St. A. B. Lehrer Krasper. C. Kand. Schönſtedt.

U.-Tertia. A. B. C. Recenſion der Aufſätze. Uebungen im Declamiren, im Meditiren u. ſ. w. 2 St. Lehrer Dr. Cruſius.

O.-Quarta. A. B. C. Recenſion der Aufſätze, mit Hinweiſung auf die Grammatik. Uebungen im Declamiren, im Wiedergeben hiſtoriſcher Vorträge. 2 St. Ob.-L. Sauppe.

U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. wie dort. 2 St. Prof. Par.

O.-Quinta. Recenſion der ſchriftlichen Aufſätze. Grammatik. Uebungen im Vorleſen, Declamiren, Wiedererzählen. 2 St. A. Lehrer Dr. Cruſius. B. Kand. Dr. Berthold. C. Lehrer Krasper.

U.-Quinta. Wie Oberquinta. A. B. C. 4 St. Lehrer Haſe.

Serta. Grammatik, Satzbildung. Leichte ſchriftliche Aufſätze. Leſe- u. Gedächtniß-Uebungen. A. B. C. 4 St. Lehrer Meyer.

IV. Franzöſiſch.

Prima. A. B. C. Stiliſtiſche Uebungen. Geleſen wurde: A. l'Avare von Molière. B. Ideler-Nolte, die Abſchnitte a. Boileau. C. de Ségur, Napoléon I. 1 — 4.

Secunda. A. B. C. Grammatik und Stilübungen, nach Hirzel, und n. Wolfart's Thèmes français. Geleſen: Abſchnitte in Ideler-Nolte. A. aus Guibert, Berquin, Condorcet. B. a. Bailly, Florian, Barthélemy. C. a. Marmontel, La Harpe, Mercier.

O.-Tertia. Grammatik und ſchriftliche Uebungen, nach Wolfarts Thèmes français. A. Th. 185 — 203. B. 35 — 53 (priv. 1 — 34.) C. 54 — 90.

U.-Tertia. wie Obertertia. A. Th. 1 — 34. B. 35 — 46, u. die regul. u. irregul. Verba nach Wolfarts »Formen« und deſſen Tableau synoptique des formes simples de la conjug. franç. C. Th. 46 — 69.

In jeder Klaſſe wöchentlich 2 St. O. L. Wolfart.

V. Hebräiſch.

Prima. A. B. C. Lectüre ausgewählter Abſchnitte aus den hiſtoriſchen und poetiſchen

Büchern A. Testaments. Grammatik von Gesenius. Schriftliche Uebersetzungen
Hebräische und Analysen hebr. Texte.

2. Secunda. A. B. C. Elementar- und Formenlehre nebst dem Wichtigsten der Syntax. Lect
leichter Abschnitte a. d. A. Test. Uebersetzungen ins Hebräische.
In jeder Klasse wöchentlich 2 St. Der Director.

VI. Religion.

1. Prima. A u. B. Einleitung in die Schriften des A. u. N. Testaments und Lectüre a
gewählter Stellen des letzteren im Grundtexte. C. Geschichte der christlich
Religion und Kirche. 2 St. Der Director.

2. Secunda. A. Beschluß der Sittenlehre. B. u. C. Glaubenslehre. Lectüre leichter Stellen
N. Test. 2 St. Prof. Dr. Sucro.

3. O.-Tertia. A. Glaubenslehre. B. Allgemeine — C. Specielle Sittenlehre. 2 St. O. L. Wolfa

4. U.-Tertia. Wie Obertertia.

5. O.-Quarta. } A. u. C. Sittenlehre. B. Glaubenslehre. 2 Stund. } O. L. Sauppe.
6. U.-Quarta. } L. Dr. Crusius.

7. O.-Quinta. A. u. C. Bibelkunde N. Test. Erklärung ausgewählter Stellen. Das 2te u
3te Hauptstück des Luth. Katech. B. Bibelkunde A. T. Erklärung ausgewähl
Stellen. 2 St. A. u. C. Lehrer Dr. Crusius. B. Kand. Dr. Berthold

8. U.-Quinta. A. u. C. die drei ersten Hauptstücke. des Luth. Katech. B. Das Leben J
2 St. Lehrer Hase.

9. Serta. A. Biblische Geschichte N. Testaments und kurze Geschichte des Christenthu
Ein Theil des ersten Hauptstücks des Luth. Katech. B. Bibl. Geschichte A. Test
Andrer Theil des ersten Hauptstücks L. K. C. wie A. 2 St. L. Meyer.

VII Philosophische Propädeutik.

Prima. A. Aus der Psychologie: Theorie der sinnlichen Empfindungen und Wahrn
mungen und der Vorstellungscombinationen. Wiederholungen aus der Le
B. Repetitionen der unter A bezeichneten Gegenstände a. d. Psychologie. Fo
setzung der letzteren. Die Lehre von den Seelenthätigkeiten als Strebungen
Gefühle. C. Wiederholung der Lehre von den intellectuellen Gebilden. Ein
tung in die reine Logik. 2 St. Prof. Pax.

VIII. Mathematik. (Lehrbuch: Matthias Leitfaden, bearb. v. Hennige.)

1. Prima. A. Binomischer Lehrsatz. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die wichtigsten Sätze e
ebnen Trigonometrie. B. Repetition d. binom. Lehrs. — Lehre von den Gl
chungen. C. Die wichtigsten Abschnitte der synthet. und analyt. Geome
A. B. C. Schriftliche geometrische Aufgaben. A. u. B. 4 St. C. 3 St. Kad
Gorgas.

2. Secunda. A. u. C. Planimetrie: Berechnung des Inhalts ebener Figuren. Die Ste
metrie. B. Arithmetik. Die Lehre von den Potenzen mit ganzen Exponen
die Anwendung der Potenzlehre auf Zahlensysteme, auf Decimalbrüche, u
Quadrat- und Kubikzahlen, die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwuel
Die Rechnung in Wurzelgrößen, die arithmetische Proportion, die Lehre von e
Logarithmen und ihr Gebrauch. Zuletzt Wiederholung der Stereometrie. 4 St
Prof. Wolf.

3. O.-Tertia. A. u. C Wiederholung der Planimetrie bis (incl.) zur Lehre vom Kreise. Sonst
die Anwendung der geometrischen Proportion auf ebne Figuren. B. Die le
Rechnungs-Operationen in allgemeinen Größen, die Lehre vom Maße der Zah

die Theorie der gemeinen Brüche, die Rechnung in Potenzen und in Decimalbrüchen; Berechnung der Quadrat- und Kubikzahl; Ausziehung der Quadrat- u. Kubik-Wurzel. 3 St. Kand. Gorgas.

U.-Tertia. A. u. C. wie 3 B. — B. Planimetrie bis zur Kreislehre (incl.) A. u. B. 3 St. Kand. Gorgas. C. Lehrer Krasper.

O.-Quarta. A. Einleitung in die allgemeine Arithmetik. B. Einleitung in die Planimetrie nebst den leichtesten Lehrsätzen und Aufgaben. C. Wie A. und B. 3 St. Kand. Gorgas.

IX. Arithmetik.

U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. Die Decimalbrüche, zusammengesetzte Regel de tri, Zins- und Gesellschaftsrechnung. 3 St. Lehrer Weise.

O.-Quinta. A. B. C. Die Proportionslehre und Kettenregel. Die einfache Regel de tri m. directen und indirecten Verhältnissen. 4 St. Derselbe.

U.-Quinta. A. B. C. Die Bruchrechnung. 4 St. Derselbe.

Sexta. A. B. C. Die vier Species mit gleich und ungleich benannten Zahlen. 4 St. Derselbe.

X. Geschichte und Geographie.

(Lehrbücher: Schmidt's Grundriß. Sucro's Leitfaden.)

Prima. A. Germanische Vorgeschichte. Allgemeine Geschichte der Völker und Staaten des Mittelalters bis gegen das 11. Jahrhundert, mit Berücksichtigung der geographischen Verhältnisse. B. Geschichte des Mittelalters in der Periode der Kreuzzüge und bis zum Verfalle mittelalt. Zustände. Geographische Erläuterungen zu diesen Zeiträumen. C. Fortsetzung der allgemeinen Geschichte des Mittelalters. Specialgeschichte des Preuß.-Brandenburgischen Staates seit dessen Entstehung bis zu den ersten Hohenzollerschen Regenten. Einzelne Partien a. d. Geschichte des italienischen und deutschen Städtewesens und der Sittengeschichte des M. A. überhaupt. 2 St. Prof. Par.

Secunda. A. Geschichte der Griechen, Macedonier und Macedonischen Reiche, Wiederholung der Geographie von Australien und Afrika. B. Geschichte der Karthager und Römer bis zu Ende des 3. punischen Krieges. Wiederholung der Geographie v. Amerika. C. Geschichte der Römer vom Anfange der Gracchischen Unruhen bis zum Untergange des oströmischen Reichs. Wiederholung der Geographie von Deutschland, besonders dem preußischen Staate, von Dänemark und der Schweiz. 3 St. Prof. Wolf.

O.-Tertia. A. Geographie von Großbritannien, Skandinavien, Rußland, Oestreich außerhalb Deutschland und der Schweiz. Mittlere Geschichte. B. Außereuropäische Geographie. Neue Geschichte. C. Oro- und Hydrographie Deutschlands. Neueste Geschichte seit 1740. 3 St. A. B. Kand. Schönstedt. C. O. L. Wolfart.

U.-Tertia. Wie 3. — A. B. C. O. L. Wolfart.

O.-Quarta. A. und C. Mittlere und neuere Geschichte, besonders Brandenburgische. Geographie des Schauplatzes derselben. B. Alte Geschichte. Neue Geographie des Schauplatzes derselben m. Bezug auf das Alterthum. 2 St. A. B. C. O. L. Sauppe.

U.-Quarta. A. noch mit Oberquarta vereinigt. B. und C. wie Oberquarta. 2 St. Lehrer Dr. Crusius.

O.-Quinta. A. Neue Geschichte. Außereuropäische Geographie. B. Mittlere Geschichte. Geographie von Europa. C wie A. 3 St. A. Lehrer Dr. Crusius. B. O. L. Wolfart u. Kand. Schönstedt. C. O. L. Wolfart.

8. U.-Quinta. A. die wichtigsten Länder Europas. Zweite Hälfte der alten Geschichte. B. übrigen Erdtheile. Erste Hälfte der alten Geschichte. C wie A. 2 St. A u. B. Lehrer Weise. C. Lehrer Hase.

9. Serta. A u. C. Geographie von Deutschland, insbesondere der preußischen Monar Hauptbegebenheiten der mittlern und neueren Geschichte. B. Einleitung Geschichte und Geographie. Uebersicht von Europa. Hauptbegebenheiten de Geschichte. 2 St. Lehrer Weise.

XI. Physik.

1. Prima. A. Optik u. Farbenlehre. B. Hydrostatik, Aërostatik, Lehre von der Wärme. C. L vom Galvanismus, Magnetismus und Elektromagnetismus. 2 St. Kd. Gorg

2. Secunda. A. Einleitung in d. Physik. Statik und Mechanik fester Körper. B. Hydros und Hydrodynamik. C wie A. 1 St. Derselbe.

XII. Naturbeschreibung.

3. O.-Tertia. A. Anthropologie. B. Mineralogie. C. Zoologie. 2 St. A. Lehrer Kras B. C. Kand. Gorgas.

4. U.-Tertia. wie Obertertia.

5. O.-Quarta. A. B. C. Botanik. 2 St. Kand. Dr. Burghardt. B. Lehrer Kras C. Kand. Gorgas.

6. U.-Quarta. A. mit Oberquarta vereinigt. B. u. C. wie Oberquarta. A. Kand. Dr. Bu hardt. B. u. C. Lehrer Krasper.

7. O.-Quinta. A. Mineralogie. B. Botanik. C. Mineralogie. 2 St. A. Kand. Dr. Bu hardt. B. u. C. Lehrer Krasper.

8. U.-Quinta. A. u. C. Zoologie. B. Botanik. 2 St. Lehrer Weise.

9. Serta. wie Unterquinta.

XIII. Zeichnen.

1. Schüler aus Prima, Secunda, Ober- und Untertertia, die freiwillig dieser Kunst noch widmen wollen, erhielten wöchentlich 1 St.
2. Ober-Quarta. 2 St.
3. Unter-Quarta. 1 St.
4. Ober-Quinta. 1 St.
5. Unter-Quinta. 1 St.
6. Serta. 1 St.

Den gesammten Unterricht ertheilte Prof. Par.

XIV. Gesang.

1. Freiwillige und fähige Theilnehmer aus den 4 ersten Klassen wurden unterrichtet wöcher in 1 St.
2. Ober-Quarta. 1 St.
3. Unter-Quarta 1 St.
4. Ober-Quinta. 1 St
5. Unter-Quinta. 2 St.
6. Serta. 2 St.

Den gesammten Unterricht ertheilte Chor- u. Musikdirector Wachsmann.

XV. Kalligraphie.

Ober-Quarta 1 St.
Unter-Quarta. 2 St.
Ober-Quinta. 3 St.
Unter-Quinta. 3 St.
Sexta. 3 St.

In sämmtlichen Klassen unterrichtete der Schreiblehrer Domcustos Brandt. Auch in der Stenographie wurde versuchsweise der Unterricht für solche, die dazu Lust hatten, fortgesetzt. (Vgl. Programm von 1845.) In ihr unterwies nämlich wöchentlich in einer Stunde Herr Intendantur-Secretair Lamlé aus uneigennütziger Liebe zur Sache im Winter $18\frac{44}{45}$ eine Anzahl Secundaner, im Sommer 1846 Ober-Tertianer, und im Winter $18\frac{46}{47}$ Unter-Tertianer; ja er widmete sogar im letzten Halbjahr außerdem noch eine wöchentliche Stunde einigen aus Secunda und Ober-Tertia, die sich noch mehr Fertigkeit erwerben wollten. Während Herr Lamlé bei der General-Synode in Berlin beschäftigt war, hatte der städtische Lehrer Herr Stäcker die Güte ihn zu vertreten.

2. Das Lehrerpersonale.

Im Lehrerpersonale ist hinsichtlich der festangestellten Lehrer eine Veränderung nicht vorgenen. Auch haben die beiden Herren Schulamts-Kandidaten Schönstedt und Gorgas im Programme von 1845 bereits anerkannte verdienstliche Thätigkeit an der Anstalt fortgesetzt.

Der dort gleichfalls erwähnte Herr Schulamts-Kandidat Dr. Burghardt behielt nach ndigung seines Probejahrs noch einige Lectionen, folgte aber Ostern v. J. einem Rufe an das rgogium zu Putbus. Michaelis 1845 traten abermals zwei Kandidaten des höheren Schul-, die Herrn Dr. Karl Adolf Berthold aus Barby und Friedrich Koch aus Magdeburg, Probejahr an. Der erstere fand mit Beendigung desselben eine Anstellung als Hülfslehrer Gymnasium zu Stendal. Dem letzteren war es, nach Beendigung der ersten Monate, in en seine Thätigkeit vorschriftsmäßig nur auf Hospitiren in den verschiedenen Klassen beschränkt nur kurze Zeit vergönnt, der Anstalt, die ihn selbst gebildet hatte, sich durch eignen Unterdankbar zu zeigen, indem er bald nach Weihnachten an einem Brustleiden erkrankte, das chtet der angewandten eigenen Vorsicht und ärztlichen Sorgfalt, und bei der liebevollsten chen und geschwisterlichen Pflege, doch, nach einer ohne Erfolg gebrauchten Badekur, zu em innigen Schmerze am 16. Juni 1846 seinen frühen Tod herbeiführte.

3. Die übrigen äußeren und inneren Verhältnisse des Gymnasiums.

Die Gymnasial-Bibliothek ist theils aus den Fonds der Anstalt, durch die mit dem ehr bietigsten Danke zu erkennende Geneigtheit des Königl. Hochlöbl. Provinzial-Schulkollegiur theils durch einige von des Herrn Ministers der Unterrichtsangelegenheiten Exc. uns huldrei übersandte Geschenke vermehrt worden. Die letzteren waren folgende:

Prof. Dr. Gerhardts archäologische Zeitung. Jahrgang 1845.

Prof. Dr. Förstemanns 2 Schriften: Lutherdenkmale, und: Luthers Tod und Begräbr

Corpus Reformatorum. Vol. XIII.

Außerdem erhielten wir auch am 18. Februar 1846 durch die Huld des Herrn Minist zur unentgeltlichen Vertheilung an fleißige und würdige Schüler der beiden ersten Klassen Exemplare der von Herrn Director Dr. August zu Berlin herausgegebenen **Acta Lutheri etc.**

Herr Staatsrath Dr. K. Morgenstern aus Dorpat, einer der ältesten noch leben vormaligen Schüler unsers Gymnasiums, schenkte bei seiner Anwesenheit in seiner Vaterstadt Sommer 1846, mehrere seiner kleineren Schriften, die der Bibliothek noch fehlten. Die Buchha lung Schwetschke u. Sohn in Halle übersandte einige ihrer philolog. Verlagsartikel.

Für diese Gaben unsern Dank!

Auf die Vermehrung der Schülerbibliothek, sowie des physikalischen Appara und des naturhistorischen Cabinets wurde gleichfalls, soweit die Fonds reichten, Bed genommen.

Die in dem Zeitraume, welchen diese Nachrichten umfassen, von den vorgesetzten Ho Behörden mehreren Lehrern, und selbst wiederholt, huldvollst bewilligten Gratificationen sind den Betheiligten mit den Gefühlen des lebhaftesten und ehrfurchtsvollsten Dankes erkannt wor

Erlaß des Schulgeldes erhielten im Wintersemester $18\frac{45}{46}$: 41 Schüler, im Somm semester 1846: 37 Schüler, im Wintersemester $18\frac{46}{47}$: 34 Schüler.

Aus der Funkschen Stiftung wurden an Unterstützungen vertheilt:

zu Michaelis 1845: 62 Thlr. — sgr. — Pf. Gold und 121 Thlr. 22 sgr. 7 Pf. Cour. a Abiturienten und 13 Schüler;

zu Ostern 1846: 67 Thlr. 2 sgr. 6 Pf. Gold und 121 Thlr. 22 sgr. 7 Pf. Cour. an 3 Ab rienten und 12 Schüler.

zu Michaelis 1846: 49 Thlr. Gold und 138 Thlr. 7 sgr. 5 Pf. Cour. an 2 Abitur. u. 14 Schi

Von Anordnungen der Hohen vorgesetzten Behörden sind hier zu erwähnen, daß öffentlichen Prüfungen künftig nicht mehr zu Michaelis, sondern jedesmal zu Ostern Statt finden n (Rescript vom 2. October 1845); Erläuterungen zu einigen Bestimmungen des Abiturienten-fungsreglements (Rescr. v. 5. Mai 1846); und die gestattete Beibehaltung der bisher einge-ten lateinischen und griechischen Grammatiken (Rescr. v. 14. desselb. M. u. J.).

Frequenz.

Die Schülerzahl betrug:

zu Anfang des Wintersemesters $18\frac{45}{46}$: 412.
» » » Sommersemesters 1846: 423.
» » » Wintersemesters $18\frac{46}{47}$: 410.
und beträgt am Schlusse desselben: 405.

Zur Universität gingen mit dem Zeugniß der Reife:

Ostern 1846: Karl van Bergen a. Burg.
Albert Bühling a. Magdeburg.
Herman Deegen a. Egeln.
Rudolf Dehnicke a. Ozorkow im Königr. Polen.
Wilhelm Joffroy a. Danzig.
Otto Krause a. Brumby b. Calbe a. d. Saale.
Hans Scheringer a. Magdeburg.

Michaelis 1846: Adolf Fischer a. Dannigkow b. Gommern.
Robert Fritze a. Magdeburg.
Christian Koch a. Schakensleben.
Friedrich Wilda a. Graudenz.

Am 16. März d. J. sind für reif erklärt worden:
Friedrich Heinrich Julius Böttticher a. Magdeburg.
Anton Felix Damm a. Magdeburg.
Karl Friedrich Albert Danckwortt a. Magdeburg.
Friedrich Heinrich Deißner a. Magdeburg.
Karl Theodor Heidman a. Magdeburg.
Ernst Wilhelm Möller a. Erfurt [Magdeburg].
Friedrich Wilhelm von Pieschel a. Magdeburg.
Heinrich Rathmann a. Unna in Westphalen [Magdeburg].

Aufgaben
zu den freien Arbeiten der drei obern Klassen von Michaelis 1846 bis Ostern 1847.

I. in lateinischer Sprache.

1. in Prima.

a. für die obere Abtheilung (Prof. Wiggert.)

Winter $18\frac{45}{46}$.

1. De Furii Camilli in patriam meritis (nachdem die Abiturienten zu Michaelis 1845 darüber ge hatten.) 2. Romani quibus artibus populos subactos in potestate et dicione tenuerunt? 3. Civitatum carum, quum in potestate populi Rom. essent, quae conditio fuit? 4. Valetudinis cura cur est adoles commendanda? (epist.) 5. Usque adeone scire tuum nihil est, nisi te scire hoc sciat alter? (epist.) cordia res parvas crescere, discordia maximas dilabi insignioribus antiquitatis exemplis demonstratur. zu Ostern 1846.)

Sommer 1846.

1. Kritischer Versuch im Ergänzen und Berichtigen entstellter kleiner Gedichte neuerer La mit Angabe der Gründe. 2. Aristides milites ante pugnam Plataeensem adhortari fingitur. 3. Philippus et Napoleo inter se comparantur. 4. Quibus artibus usus C. Jul. Caesar maximam Galliarum partem populi Rom. subjecit? (Abitur.) Zu Uebungen im Sprechen wurden Wiederholungen aus der alten Gesch.

Winter $18\frac{46}{47}$.

1. Mores Agricolae secundum Tacitum adumbrantur. (Nach Lesung des Agricola von Tacitus.) 2. fratres ab adversariorum accusationibus defenduntur. 3. J. Caesar Alexandro Philippi filio virtutibus perior. 4. Otto I. jure Magnus appellatur. 5. Recte Socrates mortem effugere noluit. 2 — 5 zugleich putationen benutzt.) 6. Quibus rebus paullatim mutata est forma reipublicae Atheniensis? (Abit.)

b. Für die untere Abtheilung (Oberlehrer Ditfurt.)

Winter $18\frac{45}{46}$.

Zu freien Arbeiten:

1. De rebus gestis Agesilai (nach Xenoph. u. Corn. Nep.) 2. De bello Mithridatico primo. 3. quatenus amicis sit praestanda. 4. Concio C. Sempronii apud pop. R. post cladem Cannens. habita.

Zu Disputirübungen:

1. Paupertas virtutis magistra. 2. Mentiri nonnunquam est boni viri. 3. Amici scelus magistr dicare debemus. 4. In frumenti caritate licetne ei, qui primus advehit, ciues de adventu aliarum frumentariarum celare? (Cic. Off. III. §. 50 seqq.) 5. Non licet civitati quemquam necare. 6. Aedium v debetne vitia narrare, an licet celare emptorem? (Cic. Off. III. §. 54 sqq.)

Zu mündlicher Erzählung:

de rebus Romanorum.

Sommer 1846.

Zu freien Arbeiten:

1. De rebus gestis M. Furii Camilli. (Liv. V. VI. VII. 1.) 2. De expeditione Siciliensi Atheni 3. Cur consulendum cuique est suae existimationi?

Zu Disputirübungen:

1. Vita urbana melior est quam rustica. 2. In vita quotidiana firma memoria potior est quam iudicii
en. 3. Nullo modo in bello hostium urbem incendere aut excidere licet. 4. Licetne civi, cuius frater ab
occisus sit, quum nec miles et inermis esset, ulcisci illum, qui occidit? 5. Licetne civitatibus in scelere
ando adhibere crudelitatem? 6. Divitiae civitatibus prosunt.

Zu gemeinschaftlicher Erfindung:

De gloria.

Zu mündlicher Erzählung:

1. De rebus Punicis. 2. De rebus Karthaginiensium. 3. De rebus Graecorum.

Winter $18\frac{46}{47}$.

Zu freien Arbeiten:

1. De rebus a Caesare in Aegypto gestis (bell. Alexandr.) 2. Vita Traiani imperatoris. 3. De constantia.

Zu Disputirübungen:

1. Si patriam prodere conabitur pater, silebitne filius? (Cic. Off. III. §. 90.) 2. Utrum homo profusus
vituperandus an tenax? 3. Estne interdum, ut ulcisci iniurias debeamus? 4. In liberis rebus publicis
orator plus prodesse civitati potest, quam vel optimus belli dux. 5. Sumptus qui pace in exercitum fiunt,
opulo haud mediocri emolumento sunt. 6. Si verus amicus simul et bonus frater in eo sint, ut flumine
ntur, utrum prius servare conabere? 7. Caecitas an surditas gravius malum?

Zu gemeinschaftlicher Erfindung:

De levitate animi.

Zu mündlicher Erzählung:

De rebus Assyriorum. De rebus Persarum.

2. Ober-Secunda. (Prof. Dr. Sucro.)

1. Lycurgus res Lacedaemoniorum novis legibus atque institutis auxit, novaque morum disciplina stabilivit.
stae (Segestae s. Egestae) Siciliae urbis origo secundum ea, quae Virgilius in Aen. V. 604 — 758 habet,
r enarratur. 3. Palinurum, Lucaniae promontorium, unde nomen ceperit, Virgilio in Aeneidis V. 835
VI. 337 — 383 duce breviter enarratur. 4. Tribunatus plebeji apud Romanos quaenam caussa et origo
exponitur. 5. Elysii ex Virg. Aen. 637 — 678 adumbratio. 6. M. At. Regulus res Romanorum clade
pietate ac fide auxit.

II. in deutscher Sprache.

1. in Prima. (Professor Wiggert.)

Winter $18\frac{45}{46}$.

1. (Für die Neueingetretenen:) Welche deutschen Klassiker haben mich bis jetzt am meisten an-
? und warum? 2. Aussaat und Ernte als Bild des menschlichen Lebens. 3. Lobrede auf Columbus.
che Vortheile gewährt das schriftliche Uebersetzen aus fremden Sprachen? 5. Aurora Musis amica.
ist in Gellerts (oder nach freier Wahl: eines andern Dichters aus der ersten Hälfte oder der
es 18ten Jahrhunderts) Sprache jetzt veraltet? (leric. u. gramm.)

Sommer 1846.

1. Uebung in der Kritik an einem (den Schülern unbekannten) absichtlich dazu verstüm
und durch falsche Lesearten entstellten Gedichte. 2. u. 3. Beschreibung eines Gemäldes der Kunstausste
(Es ist ein historisches zu wählen, oder, wenn sich jemand im Humoristischen versuchen will, ein sogen
Genrebild. — Nachdem das Wesen der Beschreibung durchgesprochen und an Mustern von Winkel
G. Forster, Göthe u. a. erläutert war.) 4. Charakteristik der Jungfrau von Orleans nach S
5. Schillers Glocke nach Plan und Inhalt entwickelt. (oder: Eine schwere Jugendzeit ein rauher Früh
6. Thema nach freier Wahl.

Winter $18\frac{46}{47}$.

1. Ueber den hohen Werth unabläſſiger Thätigkeit. 2. Hoffnung ist ein fester Stab und
ein Reisekleid, da man mit durch Welt und Grab wandert in die Ewigkeit. 3. Nicht das viele
thut's, sondern wissen etwas Guts. 4 u. 5. Thema nach freier Wahl, mit (erfolgreicher) Auffor
zu dichterischen Versuchen. 6. Ueber den Einfluß des Studiums der Wissenschaften auf den Charakte

2. in Secunda. (Kandidat Schönstedt.)

Winter $18\frac{45}{46}$.

1. Gespräch zwischen Scipio und Hannibal vor der Schlacht bei Zama. 2. Gedanken am
des Columbus. 3. Sei hochbeseligt oder leide, Das Herz bedarf ein andres Herz; Getheilte Fre
doppelt Freude, getheilter Schmerz ist halber Schmerz. 4. Werth der Jugendjahre. 5. Laßt uns
werden, gleich wird's besser sein. 6. Betrachtungen beim Anblick einer zerstörten Ritterburg. 7
Sonntag auf dem Lande. 8. Schilderung eines Schiffbruchs. 9. Schilderung der Aussicht von
hohen Berge. 10. Vorzüge des Stadt- und Landlebens. Gespräch. 11. Das unverhoffte Wiede
Gespräch oder Erzählung. 12. Der Abschied. Gespräch. 13. Concordia parvae res crescunt, dis
maximae dilabuntur. Rede. 14. Charakteristik der alten Geschichte. 15. Betrachtungen beim Anb
gestirnten Himmels. 16. Gefahren des Reichthums. 17. Gefahren der Armuth. 18. Freies Them

Sommer 1846.

1. Die Vorzüge des Schulunterrichts verglichen mit denen des Privatunterrichts für die
und wissenschaftliche Bildung des Menschen. 2. Ist es wahrscheinlich, daß Alexander der Große die
besiegt haben würde, wenn er nach Italien gegangen wäre? (vergl. Liv. IX, 17 — 19). 3. Zu
Betrachtungen giebt die römische Geschichte Veranlassung? 4. Der Charakter Cicero's. 5. Arbeit
Blutes Balsam, Arbeit ist der Tugend Quell. 6. Ueber die Zeit, nach Schiller's Spruch des Con
7. Warum ist es gut, daß wir die Zukunft nicht vorher wissen? 8. Charakterschilderung eines Neug
9. Charakterschilderung eines Prahlers. 10. Trost bei unverschuldeten Leiden. 11. Orandum est,
mens sana in corpore sano. 12. Parallelle zwischen Sulla und Cäsar. 13. Freies Thema.

Winter $18\frac{46}{47}$.

1. Folgen der Erfindung der Buchdruckerkunst. 2. Folgen der Entdeckung Amerikas. 3
nennt man mit Recht glücklich? 4. Der Unzufriedene. Charakterschilderung. 5. Der Launische. Ch
schilderung. 6. Der Eigensinnige. Charakterschilderung. 7. Gedanken an der Gruft Friedrichs des
8. Rückblick auf die Kinderjahre. 9. Ist für Europa ein Zurücksinken in Barbarei zu fürchten? 2
danken eines Franzosen bei der Nachricht von Napoleons Unglück in Rußland. 11. Gedanken
Deutschen bei der Nachricht von der Völkerschlacht bei Leipzig. 12. Brief eines preußischen Offici
Paris nach dem Einrücken der Verbündeten in die französische Hauptstadt. 13. Freies Thema.

3. Ober-Tertia.

(Winter $18\frac{45}{46}$. Lehrer Krasper.)

1. Der Abfall des Ambiorix und Kativolkus. Nach Caes. b. g. V., 26 seqq. 2. Meine ...orsätze für das bevorstehende Winterhalbjahr. Brief. 3. Die Bürgschaft. Nach Schiller's Ballade. ... Schilderung des Sonnenaufgangs (zu einer beliebig zu wählenden Jahreszeit). 5. Xenoph. Memorab. I. 4. ...nd 6. Xenoph. Memorab. II., 2. Übersetzungen in der Klasse. 7. Das Weihnachtsfest. 8. Betrachtungen ...im Beginn des neuen Jahres. 9. Schwert und Feder. Dialog. 10. Über die Ursachen der Vaterlands... ...ebe. 11. Über die Selbstsucht oder den Egoismus.

Sommer 1846. (Lehrer Krasper.)

1. Der wiederkehrende Frühling. Brief. 2. Unsere diesjährige Gemäldeausstellung. Brief. ... Das Turnen. 4. Der unzufriedene Landmann. Ein Mährchen. 5. Die große Rübe. Erzählung. ... Lebensbeschreibung des Hannibal. Nach Cornel. Nep. 7. Charakteristik des Hannibal. 8. Meine ...undstagsferien. 9. Der Ring des Polykrates von Schiller. a) Kurze Inhaltsangabe. b) Anlage des ...anzen. c. Benutzung der Quellen und Abweichungen von denselben. d. Grundidee der Ballade. ...0. Die Kraniche des Ibykus. Ebenso behandelt. Beiden Arbeiten war eine ausführliche Interpretation ...r zwei Balladen in der Klasse vorhergegangen. 11. Schwere Ähren neigen sich. Chrie.

Winter $18\frac{46}{47}$. (Kandidat Schönstedt.)

1. Folgen der Mäßigkeit. Briefform. 2. Folgen des Müßiggangs. Briefform. 3. Über die ...othwendigkeit einer weisen Benutzung der Zeit. 4. Selbstbetrachtungen am Neujahrsmorgen. 5. Gedanken ...n Grabe Luthers. 6. Gedanken auf dem Schlachtfelde von Waterloo. 7. Die mannigfaltigen Beschäfti... ...ungen der Menschen von einem Thurme aus betrachtet. 8. Jeder ist seines Glückes Schmied. 9. Die ...astfreundschaft der Alten verglichen mit der Gastfreundschaft der neuern Zeit. 10. Freuden des Winters. ...1. Schilderung einer Winterlandschaft. 12. Wie die Aussaat, so die Erndte. Erzählung. 13. Lust und ...ebe zum Dinge macht Müh' und Arbeit geringe. 14. Sich selbst besiegen ist der schönste Sieg. ...5. Briefliche Mittheilungen an einen Freund über neue Lebensverhältnisse, in welche der Schreibende ...reten ist. 16. Glückwunschschreiben zu der günstigen Gestaltung der Lebensverhältnisse eines Freundes. ...7. Nur Beharren führt zum Ziel. 18. Über das Schädliche der Gewöhnung an überflüssige Bedürf... ...sse. 19. Trostschreiben an einen Freund, der mit seinem Schicksale unzufrieden ist. 20. Werth der ...ugendzeit. 21. Freies Thema.

4. in Unter-Tertia. (Lehrer Dr. Crusius.)

Winter $18\frac{45}{46}$.

1. Eine Herbstlandschaft (Schilderung). 2. Gedanken beim Anblick des Doms zu Magdeburg. ... Edle Rache. Erzählung nach Seume's Gedicht: der Wilde. 4. Leiden eines naßkalten und stürmischen ...ecembertages. 5. Gedanken eines Jünglings beim Beginn des neuen Jahres. 6. Warum muß das ...tudium der deutschen Sprache uns ganz besonders am Herzen liegen? (Brief.) 7. Gedanken am ...3. Februar 1846. 8. Schilderung eines schönen Tages im März. (In der Klasse gearbeitet.) 9. Müßig... ...ng lehrt viel Böses. Jes. Sir. 33, 29. (Abhandlung).

Sommer 1846.

1. Schilderung eines schönen Aprilabends. 2. Schilderung eines unfreundlichen Tages im M 3. Inhalt und Sinn des Gedichtes von Schiller: Die Theilung der Erde. 4. Gedanken an einem offen Grabe. 5. Selbstgespräch am Morgen eines Geburtstages. (In der Klasse gearbeitet). 6. Warum lern wir Griechisch? (Brief an einen jüngern Bruder). 7. Unrecht schlägt seinen eigenen Herrn. (Abhandlung

Winter $18\frac{4}{47}$.

1. Schilderung eines veränderlichen Oktobertages. 2. Beschreibung meiner Arbeitsstube. 3. D 6. November. (Aus meinem Tagebuche.) 4. Die Sage von Tantalus und ihr Sinn. 5. Philemon u Baucis. (Erzählung, nach gegebenen Grundzügen). 6. Gedanken beim Anblick eines zugefrornen Strom 7. Der leichtsinnige Schüler (Charakterschilderung). 8. Wodurch können wir uns gegen die Eltern dankb beweisen? (Brief an einen jüngern Bruder). 9. Schilderung eines unfreundlichen Tages im März. (der Klasse gearbeitet.) 10. Die Biene, eine Lehrerinn der Jugend. (Abhandlung.)

Verzeichniß der Schüler des Domgymnasiums zu Magdeburg, zur öffentlichen Prüfung Ostern 1847. [405.]

Diejenigen, deren Geburtsort nicht angegeben ist, sind aus Magdeburg gebürtig. In [ ] steht der jetzige Wohnort der Eltern, falls dieser nicht mit dem Geburtsorte des Schülers derselbe ist; M. bedeutet dabei Magdeburg.

Prima (30.)

Die mit † bezeichneten sind bei der Prüfung am 16. März d. J. für reif zur Universität erklärt worden.

ilhelm Arndt a. Kirchdorf b. Greifswald.
iedrich Bochdanetzky.
friedrich Böttticher.
ustav Böttticher.
olf Brandt.
runo Brieger a. Halle.
rman Cäsar a. Wülfingerode [Sülldorf].
to Costenoble.
elix Damm.
†Albert Danckwortt.
†Heinrich Deißner.
Otto Dienemann a. Güsen [Schartau].
Friedrich Döbber a. Hakeborn.
Julius Dreyer.
Friedrich von Gerlach a. Berlin.
†Theodor Heidman.
Reinhold Heyn.
Ferdinand Hildebrandt.
Wilhelm Huth.
Hugo Keßler.
†Wilhelm Möller a. Erfurt [M.]
†Wilhelm von Pieschel.
†Heinrich Rathmann a. Unna [M.]
Hermann Rudolphi a. Schwerz b. Halle [Dammendorf b. Halle].
Eduard Schilde a. Erfurt [M.]
Ferdinand Schreyer.
Franz Sintenis.
Fedor Sucro.
Adolf Thiele.
Louis von Uklanski.

Secunda (54.)

Die zur obern Abtheilung dieser Klasse gehörigen Schüler sind mit * bezeichnet.

eodor Braune a. Winningen.
istav Brecht a. Gr. Quenstedt [Ochtmersleben].
iedrich Bruns a. Kloster Neuendorf b. Gardelegen.
istav Bunge a. Micheln.
brecht Cuno a. Dodendorf.
rnhard Decker a. Schönebeck.
rl Döring a. Sandau.
bert Fischer * a. Ziesar [Hohendodeleben].
rl Fritzsche * a. Barleben.
tob von Gerlach a. Kläden b. Stendal [M.]
ß Gewe * a. Gr.-Holzhausen in d. Altmark.
non Grape a. Barleben.
nhard Grosse a. Erfurt [M.]
odor Hachtmann a. Anhalt b. Pleß [Barby].
ther Händler a. Altenweddingen.
l Hauptmann a. Tarthun.
riß Hermann * a. Schönebeck.
Max Hirsch a. Halberstadt [M.]
Theodor Humbert a. Berlin [M.]
Karl Jänsch a. Mühlhausen [Schönebeck].
Karl Janicke.
Friedrich Knobbe a. Bahrendorf [M.]
Ferdinand Koch a. Parey.
Karl Kortum a. Hakeborn [Schwaneberg].
Louis Lagemann * a. Gr. Wanzleben.
Hugo Langenstras aus Schönebeck [Plötzky].
Otto Lehmann a. Stendal [M.]
Ludwig Leithoff. *
Julius Liepelt.
Albert Lücke. *
Ernst Meyer * a. Letzlingen [Kloster Neuendorf].
Karl Müller a. Samswegen.
Heinrich Pfanne a. Gommern.
Heinrich Rathmann * a. Klein-Lübs [Wasserleben].
Rudolf Reinsch a. Ratibor [M.]
Ferdinand Rudolphi a. Dammendorf b. Halle.
Heinrich Rustenbach * a. Nordgermersleben.
Wilhelm Scheffer.
Ernst Scheringer.
Emil Schlunck * a. Schönebeck.
Hermann Schmidt * a. Dähre [Hohendodeleben].
Hermann Schmidt * a. Borne.
Ernst Schmidt a. Genthin [Burg].
Albert Sieger a. Egeln.
Karl Siegfried.
Gustav Teubner. *
Emil Torges a. Mühlhausen [M.]
Fritz von Trzebiatowski a. Torgau [M.]
Wilhelm Uterwedde a. Wolmirstedt.
Richard Voigtel. *
Otto Volgenau a. Kaltenhof b. Perleberg.
Theodor Wagner * a. Bleckendorf.
Theodor Walkenhorst.
Hermann Zabel a. Schönebeck.

Ober-Tertia (29.)

l Braun a. Schermke.
l Fischer.
o Friese a. Quedlinburg [Buckau].
tard Fritze a. Schartenke [M.]
tav Grothe a. Berlin [M.]
helm Hellwig.
ert Jacoby.
o Korn a. Remkersleben.
r Lange.
ar Lauë [Kähnert b. Burg].
Gustav Leithoff.
Adelbert Lichtenberg a. Seehausen b. M.
Louis Mehlhose a. Dönstedt [Böddensell]
Louis Meyer a. Gr. Oschersleben.
Gustav Münch a. Nordhausen [M.]
Wilhelm Münde a. Schönebeck.
Heinrich Otto a. Schwaneberg.
Johannes Rathmann [Krakau].
Theodor Reinecke a. Gr. Salze.
Julius Reinecke.
Ludwig Roch.
Albrecht Scharrer.
Karl Schmücker a. Loburg.
Hermann Schulze a. Salzwedel [M.]
August Schwarzlose a. Ziesar.
Louis Thiele a. Salzwedel [M.]
Lebrecht Uhlich a. Pömmelte [M.]
Eduard Weniger a. Neuhaldensleben.
Theodor Zollmann.

Unter-Tertia (44.)

Julius Bauermeister a. Loitsche.
Adolf Brüggemann.
Philipp Coqui a. Gr. Germersleben [M.]
Rudolf Cuno a. Dodendorf.
Guido Curitz.
Max Damm.
Wilhelm Dorendorf a. Gardelegen.
Hermann Fischer a. Ziesar [Hohen-Dodeleben].
Paul Francke a. Gr. Wanzleben.
Hugo Fromme a. Bensdorf b. Genthin [Genthin.]
Gustav Güssow } a. Kloster Gröningen
Ernst Güssow } [Egeln.]
Ernst Hermann a. Schönebeck.
Hugo Holstein.
Gustav Jäckel.
Karl Kalkow a. Calbe a. d. S.
Emil Knüppel.
Otto Koch.
Felix Krüger } a. Colbitz [M.]
Moritz Krüger }
Ernst Kühne a. Saarmund [M.]
Friedrich Kuhnert.
Max Lamle a. Coblenz [M.]
Theodor Lemke.
Konrad Listemann.
Reinhold Meinecke.
Ernst Meyer.
Wilhelm Meyer.
Friedrich Michaëlis.
Emil Müller a. Samswegen.
Hermann Muths a. Erfurt.
Karl Oppermann a. Gr. Ammensleben [Stemmern.]
Eduard Rathmann a. Unna [M.]
Friedrich Reißner a. Osterwieck.
Wilhelm Rohde a. Egeln.
Wilhelm Roterberg a. Salbke.
Philipp Scheringer.
Richard Silberschlag.
Theodor Tuchen a. Staßfurth.
Eduard Varges a. Berlin.
Karl Wetter a. Genthin [Sudenburg]
Karl Wiebelitz a. Groß-Salze.
Odo von Wulffen a. Pietzpuhl.
Hermann Zieger a. Sandau [Leitzkau]

Ober-Quarta (31.)

Louis Bergmann a. Neumühl b. Salzwedel.
Andreas Brösel a. Zens b. Calbe.
Eduard Bussenius a. Sohlen [Wellen].
Adolf Curitz.
Hermann Elsner a. Reichnow b. Wrietzen [Kl. Rosenburg].
Herman Freise.
Hermann Gödecke a. Bischofswalde b. Erxleben.
Albrecht Heineke a. Schönebeck.
Karl Hildebrandt.
Ferdinand Hoffmann a. Süplingen.
Rudolf Humbert a. Berlin [M.]
Emil Junghann a. Aschersleben [Drakenstedt].
Albert Käsemacher.
Oskar Koch a. Parey.
Albert Koch a. Gr. Rossau b. Osterburg.
Richard Kühnau.
Werner Lindemann a. Osterburg [M.]
Wilhelm Mathias.
Hermann Mechow a. Ramstedt.
Heinrich Meyer.
Rudolf Neuland a. Gr. Glogau [M.]
Adolf Neumann a. Ortrandt b. Mühlberg [Neue Neustadt-Magdeburg].
Hermann Payendieck.
Ernst Schmutz a. Crüssau b. [illegible] [Werkleitz b. Kalbe].
Julius Thäder.
Gustav Voigt a. Wolmirstedt.
Hermann Wehe.
Louis Weniger a. Neuhaldensleb[illegible]
Max Witzenhausen a. Schermk[illegible] Oschersleben.
Richard v. Wulffen a. Wüsten-[illegible] chow b. Burg [Loburg].
Max Zernial a. Cleve [Neuhaldensleben].

Unter-Quarta (34.)

Guido Aßmann.
August Baensch.
Gustav Bichtemann a. Egeln [Groß-Germersleben.]
Albrecht Conradi a. Schönebeck.
Herman Crusius a. Deutsch in d. Altmark [Siestedt.]
Victor von Fischer a. Danzig [M.]
Julius Freytag a. Dodendorf.
Oskar Fritze.
Gustav Hartmann.
Ludwig Henz.
Wilhelm Jellinghaus.
Bruno Käsebier a. Schönebeck.
Rudolf Kornfeld.
Wilhelm Kreuzmann.
Friedrich Kückenthal a. Hasserode [Hakeborn.]
Albert Lagemann a. Wanzleben.
Rudolf Lösener.
Wilhelm Luther a. Schönebeck.
Karl Maquet.
Philipp Maquet.
Gustav Müller a. Salbke.
Wilhelm Naumann a. Osterweddingen.
Hermann Ohlendorff a. Belgern [Loburg.]
Hermann Peters.
Franz Rudolphi a. Dammendorf Halle.
Louis Schieß.
Theodor Schmidt a. Uhrsleben.
Friedrich Theune a. Groß-Sa[illegible] [Hermsdorf.]
Ferd. Tuckermann.
Karl Ursinus.
Eduard Wiermann.
Friedrich Zernial } a. Cleve [Ne[illegible]
Ernst Zernial } den[illegible]ben.]
Julius Ziecher [Ochtmersleben.]

Ober-Quinta (41.)

Julius Berger a. Nordhausen [M.]
Adolf Bussenius a. Sohlen [Wellen].
Rudolf Costenoble.
Wilhelm Deppe.
Karl Dynnebier.
Theodor Ernst a. Falkenburg in Pommern.
Hugo Förste.
Walter Heinecke aus Schönebeck.
Adolf Hentze.
Wilhelm Heuckenkamp.
Gustav Heyer [Sudenburg].
Emil Jahn a. Loburg [M.]
Ernst Karnstedt.
Heinrich Knoche.
Otto Koch a. Gr. Rossau b. Osterburg.
Wilhelm Könecke a. Gr.-Wanzleben.
Rudolf von Kotze.
Ernst Krüger.
Rudolf Kühne a. Berlin [M.]
Wilhelm L'hermet.
August Maquet.
Oskar Mehlhose a. Barleben.
Robert Möhring.
Reinhold Nesemann a. Bahrendorf.
Gustav Payendieck.

as Pfordte a. Bitterfeld.
inand Piatscheck.
Rejall.
elm Riedel a. Neuhaldensleben.
inand Ritter.
ist Scharrer.
Arnold Schnarr a. Burg [Sudenburg].
Adolf Schotte.
Christian Schünemann a. Ochtmersleben.
Wilhelm Starke a. Gr. Salze.
Hermann Sucro.
Eduard Ulrich a. Schackensleben.
Richard Waltenberg a. Leitzkau [M.]
Rudolf Weise a. Derenburg [Neue Neustadt].
Hermann Wilborn.
Wilhelm Zernial a. Neuhaldensleben.

Unter-Quinta (64.)

von Alemann a. Altenplathow.
cht Anstensen a. Beiendorf.
v Biermann } a. Errleben.
ann Biermann }
Brösel a. Tangermünde [Neue Neustadt-Magdeb.]
st Burchardt.
Clement.
rich Dannenberg a. Schneitlingen.
rd Deneke.
rich Duchstein a. Bukau.
Ebeling.
lm Ferchland.
rd Fischer a. Groß-Wanzleben [M.]
milian Fischer.
Freundt a. Kl. Paschleben b. öthen [Neue Neustadt Magdeb.]
rich Fröhlig a. Ribbendorf b. Beferlingen.
Grobe a. Calbe a. d. S.
Grosse.
nn Günther.
v Haug.
Heyn.
Albert Hildebrandt.
August Kämmerer a. Heinrichsberg.
Karl Käsemacher.
Robert Kleinecke a. Neuhaldensleben.
Karl Knevels.
Julius König.
Hugo Kühne a. Stolberg [M.]
Alwin Kummer a. Bahrendorf.
Hermann Laborde.
Theodor Liepelt.
Adolf Lingner.
Gustav Maquet.
Bernhard Meyer.
Albert Metz a. Brandenburg [M.]
Otto Muths.
Ludwig Otto.
Ulrich Paasche a. Neuhaldensleben
Richard Paasche a. Althaldensleben [Neue Neustadt-Magdeburg.]
Fritz Pielert.
Friedrich Roch.
Herman Rönsch.
Louis Ruprecht a. Schönebeck. [M.]
Herman Saalwächter a. Gommern.
Adolf Sasse.
Adolf Scherping a. Olvenstedt.
Julius Schirrmeister a. Koburg [M.]
Adolf Schmelzer a. Commende Bergen b. Seehausen im Magdeburgischen.
Rudolf Schnackenburg a. Glatz [M.]
Herman Schönfeldt a. Calbe a. d. S. [M.]
Heinrich Schrader.
Gustav Seipke a. Kaltenborn b. Oebisfelde.
Adolf Stampe.
Wilhelm Stöffler a. Westerhüten.
Hugo Stötzer a. Prenzlau [M.]
Adolf Teitge a. Loburg [Gr. Ottersleben].
Albert Thiele a. Salzwedel [M.]
Emil Trenkmann.
Theodor Uhlich a. Pömmelte [M.]
Julius Voigtel.
August Wernecke a. Buckau.
Theophil Wieruszewsky.
Paul Wolfart.
Louis Wolter.

Sexta (78).

o Baensch.
nn Bauermeister.
Behrendt a. Schönebeck.
Böse a. Leitzkau [M.]
Brockhaus.
Brockhaus.
m Brünicke.
Bühling.
Bühling.
Clement.
Damm.
Dankworth.
Feber a. Neust. Magdeb. [M.]
on Fischer a. Danzig [M.]
h Fischer.
Freye.
Fritze.
Hericke.
Hewert.
Hrüson.
Haack.
s Heinrichs a. Ochtmersleben
euhaldensleben.]
emptenmacher.
m Höndorf.
Horch.
Humbert a. Berlin [Magdeb.]
Albert Ibold.
Hermann Jourdan.
Hans von Kaltenborn.
Heinrich Kaiser.
Ferdinand Köhler.
Robert Kohls.
Hermann Kost a. Wellen [M.]
Louis Kruse a. Hülsebeck [M.]
Karl Kuchenbuch a. Sudenburg-Magd.
Adolf Kühne.
Otto Künne.
Louis Lange a. Heinrichsberg [Niegripp.]
Hermann Laue.
Ludwig Lehmann a. Stendal [M.]
Udo Lorenz.
Adolf Luber.
Robert Maaß.
Albert Maquet.
Otto Marth a. Colberg [M.]
Gustav Meitzendorff.
August Nagel a. Frose.
Wilhelm Nagel a. Wackersleben.
Adolf Naumann.
Otto Nolte aus Rätzlingen.
Alwin Panzer a. Nedlitz [Swinemünde.]
Bernhard Pape a. Hohen-Leina [M.]
Wilhelm Papendieck.
Gustav Prey a. Berlingerode [M.]
Wilhelm Ranzow.
Otto Reibe.
Franz Robolsky.
Fritz v. Rosenberg a. Frankfurt a. O. [M.]
Albert Rosenbrock a. Sudenb.-Magd.
Wilhelm Rost.
Louis Rückert.
Gustav Ruprecht a. Schönebeck [M.]
Otto Schäffer a. Groppendorf.
Fritz Schieß.
Albert Schildt a. Hasselburg.
Rudolf Schmilinsky.
Georg Schneider.
Wilhelm Schubert.
Friedrich Sens a. Prödel.
Friedrich Spamann a. Sudenb.-Magd.
Emil Stahlknecht a. Neuhaldensleben.
Karl Stein.
Gustav Stock [Neue Neust.-Magdeb.]
Theodor Teichner.
Wilhelm Thiele.
Friedrich Totte a. Halberstadt [M.]
Heinrich Winselmann a. Niederndodeleben.
Leo von Wulffen a. Pietzpuhl.

Oeffentliche Prüfung im Domgymnasium zu Magdebu

am 26. März 1847.

Vormittag von 8 bis 12 Uhr.

Deutsch in Sexta (Hr. Lehrer Meyer).
Lateinisch in Unter-Quinta (Hr. Lehrer Hase).
Arithmetik in Ober-Quinta (Hr. Lehrer Weise).
Deutsch und Lateinisch in Unter-Quarta (Hr. Prof. Pax).
Mathematik in Ober-Quarta (Hr. Candidat v. h. Sch.-A. Gorgas).
Geschichte und Geographie in Unter-Tertia (Hr. O. L. Sauppe).

Nachmittag von 2 bis 4 Uhr.

Französisch in Ober-Tertia (Hr. O. L. Wolfart).
Griechisch in Secunda (Hr. Prof. Wolf).
Griechisch in Prima (Hr. Prof. Dr. Sucro).

Druck und Papier von E. Baensch jun. in Magdeburg.

Programm

des

Königl. Domgymnasiums zu Magdeburg,

zu Ostern 1848

herausgegeben

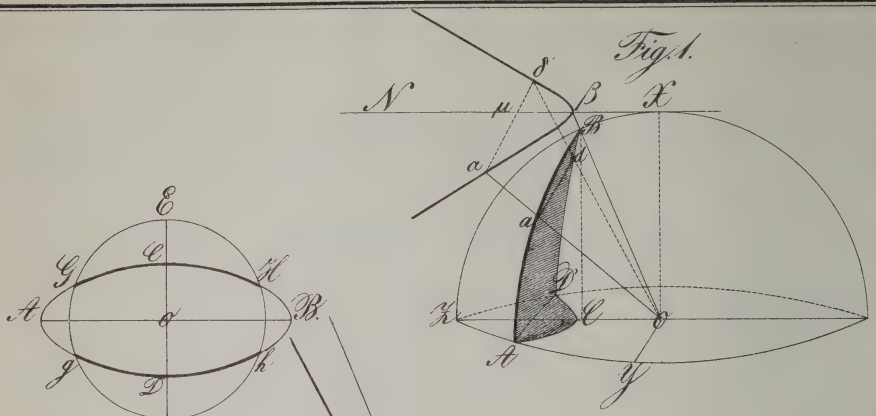
vom

Lehrer-Collegium.

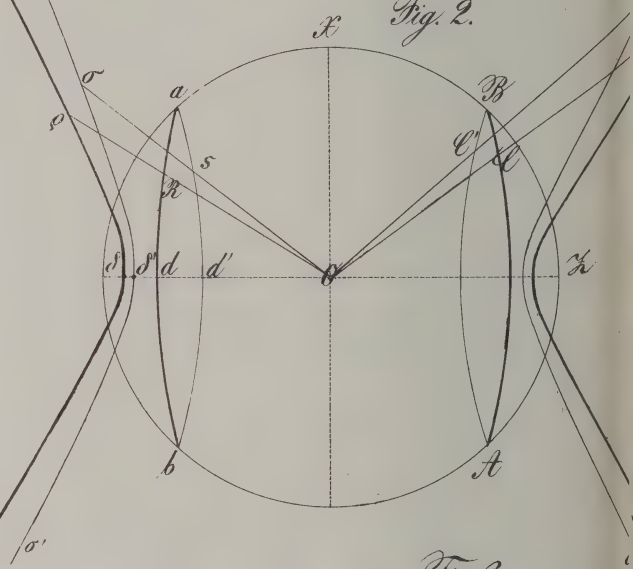
Inhalt: 1. Ueber die Analysis auf der Kugel. (Fortsetzung der im vorjährigen Programme gelieferten Abhandlung.) Von R. Gorgas.
2. Schulnachrichten über den Zeitraum von Ostern 1847 bis Ostern 1848.

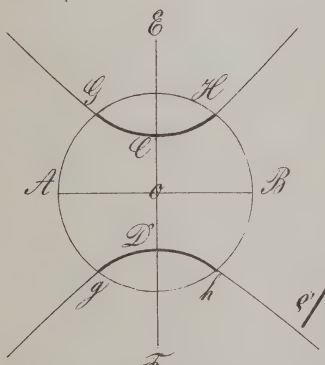
10.

Magdeburg, 1848.
bei W. Heinrichshofen.



zu Cap. III. §9.





zu Cap. III. §9.

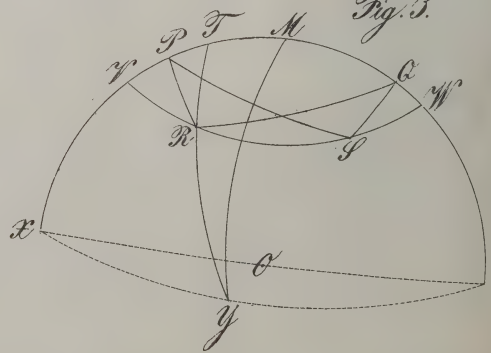


Fig. 4.

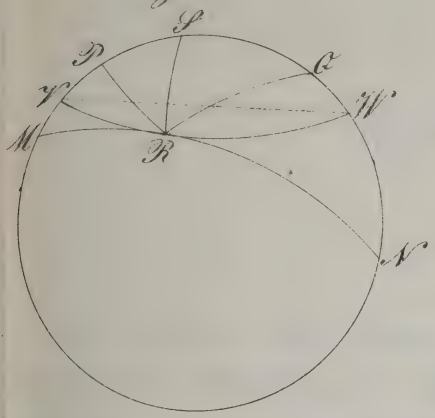


Fig. 5.

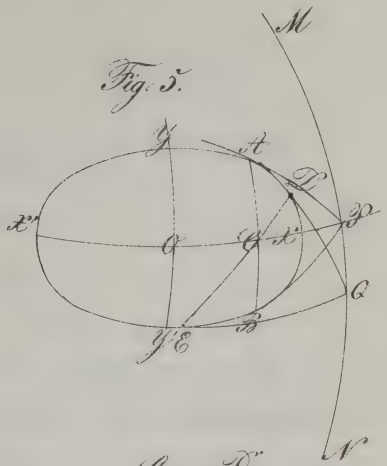


Fig. 6.

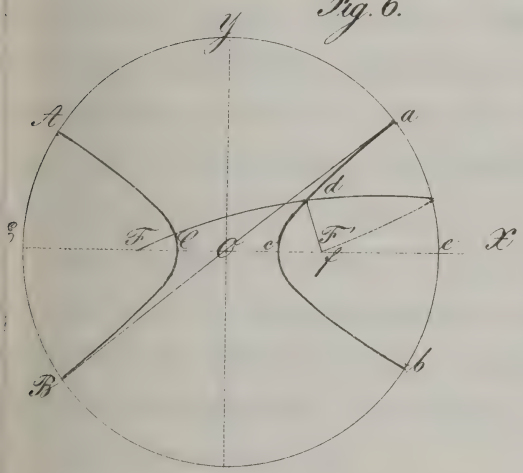


Fig. 7.

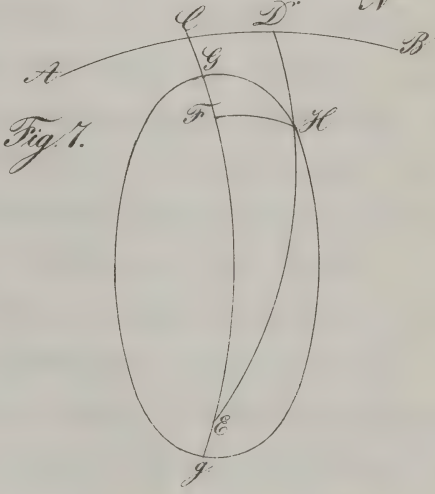
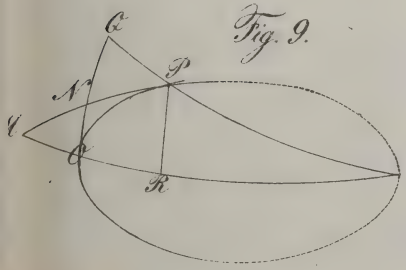


Fig. 9.



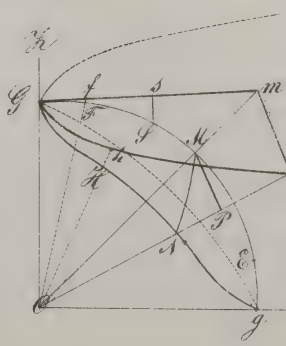


Fig. 8.

Lith. Inst. von E. Baumert jun. in Magdeburg.

Vorwort.

Im vorjährigen Osterprogramm stellte ich die wichtigsten Lehrsätze der sphärischen Analysis über die Bestimmung der Lage von Punkten und Normalkreisbogen auf der Kugeloberfläche, und über die wichtigsten Eigenschaften der Kugelkreise zusammen, und leite diese aus einer Reihe entsprechender Sätze der Analysis im Raume mit Hülfe der geraden und perspectivischen Projectionen her, um dadurch die Verwandschaft beider, der Kugeloberfläche und Ebne, in mannigfacher Beziehung darzulegen, zugleich auch, um zu zeigen, wie die Kugelcurven sich als Durchschnittslinien zwischen bestimmten gekrümmten Oberflächen (cylindrischen und conischen) und der Oberfläche der Kugel ergeben.

Diese Lehrsätze umfaßte Cap. I., II. und III. 1.; zuletzt war der Kreis, als Curve ersten Grades auf der Kugel, Gegenstand der Untersuchung. Ich gebe nun im vorliegenden zweiten und folgenden Abschnitte des dritten Capitels die Theorie der sphärischen Curven, die den Kegelschnitten auf der Ebne entsprechen und daher als Kugelkegelschnitte bezeichnet werden sollen.

Ueber die

Analysis auf der Kugel.

(Fortsetzung der im vorigen Oster-Programm gelieferten Abhandlung.)

Von

R. Gorgas,
Candidat des höheren Schulamts.

(Fortsetzung des dritten Capitels.)

Von den Kugelcurven zweiten Grades.

II. Die Ellipse auf der Kugel.

§. 7.

Herleitung der Gleichung durch senkrechte Projection.

Eine durch den Mittelpunkt der Kugel und die räumliche XY-Ebne gelegte Ebne er eine Ellipse, deren Coordinaten aus ihrem, zugleich der Kugel, Mittelpunkte gerechnet werden deren halbe $\left\{\begin{matrix}\text{kleine}\\\text{große}\end{matrix}\right\}$ Achse $\left\{\begin{matrix}=b\\=a\end{matrix}\right\}$ in der $\left\{\begin{matrix}Y=\\X=\end{matrix}\right\}$ Achse des räumlichen Systems liegt: ihre chung ist alsdann:

$$(1.)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Nach Cap. I., §. 1. (3.) ist aber $x = r \sin \xi$, $y = r \sin \eta$, folglich ist

$$(2.)\quad \frac{r^2 \sin^2 \xi}{a^2}+\frac{r^2 \sin^2 \eta}{b^2}=1$$ auch eine Ellipsengleichung; wird

$\left\{\begin{matrix}\eta=0\\\xi=0\end{matrix}\right\}$, so wird $\left\{\begin{matrix}\xi=A\\\eta=B\end{matrix}\right\}$, wobei 2A die große Achse, 2B die kleine Achse der K ellipse bedeutet, die durch Normalkreis-Bogen dargestellt sind;

dann ist in (2.) $\left\{\begin{array}{l}\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{\sin^2 A}\\ \frac{r^2}{b^2} = \frac{1}{\sin^2 B}\end{array}\right\}$; so daß die Gleichung der projicirten Kugelellipse

d: (3.) $\frac{\sin^2 \xi}{\sin^2 A} + \frac{\sin^2 \eta}{\sin^2 B} = 1.$

Setzen wir nun [nach Cap. 1., §. 1. (5.)] $\left\{\begin{array}{l}\sin^2 \xi = \text{tang}^2 \xi' \cos^2 \delta;\\ \sin^2 \eta = \text{tang}^2 \eta' \cos^2 \delta;\end{array}\right\}$ so wird

(4.) $\frac{\text{tang}^2 \xi'}{\sin^2 A} + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\sin^2 B} = \frac{1}{\cos^2 \delta} = 1 + \text{tang}^2 \delta = 1 + \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta';$

raus endlich herzuleiten ist:

(5.) $\frac{\text{tang}^2 \xi'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\text{tang}^2 B} = 1$, ebenfalls die Gleichung einer Kugelel-

ise, deren $\left\{\begin{array}{l}\text{große}\\ \text{kleine}\end{array}\right\}$ halbe Achse $\left\{\begin{array}{l}A\\ B\end{array}\right\}$ ist, und deren Mittelpunkt mit dem der

pärischen Coordinaten zusammenfällt.

§. 8.

Perspectivische Projection der Ellipse.

Auf einer der räumlichen XY-Ebne parallel-laufenden Tangentenebne der Kugel sei eine pse verzeichnet, deren große Achse in die XZ-Ebne, deren kleine Achse in die YZ-Ebne, deren telpunkt also in den Berührungspunkt der Kugel und Ebne fällt (d. h. in den Anfangspunkt sphärischen Coordinaten): so ist die Gleichung der Ellipse

(1.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

Relationen zwischen x, y und dessen perspectivischer Projection auf der Tangentenebne ξ', η'

aber: $\left\{\begin{array}{l}x = r \text{ tang } \xi'\\ y = r \text{ tang } \eta'\end{array}\right\}$; ferner ist $\left\{\begin{array}{l}a = r \text{ tang } A\\ b = r \text{ tang } B\end{array}\right\}$; also wird:

(2.) $\frac{\text{tang}^2 \xi'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\text{tang}^2 B} = 1$; die Gleichung der projicirten Kugelel-

e, deren Mittelpunkt im Anfange der sphärischen Coordinaten liegt.

Anmerkung. Aus §. 6 und 7 folgt, daß eine Kugelellipse

1) die Durchschnittscurve zwischen einer geraden elliptischen Cylin-

berfläche und der Kugeloberfläche sei, wenn die Achse des Cylinders durch Centrum der Kugel geht; und ferner aus §. 8., daß sie:

2) die Durchschnittscurve zwischen einer geraden elliptischen Kegel-

oberfläche und der Kugeloberfläche sei, wenn die Spitze des Kegels im Centr der Kugel liegt.

In beiden Fällen wird dieselbe schneidende Oberfläche, zu beiden Seiten des Kugelmi punktes genugsam verlängert, zwei diametral entgegengesetzte Kugelellipsen von völ gleicher Gestalt und Größe geben, wie es sich bei der früher erwähnten Doppeldeut keit der trigonometrisch-quadratischen Ellipsengleichung, (wo selbst der Unterschied Vorzeichen von sin. und tang. verschwindet), nicht anders erwarten läßt.

§. 9.

Anderweitige senkrechte Projectionen der Kugelellipse auf die räumlichen C dinaten-Ebnen.

Nach §. 6. hat eine aus dem Mittelpunkte der sphärischen Coordinaten verzeichnete Kr Ellipse zur senkrechten Projection auf der XY-Ebne eine Ellipse mit der Gleichu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Jetzt wollen wir die Natur ihrer senkrechten Projectionen auf andere Ad ebnen untersuchen:

a) Auf der XZ-Ebne:

Die Gleichung der Ellipse auf der Kugel ist:

$$(1.)\quad \frac{\text{tang}^2\,\xi'}{\text{tang}^2\,A} + \frac{\text{tang}^2\,\eta'}{\text{tang}^2\,B} = 1$$

Da nun für die senkrechte Projection $\text{tang}\,\xi' = \frac{x}{z}$, $\text{tang}\,\eta' = \frac{y}{z}$ ist, so erhält man aus (1.) dadu

$$(2.)\quad z^2 = \frac{x^2}{\text{tang}^2 A} + \frac{y^2}{\text{tang}^2 B}.$$

Nun ist aber, der Kugeloberflächen-Gleichung wegen:

$$(3.)\quad y^2 = r^2 - (x^2 + y^2);$$

also daraus:

$$(4.)\quad \frac{\frac{x^2}{r^2\,\text{tang}^2\,A} + \frac{z^2}{r^2\cos^2 B}}{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}$$ als Gleichung der Kurve, welche d Projection der Kugelellipse auf die XZ-Ebne entsteht. Diese Kurve ist eine El deren halbe große Achse $= \frac{r\,\text{tang}\,A}{\sqrt{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}}$, deren halbe kleine Achse $= r\cos B$ und Mittelpunkt im Kugelcentrum ist. Da aber der Bruch $\frac{\text{tang}\,A}{\sqrt{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}} > 1$ ist, weil

en Umständen $\text{tang}^2 A > \text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B$, so ist auch die halbe große Achse dieser Ellipse ößer, als der Kugelradius; daher wird auf dem, die XZ-Ebne bildenden größten Kugelkreise se Ellipse nicht ganz zur Vollendung gelangen, sondern nur in zwei congruenten Bogen f beiden Seiten des Kugelmittelpunkts, in gleicher Entfernung von ihm, erscheinen, wie beiste- ide Figur andeutet. Jeder dieser Bogen GH und gh für sich ist die Projection einer Kugelellipse, e ganze Projections-Ellipse also bezieht sich auf zwei Kugelellipsen, die ein- der diametral gegenüberliegen, und die zu derselben Gleichung gehören.

b.) Projection der Kugelellipse auf die YZ-Ebne:

Wenn wir die Gleichung der Projection einer Ellipse mit der Gleichung:

(1.) $\frac{\text{tang}_2\ \xi'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang}^2\ \eta'}{\text{tang}^2 B} = 1$, dargestellt durch die Fußpunkte ihrer räumlichen sciſſenlinie, auf der YZ-Achse entwickeln wollen, so muß aus der Gleichung, die für (1.) zu en ist, nämlich:

(2.) $\frac{x^2}{\text{tang}^2 A} + \frac{y^2}{\text{tang}^2 B} = z^2$; das x eliminirt werden. Nun ist aber:

(3.) $x^2 = r^2 - (y^2 + z^2)$; also wird:

(4.) $\frac{z^2}{r^2 \cos^2 A} - \frac{y^2}{\frac{r^2 \text{tang}^2 B}{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}} = 1$ als Gleichung der YZ-Projection für Kugelellipse; diese Gleichung gehört aber zu einer Hyperbel, deren Centrum dem Mittelpunkte der Kugel liegt, deren halbe kleine Achse $= \frac{r \text{ tang } B}{\sqrt{\text{tang}^2 A - \text{tang}^2 B}}$, en halbe große Achse $= r \cos A$ ist, die also auf der Normalkreisebne der YZ-Coor- aten so erscheint, wie die beistehende Figur angiebt. Die beiden zusammengehörigen ichen Hyperbelbogen GH, gh, welche auf dieser Ebne liegen, bedingen also der zwei, von einander diametral abstehende Kugelellipsen, die zu derselben eichung gehören.

§. 10.

Andere Projectionscurven der Kugelellipse.

Es sei (Fig. 1.) NX der Durchschnitt einer Tangentenebne an die Kugel in dem End- kte der X-Achse; ABD sei die eine Hälfte einer Kugelellipse; die Projection derselben auf der -Ebne sei die (in §. 9 betrachtete) Hyperbel ACD und ad sei ||AD; denkt man sich nun vom elcentrum O aus einen Leitstrahl durch alle Punkte der Ellipse continuirlich fortbewegt, so be- ibt dieser auf der Tangentenebne NX eine Curve $\alpha\beta\delta$, deren Natur untersucht werden soll.

Man nehme an, dem Punkte a der Kugelellipse entspreche der Punkt α der Tangentenebne, u
a sei durch die Coordinaten des Raums $x''\ y''\ z''$ gegeben, α aber durch $x'\ y'\ z'$, so hat m
folgende Relationen:

(1.) $x' = r$;

(2.) $\frac{x'}{z'} = \frac{x''}{z''}$ und $\frac{y'}{z'} = \frac{y''}{z''}$; ferner ist:

(3.) $\frac{x''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 A} + \frac{y''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 B} = 1$; als Gleichung der Kugelellipse: folglich

(4.) $\begin{cases} \frac{r^2}{z'^2 \operatorname{tang}^2 A} + \frac{y'^2}{z'^2 \operatorname{tang}^2 B} = 1, \text{ oder} \\ \frac{z'^2}{r^2 \operatorname{cotang}^2 A} - \frac{y'^2}{r^2 \operatorname{tang}^2 B \operatorname{cotang}^2 A} = 1, \text{ d. h. die Gleichung ein} \end{cases}$

Hyperbel, deren halbe große Achse $= r \operatorname{cotang} A$, deren halbe Nebenachse $=$
$r \operatorname{tang} B \operatorname{cotang} A$ ist.

Zusatz. Nach §. 9. ist die Hyperbel **ACD** als die senkrechte Projection dersel
Ellipse auf die **YZ**-Ebne, durch die halbe Hauptachse $A' = r \cos A$ und die halbe Neb
achse $B' = \frac{r \operatorname{tang} B}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 A - \operatorname{tang}^2 B}}$ gegeben; sind die Elemente der eben gefundenen Hyperbel
und B'', so ist alsdann: $A' : A'' = \sin A : 1$ und $B' : B'' = \operatorname{tang} A : \sqrt{\operatorname{tang}^2 A - \operatorname{tang}^2}$

§. 11.

Fortsetzung.

Legt man aber eine Tangentenebne an das Ende der räumlichen **Y**-Achse, also para
mit der **XZ**-Ebne, so erhält man auf dieser ebenfalls eine Curve durch perspectivische Project
nämlich (Fig. 2.) $\varrho\varrho'$ und $\alpha\gamma$ (und unterhalb der Kugel $\sigma\sigma'$ und $\alpha'\gamma'$), deren Gleichung gesucht w
Es entspricht z. B. dem Punkte **R** der linken Kugelellipse oberhalb der Kugel auf der Ebne
Punkt ϱ mit den Coordinaten $x'\ y'\ z'$, während **R** durch $x''\ y''\ z''$ gegeben sei. Dann ist

(1.) $y' = r$;

(2.) $\frac{x'}{z'} = \frac{x''}{z''}$ und $\frac{y'}{z'} = \frac{y''}{z''}$; ferner ist:

(3.) $\frac{x''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 A} + \frac{y''^2}{z''^2 \operatorname{tang}^2 B} = 1$ die Gleichung der Kugelellipse: daraus:

(4.) $1 = \frac{z'^2}{r^2 \operatorname{cotang}^2 B} - \frac{x^2}{r^2 \operatorname{tang}^2 A \operatorname{cotang}^2 B}$; die Gleichung einer

rbel, deren halbe Hauptachse = r cotang B, deren halbe Nebenachse
= r tang A cotang B ist.

Anmerkung 1. Nennt man diese halben Achsen A‴ und B‴, so ist (aus §. 10.)
A : A‴ = tang B : tang A, und $B'' : B''' = \frac{\text{tang } B}{\text{tang } A} : \frac{\text{tang } A}{\text{tang } B} = \text{tang}^2 B : \text{tang}^2 A$, also
$A : A''' = \sqrt{B''} : \sqrt{B'''}$.

Anmerkung. 2. Also ist eine Kugelellipse die Durchschnittscurve zwischen
er Kugeloberfläche und

1.) einem graden elliptischen Cylinder
2.) einem graden Hyperbel-Cylinder } deren Achse durch O geht,

3.) der Oberfläche von 4 zusammengehörigen hyperbolischen Kegel-
ern, deren Spitze im Centrum der Kugel liegt. Alle diese Oberflächen geben in
er Totalität bei gehöriger Erweiterung zwei Kugelellipsen, die einander diametral gegen-
liegen, und unter sich völlig congruent sind.

§. 12.

Analogon zur Fadenconstruction der ebnen Ellipse.

In zwei Punkten der Kugeloberfläche, welche um O beschrieben ist (Fig. 3.), sei eine biegsame
befestigt, deren Länge (= 2 A) größer, als die Entfernung (= 2 E) ihrer beiden End-
te P und Q ist. Durch Anspannen dieser Linie entsteht ein, in allen Lagen darzustellender
irischer Winkel; z. B. PRQ, der von zwei Normalkreisbogen gebildet wird. Sein Scheitel
dann eine gekrümmte, in sich zurückkehrende Linie auf der Kugel um P und Q beschreiben,
Gleichung gesucht werden soll. Man halbire $\overset{\frown}{PQ}$ in M, mache $\overset{\frown}{MY} \perp \overset{\frown}{PQ}$ und = 90°,
z. B. durch R den senkrechten Bogen YT (= 90°), nenne den Bogen RT = η, den Bogen
= ξ' (cf. Cap. I. §. 1.); so ist $\overset{\frown}{VW} = 2$ A, PM = E, MN sei = B. Nun findet man
: cos PR = cos η cos (E − ξ'); und cos QR = cos η cos (E + ξ');

$\cos QR = \cos(2A - PR) = \cos 2A \cos\eta \cos(E - \xi') + \sin 2A \sqrt{1 - \cos^2\eta \cos^2(E - \xi')}$;

$\sin^2 2A = \cos^2\eta\,(\cos^2[E + \xi'] + \cos^2[E - \xi'] + 2\cos[E + \xi']\cos[E - \xi']\cos 2A)$; also

$= \cos^2\eta \left[\frac{\sin^2 E \sin^2 \xi'}{\sin^2 A} + \frac{\cos^2 E \cos^2 \xi'}{\cos^2 A}\right]$;

alb auch: $\frac{1}{\cos^2\eta \cos^2\xi} = \frac{1}{\cos^2\delta} = \frac{\sin^2 E}{\sin^2 A} \text{tang}^2\xi' + \frac{\cos^2 E}{\cos^2 A}$;

araus: $\frac{\text{tang}^2 \xi'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\text{tang}^2 B} = 1$. d. h. die Gleichung einer Ellipse auf der Ku-
lberfläche.

Anmerkung 1. Diese Gleichung ergiebt sich auch, wenn man die Summe der R. Vectores statt $= 2\,A$ zu nehmen, $= 180 - 2\,A$ annimmt; dann aber erhält man von d selben Ellipsenbrennpunkten P und Q aus auf der andern Halbkugel die der vorigen diamet gegenüberstehende, congruente Ellipse deren Brennpunkte denen (P und Q) der vorigen ebenf diametral gegenüberliegen.

Anmerkung 2. Die Ellipsenelemente A, B und E haben unter sich folgende Beziehu

$$\cos A = \cos B \cos E;$$

ist also $\cos A = \cos B$, so muß $\cos E = 1$ sein, d. h. $E = 0$, welche Bedingung auf Kugelkreis hinführt.

Ist aber $2\,A = 180^0$, so ist $\cos A = \cos 90^0 = 0$; dann muß entweder $\cos B = 0$ d. h. $\cos A = \cos B$, d. h. die Ellipse ein größter Kugelkreis sein, oder $\cos E = 0$, d $E = 90^0$, also $E = A$; dann ist $B = 0$ zu setzen, und auch eine solche Ellipse wird größter Kugelkreis werden.

§. 13.

Die Tangente der Kugelellipse.

Die Gleichung der Ellipse für den Punkt $\xi'\ \eta'$ ist:

(1.) $\dfrac{\operatorname{tang}^2 \xi'}{\operatorname{tang}^2 A} + \dfrac{\operatorname{tang}^2 \eta'}{\operatorname{tang}^2 B} = 1$; die Gleichung eines Normalkreises durch dense Punkt ist ferner

(2.) $\dfrac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \dfrac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1$; daraus:

(3.) $\operatorname{tang}^2 \xi - \dfrac{2 \operatorname{tang} m \operatorname{tang}^2 A \operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 B} + \dfrac{(\operatorname{tang}^2 n - \operatorname{tang}^2 B) \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2}{\operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2}$

also (4.) $\operatorname{tang} \xi' =$

$$\frac{\operatorname{tang} m \operatorname{tang}^2 A \operatorname{tang}^2 n}{\operatorname{tg}^2 n \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 m \operatorname{tg}^2 B} \pm \frac{\operatorname{tang} m \operatorname{tang} A}{\operatorname{tg}^2 n \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 m \operatorname{tg}^2 B} \sqrt{\operatorname{tg}^2 B (\operatorname{tg}^2 n \operatorname{tg}^2 A + \operatorname{tg}^2 m \operatorname{tg}^2 B - \operatorname{tg}^2 m \operatorname{tg}^2}$$

Diese Gleichung für $\operatorname{tang} \xi'$ zeigt durch ihr $\pm$ an, daß ein Normalkreis im Allgeme zwei Punkte mit einer Ellipse gemeinschaftlich haben könne; soll daraus aber eine Tange werden, so muß dies Paar von Durchschnittspunkten zu einem Punkte zusammenfallen, d. h. Glied mit $\pm$ in (4.) muß $= 0$ werden.

Alsdann wird, für den Fall der Berührung:

(5.) $\operatorname{tang}^2 n \operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 B = \operatorname{tang}^2 m \operatorname{tang}^2 n$ als Bedingung die Constanten,

$$(6.)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} \xi' &= \frac{\operatorname{tang}^2 A}{\operatorname{tang} m} \\ \operatorname{tang} \eta' &= \frac{\operatorname{tang}^2 B}{\operatorname{tang} n} \end{aligned}\right\}$$ als Bedingung für die Coordinaten des Berührungspunkts.

Da nun, nach (1.) $\frac{\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 1$, so ist für die Tangente

$$(7.)\quad \frac{\operatorname{tang}^2 A}{\operatorname{tang}^2 m} + \frac{\operatorname{tang}^2 B}{\operatorname{tang}^2 n} = 1.$$ Ihre allgemeinste Gleichung ist aber, in Bezug den Punkt $\xi'\ \eta'$:

$$(8.)\quad \frac{\operatorname{tang} X' - \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang} m} + \frac{\operatorname{tang} Y' - \operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang} n} = 0,$$

aus, mit Hülfe von (6.), entsteht:

$$(9.)\quad \frac{\operatorname{tang} X' \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang}^2 A} + \frac{\operatorname{tang} Y' \operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang}^2 B} = 1$$ als die Gleichung der sphä-chen Ellipsen-Tangente.

Anmerkung. Diese Gleichung ist sehr leicht aus der für eine Tangente an die ebne lpse herzuleiten. Dieselbe ist:

$\frac{x'}{\ } + \frac{Y'\ y'}{b^2} = 1$, wenn diese Ellipse auf einer Tangentenebne liegt, die die Z-Achse in n Endpunkte berührt. Projicirt man diese Ellipsen-Tangente sammt ihrer Curve perspectivisch die Kugel, aus deren Centrum, so ist für sie nach dem oben angeführten Reductions-Verfahren twickeln: $\frac{\operatorname{tang} X' \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang}^2 A} + \frac{\operatorname{tang} Y' \operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang}^2 B} = 1$; wie oben.

§. 14.

Ueber die Pole einer Ellipsentangente.

Nach Cap. II. §. 9. (3.) gehört zu jeder Ellipsentangente von der Gleichung:

$\frac{X' \operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang}^2 A} + \frac{\operatorname{tang} Y' \operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang}^2 B} = 1$ ein Paar von Polen, die durch die Coordinaten $a'\ b$, $\alpha'\ \beta'$ bestimmt werden, so daß:

$$(1.)\ \operatorname{tang} a' = \frac{+\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang}^2 A} \text{ und } \operatorname{tang} b' = \frac{+\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang}^2 B};$$

$$(2.)\ \operatorname{tang} \alpha' = \frac{-\operatorname{tang} \xi'}{\operatorname{tang}^2 A} \text{ und } \operatorname{tang} \beta' = \frac{-\operatorname{tang} \eta'}{\operatorname{tang}^2 B}$$ sein muß. Aus (1.) läßt sich m herleiten:

(3.) $\text{tang}^2 a' \text{tang}^2 A + \text{tang}^2 b' \text{tang}^2 B = 1$; setzt man nun a' und b' veränderliche Coordinaten, wenn ξ' und η' sich ändern, und $\text{tang } A = \frac{1}{\text{tang } M'}$, so wie tang B $\frac{1}{\text{tang } N'}$; also: $\left\{\begin{matrix} A = 90 \pm M \\ B = 90 \pm N \end{matrix}\right\}$, so wird aus (3.)

(4.) $\frac{\text{tang}^2 a'}{\text{tang}^2 M} + \frac{\text{tang}^2 b'}{\text{tang } N^2} = 1$; als Gleichung einer neuen Ellipse, der alle die Tangentenpole der erst-gegebenen liegen, und deren halbe Ach sich um 90° von denen der frühern unterscheiden. Dasselbe gilt für den diametral a' b' verschiedenen zweiten Pol $\alpha' \beta'$. Da aber $A > B$, also auch $\text{tang } A > \text{tang } B$ ist jedenfalls $\text{tang } M [= \text{tang } (90° \pm A)] < \text{tang } N [= \text{tang } (90° \pm B)]$ also steht $\left\{\begin{matrix} \text{große} \\ \text{kleine} \end{matrix}\right\}$ Achse der Pol-Ellipse senkrecht auf der $\left\{\begin{matrix} \text{kleinen} \\ \text{großen} \end{matrix}\right\}$ Achse der anfäng gegebenen, und zwar im Anfangspunkte der sphärischen Coordinaten, der gleich beider Ellipsen Mittelpunkt ist.

Anmerkung. Wir wollen diese von einander in der §. 14 geschilderten Weise abhä gen Ellipsen auf der Kugel complementäre Ellipsen nennen, so wie man die sich diam gegenüberstehenden, durch dieselbe Gleichung gegebenen, supplementäre Ellipsen ne kann, da ihre Abstände durch 2 R, jene aber durch 1 R bestimmt werden.

§. 15.

Einige Eigenschaften zweier complementärer Ellipsen.

1) Die Abhängigkeit zweier complementärer Ellipsen von einander ist gegenseitig, jede von ihnen kann die ursprüngliche, die andere die abgeleitete sein; denn da $\text{tang}^2 A = \frac{1}{\text{tang}$ und $\text{tang}^2 B = \frac{1}{\text{tang}^2 M}$ ist, so ist auch $\text{tang}^2 M = \frac{1}{\text{tang}^2 B}$ und $\text{tang}^2 N = \frac{1}{\text{tang}^2 A}$.

2) Die complementären Ellipsen e und e' zweier sich diametral gegenüberliegender Ell E und E' sind unter sich wiederum diametral entgegengesetzt.

3) Deshalb sind die Bestimmungsgleichungen von Linien ꝛc., die zwei complement Ellipsen zugleich angehören, so beschaffen, daß sie durch Umtausch ihrer Elemente nicht v dert werden.

4) Zu einer Ellipse E gehört als complementär nicht blos ihre eingeschlossene e, son auch deren diametrale e'.

5) Zieht man an die einander zugehörigen Punkte P und p zweier complementärer Ellipsen und e zwei Tangenten, so stehen beide auf Pp (dem Verbindungs-Normalbogen zwischen P, p) rechtwinkelig, schneiden sich also in den dem Bogen Pp zugehörigen Polen. — Denn der Punkt $\xi'\ \eta'$ Tangente an E hat die Gleichung:

$\frac{\text{g}\,\eta'}{\text{g n}} + \frac{\text{tang}\,\xi'}{\text{tang m}} = 1$, der $\alpha'\ \beta'$ der Tangente an e, als $\xi'\ \eta'$ entsprechend,

$\frac{\text{g}\,\alpha'}{\text{g m}'} + \frac{\text{tang}\,\beta'}{\text{tang n}'} = 1$. Nun ist aber $\left\{\begin{matrix}\alpha' & \beta' \\ \xi' & \eta'\end{matrix}\right\}$ der Pol von der Tangente an $\left\{\begin{matrix}\xi' & \eta' \\ \alpha' & \beta'\end{matrix}\right\}$, folglich ist

$$(1.)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\alpha' = \frac{1}{\text{tang m}}, & \text{tang}\,\beta = \frac{1}{\text{tang n}}; \\ \text{tang}\,\xi' = \frac{1}{\text{tang m}'}, & \text{tang}\,\eta' = \frac{1}{\text{tang n}'}. \end{cases}$$

Die Verbindungslinie Pp zwischen $\xi'\ \eta'$ und $\alpha'\ \beta'$ hat aber als Gleichungen der Coordinatenachsen-Abschnitte:

$$(2.)\quad \begin{cases} \text{tang}\,\mu = \frac{\text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\eta' - \text{tang}\,\beta'\,\text{tang}\,\xi'}{\text{tang}\,\eta' - \text{tang}\,\beta'} \text{ und} \\ \text{tang}\,\nu = \frac{\text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\eta' - \text{tang}\,\beta'\,\text{tang}\,\xi'}{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\xi'}; \end{cases}$$ folglich ist (nach Einsetzen der Werthe aus (1.)) leicht zu finden, daß:

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\text{tang}\,\mu\,\text{tang m}} + \frac{1}{\text{tang}\,\nu\,\text{tang n}} = 1 \text{ und:} \\ \frac{1}{\text{tang}\,\mu\,\text{tang m}'} + \frac{1}{\text{tang}\,\nu\,\text{tang n}'} = 1 \text{ ist, d. h. daß Pp auf beiden Tangenten senkrecht steht.} \end{cases}$$

6) Die beiden Tangenten an die sich entsprechenden Punkte $\xi'\ \eta'$ und $\alpha'\ \beta'$ stehen auch einander senkrecht. Denn da $\frac{\text{tang}\,\alpha'}{\text{tang m}'} + \frac{\text{tang}\,\beta'}{\text{tang n}'} = 1$ und $\text{tang}\,\alpha' = \frac{1}{\text{tang m}}$, $\text{tang}\,\beta' = \frac{1}{\text{tang n}}$, so ist $\frac{1}{\text{tang m tang m}'} + \frac{1}{\text{tang n tang n}'} = 1$, d. h. die eine auf der andern senkrecht.

7) Sind A, B, E die Elemente der Ellipse E und A', B', E', die Elemente der Ellipse e; so ist $\cos E' = \frac{\sin B}{\sin A}$ (1.)

Da aber $\cos E = \frac{\cos A}{\cos B}$; so ist

$\cos E \cos E' = \frac{\text{tang B}}{\text{tang A}}$ (2.); und

(3.) $\frac{\cos E}{\cos E'} = \frac{\sin 2A}{\sin 2B}$; da aber alle diese Elemente durch die Gleichungen

$\left.\begin{matrix} A = 90^0 \pm B' \\ B = 90 \mp A' \end{matrix}\right\}$ unter sich zusammenhängen, so kann man in die Gleichung (1.) (2.) (3.) leicht die Elemente A', B' einführen.

§. 16.

Die Normale auf der Tangente einer Ellipse. (Fig. 4.)

Es sei MN Tangente an die Ellipse im Punkte R und SR sei senkrecht darauf erri so ist die Gleichung der Tangente, wenn R durch ξ' η' bestimmt wird:

(1.) $\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n}} = 1$;

Die Gleichung der Ellipse für diesen Punkt ist aber

(2.) $\frac{\text{tang}^2 \xi'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\text{tang}^2 B} = 1$;

Die Normale RS geht durch ξ' η', daher ist ihre Gleichung:

(3.) $\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m'}} - \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n'}} = 1$; [NB. das negative Vorzeichen von n' macht zweite Glied subtractiv;] und, da sie auf der Tangente senkrecht ist:

(4.) $\frac{1}{\text{tang m tang m'}} - \frac{1}{\text{tang n tang n'}} = 1.$

Mit Hülfe dieser Relationen erhält man

(5.) tang m tang m' = $\cos^2$ B (tang^2 A — tang^2 B); folglich muß tang^2 E tang m tang m' sein. Daraus entwickelt man:

(6.) $\frac{\text{tang m} + \text{tang E}}{\text{tang m} - \text{tang E}} = \frac{\text{tang m'} + \text{tang E}}{\text{tang E} - \text{tang m'}}$;

Da nun $\left.\begin{matrix} MQ = E + m, & PS = E - m' \\ MP = m - E, & QS = E + m' \end{matrix}\right\}$ ist, so wird aus (6.):

(7.) sin QM : sin PM = sin QS : sin PS; daraus folgt, daß der Winkel PRQ die Normale RS halbirt worden sei. Jede Normale auf einer Kugelellipsen-Tangente halbirt also den Winkel, den die zum Berührungspunkte gehörigen Radiivectoren bilden.

§. 17.

Ueber Tangentensehnen.

Erklärung. Zieht man von einem Punkte der Kugeloberfläche außerhalb einer Kugelellipse ein Tangentenpaar an dieselbe und verbindet die beiden Berührungspunkte desselben einander durch einen Normalkreisbogen, so nennt man diesen eine Tangentensehne.

Lehrsatz 1. Gehen von beliebigen Punkten eines Normalkreises, der der verlängerten großen Ellipsenachse senkrecht steht, Tangentenpaare an Ellipse, so schneiden sich die zugehörigen Tangentensehnen alle in einem nkte auf der großen Achse.

Beweis. (analytisch:) Es sei das Centrum der Kugelcoordinaten im Mittelpunkte der ɔse, die große Achse sei die X-Achse derselben: so ist

$$(1.)\quad \frac{\text{tang}^2\ \xi'}{\text{tang}^2\ A} + \frac{\text{tang}^2\ \eta'}{\text{tang}^2\ B} = 1;\ \text{als Ellipsengleichung.}$$

Von einem Punkte a' b' des Normalkreises gehen zwei Tangenten an die Ellipse in Punkten: $\left\{ \begin{matrix} u' & v' \\ x' & y' \end{matrix} \right\}$, also ist

$$(2.)\quad \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\text{tang } u' \text{ tang } a'}{\text{tang}^2\ A} + \dfrac{\text{tang } v' \text{ tang } b'}{\text{tang}^2\ B} = 1 \\ \dfrac{\text{tang } x' \text{ tang } a'}{\text{tang}^2\ A} + \dfrac{\text{tang } y' \text{ tang } b'}{\text{tang}^2\ B} = 1 \end{matrix} \right\} \text{ wegen der Tangenten.}$$

Werden diese beiden Punkte $\left\{ \begin{matrix} x' & y' \\ u' & v' \end{matrix} \right\}$ durch einen Normalkreisbogen verbunden, so schneidet be auf der X-Achse das Stück m ab, dessen Gleichung [nach Cap. II, §. 5, (3.)] ist:

$$(3.)\ \text{tang m} = \frac{\text{tang } x' \text{ tang } v' - \text{tang } y' \text{ tang } u'}{\text{tang } v' - \text{tang } y'};$$

Nun ist aber aus (2.) herzuleiten:

$$(4.)\quad \frac{\text{tang } x' \text{ tang } v' - \text{tang } y' \text{ tang } u'}{\text{tang } v' - \text{tang } y'} = \frac{\text{tang}^2\ A}{\text{tang } a'};\ \text{also ist}$$

$$(5.)\ \text{tang m} = \frac{\text{tang}^2\ A}{\text{tang } a'};\ \text{weil aber der Normalkreis, auf dem (a' b') liegt, senk-}$$

auf der X-Achse steht, so ist das darauf abgeschnittene a' ɔc. jedes Punktes desselben con-, folglich wird auch tang m einen constanten Werth erhalten, d. h. die übrigen, eben nstruirten Tangentensehnen schneiden sich auf der X-Achse in demselben Punkte, dessen tang m Abscissentangente) $= \frac{\text{tang}^2\ A}{\text{tang } a'}$ ist.

Lehrsatz II. (Verallgemeinerung des Lehrs. I.) Gehen von beliebigen Punkten ɜ beliebigen Normalkreises außerhalb einer Kugelellipse Tangentenpaare ieselbe, so schneiden sich die zugehörigen Tangentensehnen alle in einem kte innerhalb der Ellipse.

Es sei die Gleichung des beliebigen Normalkreisbogens für den Punkt (a' b'):

$$\frac{\text{tang } a'}{\text{tang } m'} + \frac{\text{tang } b'}{\text{tang } n'} = 1. \quad (1.)$$

Die Gleichung der Ellipsentangenten sind dann für die Berührungspunkte $\left\{\begin{matrix} u' v' \\ x' y' \end{matrix}\right\}$ derselb

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{tang } u' \text{ tang } a'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang } v' \text{ tang } b'}{\text{tang}^2 B} &= 1 \\ \frac{\text{tang } x' \text{ tang } a'}{\text{tang}^2 A} + \frac{\text{tang } y' \text{ tang } b'}{\text{tang}^2 B} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (2.)$$

Also wird, [wie in Lehrsatz I.] der Abschnitt m, den die Tangentensehne zwischen $\left\{\begin{matrix} u \\ x \end{matrix}\right.$ auf der X-Achse macht, gegeben durch:

$$(3.)\ \text{tang } m = \frac{\text{tang}^2 A}{\text{tang } a'} \text{ und der Abschnitt auf der Y-Achse, also n, durch}$$

$$(4.)\ \text{tang } n = \frac{\text{tang}^2 B}{\text{tang } b'}.$$

Für eine andre Tangentensehne, gehörig zum Puncte $\alpha' \beta'$ des beliebigen Norma (1.), wird also

$$(5.)\ \left\{\begin{aligned} \text{tang } \mu &= \frac{\text{tang}^2 A}{\text{tang } \alpha'}; \\ \text{tang } \nu &= \frac{\text{tang}^2 B}{\text{tang } \beta'}; \end{aligned}\right.$$

Beide Tangentensehnen schneiden sich im Punkte r' s', so ist [nach Cap. II. §. 8. Zi

$$(6.)\ \left\{\begin{aligned} \text{tang } r' &= \frac{\text{tang}^2 A\ (\text{tang } b' - \text{tang } \beta')}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'}; \\ \text{tang } s' &= \frac{\text{tang}^2 B\ (\text{tang } \alpha' - \text{tang } a')}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'}; \end{aligned}\right.$$

Da aber a' b' und $\alpha' \beta'$ auf demselben Normalkreise (1.) liegen, so ist:

$$(7.)\ \left\{\begin{aligned} \frac{\text{tang } b' - \text{tang } \beta'}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'} &= \frac{1}{\text{tang } m'} \text{ und} \\ \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } a'}{\text{tang } \alpha' \text{ tang } b' - \text{tang } a' \text{ tang } \beta'} &= \frac{1}{\text{tang } n'}; \text{ also wird aus (6.)} \end{aligned}\right.$$

$$(8.)\ \text{tang } r' = \frac{\text{tang}^2 A}{\text{tang } m'} \text{ und tang } s' = \frac{\text{tang}^2 B}{\text{tang } n'}, \text{ welche Werthe constante b}$$

so lange der gegebne Normalkreis (1.) seine Lage beibehält. Folglich ist für alle Tangenten desselben der Durchschnittspunkt r' s' ein constanter.

Anmerkung. Da durch dieselbe Gleichung zwei sich diametral entgegengesetzte G gegeben sind, so kann man auch die Sätze §. 17 auf solche Tangenten und Tangentensehne

n, welche von den Punkten eines Normalkreisbogens außerhalb nach allen beiden Ellipsen
en werden. Zieht man z. B. nach den Punkten P und P′ der Ellipse E Tangenten und
e, so geht letztere, bei hinreichender Verlängerung, auch durch die Punkte p und p′ der
e e, die von demselben Punkte außerhalb ihre Tangenten haben, wie P und P′. Es ist
uch statthaft, von diesem Punkte außerhalb der 2 Ellipsen eine Tangente nach P und p′,
nach P′ und p zu ziehen; man wird zur Berührungssehne beider Arten denselben Nor-
reis P P′ p′ p erhalten, da die Punkte P und P′ denen p und p′ diametral gegenüber-
. Betrachten wir aber jede dieser Berührungssehnen als ganzen Normalkreis, so werden
) zweimal, in 2 gemeinschaftlichen Punkten schneiden, die einander wiederum diametral
iberliegen.

§. 18.

Anwendung des Vorigen auf ebne Kegelschnitte.

Der in §. 17. II. aufgestellte Satz enthält in seiner allgemeinern Fassung die Lehrsätze über
ntensehnen ebner Kegelschnitte aller Art in sich, die aus ihm leicht durch Projections-
en entwickelt werden können; über gradlinige Verbindungen der zugehörigen Paare von
rungspunkten dieser Kegelschnitte wird die perspectivische Projection auf die Tangenten-
(cf. C. II. 10. §.) besonders Aufschluß geben können, weil alle Normalkreise irgend
Richtung hier als gerade Linien erscheinen; während die orthographische Projection
ugelfiguren auch Curven zwischen den Berührungspunkten darstellen wird, die
ch in einem Punkte schneiden. Hier sollen, der Kürze wegen, nur einige abgeleitete Lehr-
r Planimetrie angeführt werden.

a) Zieht man von einer Geraden außerhalb eines Kreises, einer Ellipse oder Hyperbel
wird auch die Parabel als hierher gehörig sich erweisen) auf der Ebne, an diese Curven
tenpaare, so schneiden sich die zugehörigen Tangentensehnen in einem Punkte. [Dies gilt
Hyperbel für beide Hälften, sowohl jede für sich, als auch beide mit einander verbunden
et.] (Aus der perspect. Projection.)

b) Hat man innerhalb eines Kreises eine kleinere Ellipse e, deren Mittelpunkt im Cen-
esselben liegt, und unter derselben Bedingung um sie eine beliebige andere, E, deren große
= dem Diameter des Kreises ist, und welche die e ganz umschließt, so construire man von
ipherie der E tangirende Ellipsenpaare an e, deren große Achsen auch = 2 r und deren
das der ersten ist, und durch die Berührungspunkte jedes Paars mit der Ellipse e je eine
deren große Achse = 2 r, deren Mittelpunkt wiederum derselbe ist, so schneiden sich alle
tconstruirten Ellipsen in zwei Punkten innerhalb der Ellipse e, die mit dem Centrum
ises in derselben Graden liegen und gleich weit von ihm abstehen. (NB. Nach der Theorie

der ebnen Kegelschnitte ist die Construction einer Ellipse stets möglich, wenn man Mittel Größe der großen Achse und entweder zwei Punkte der Peripherie, oder einen Durchmesser de kennt.) (Aus der orthographischen Projection).

c) Dasselbe gilt auch für eine Hyperbel, die statt der Ellipse e in den Kreis verz ist, nur muß dann auch ihr Mittelpunkt der des Kreises zugleich sein, und die Ellipse E zr beiden Hälften derselben liegen, ohne sie zu schneiden. (Ebenfalls aus der orthograph. Proje

III. Die Hyperbel auf der Kugel.

§. 19.

Ableitung aus der Kugelellipse.

Construirt man auf der Kugeloberfläche zwei sich diametral entsprechende Ellipsen, gemeinschaftliche Gleichung sei:

(1.) $$\frac{\text{tang}^2\ \xi'}{\text{tang}^2\ A} + \frac{\text{tang}^2\ \eta'}{\text{tang}^2\ B} = 1;$$ [Fig. 6. ACB und acb] und verändert di des sphärischen Coordinatensystems um 90°, ohne die Lage der X-Achse desselben (Ke) zu (so daß YO die neue Y-Achse davon wird, so wie O der neue Anfangspunkt der Coordinat erhält man auf der obern Kugelhälfte zwei Ellipsenhälften, deren jede einen Brennpunkt [F in gleicher Entfernung von O und den Scheiteln C und c in sich trägt. Nimmt man c Hälfte acb rechts einen Punkt d an und verbindet ihn durch Normalbogen mit F und f, Fd verlängert auch durch den F diametral entgegengesetzten Brennpunkt F', der in der Ellipse liegt, und der ganze Normalkreisbogen von F bis dahin ist = 180°. Nun ist [nach fd + F' d = 2A = 180° — Cc; und F' d = 180 — Fd, folglich, wenn wir Cc = setzen, ist

(2.) Fd — fd = 2A';

d. h. jeder Punkt einer von zwei diametral sich zugeordneten Ellipsen a Kugel ist von den zwei nächstliegenden Brennpunkten, deren jeder einer a Ellipse angehört, in der Weise entfernt, daß der Unterschied beider B Abstände einer constanten Größe, nämlich dem Abstande der einander nä Scheitel beider Ellipsen (= 2A') gleich ist.

Da aber diese Eigenschaft der ebnen Hyperbel auch zukommt, so können w Analogie zufolge, die beiden Ellipsenhälften in der neuen Achsenlage als Kugelhyp gelten lassen, die aber keine unendlichen Arme haben, wie die ebnen, sondern auf der abgen Kugelhälfte in gleicher Weise geschlossen sind. Daher kommt es, daß in dieser Lage die ellipsen als ihre Projectionen Hyperbeln haben, wie dies in §. 9 und §. 10 bewiesen wor

§. 20.

Anderweitige Herleitung.

Man lege sich das Coordinatensystem auf der Kugel, wie in §. 19, und lasse die Curven
3 und acb aus den zusammengehörigen Brennpunkten **F** und **f** so entstehen, daß die Diffe-
3 der Abstände stets $= 2A'$ ist; nennt man dann $Ff = 2E'$, so ist

(1.) $\cos Fd = \cos(2A' + fd)$; ferner

(2.) $\left\{\begin{array}{l}\cos Fd = \cos\eta\cos(E' + \xi');\\ \cos fd = \cos\eta\cos(E' - \xi');\end{array}\right\}$

$\cos\eta\cos(E' + \xi') = \cos 2A'\cos\eta\cos(E' - \xi') - \sin 2A'\sin fd,$

$\cos 2A'\cos\eta\cos(E' - \xi') - \sin 2A'\sqrt{1 - \cos^2\eta\cos^2(E' - \xi')};$

$\sin^2 2A' = \cos^2\eta\,[\cos^2(E' + \xi') + \cos^2(E' - \xi') - 2\cos(E' + \xi')\cos(E' - \xi')\cos 2A']$

ns: $1 = \cos^2\eta\left[\dfrac{\cos^2 E'\cos^2\xi'}{\cos^2 A'} + \dfrac{\sin^2 E'\sin^2\xi'}{\sin^2 A'}\right]$; welche Formel vollkommen mit der
ngleichung in §. 12. dieses Capitels übereinstimmt. Daraus leitet man ferner ab:

(3.) $1 + \operatorname{tang}^2\delta = \dfrac{\cos^2 E'}{\cos^2 A'} + \dfrac{\sin^2 E'}{\sin^2 A'}\operatorname{tang}^2\xi'.$

Nun ist aber bei der Hyperbel (nach Analogie der ebnen Kegelschnitte) die halbe Excen-
t die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die halbe große und kleine
bilden, also ist:

$\cos\delta' = \cos A'\cos B'$; folglich, dies in (3.) eingesetzt, erhalten wir:

$\operatorname{tang}^2\eta' + \operatorname{tang}^2\xi' = \cos^2 B' + \dfrac{1 - \cos^2 A'\cos^2 B'}{1 - \cos^2 A'}\operatorname{tang}^2\xi'$; also:

$\operatorname{tang}^2\eta' = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 B'} + \dfrac{\sin^2 B'}{\operatorname{tang}^2 A'}\operatorname{tang}^2\xi'$; folglich

$\dfrac{\operatorname{tang}^2 B'}{\operatorname{tang}^2 B'} = \sin^2 B' = \dfrac{\sin^2 B'\operatorname{tang}^2\xi'}{\operatorname{tang}^2 A'} = \operatorname{tang}\eta'$

(4.) oder: $1 = \dfrac{\operatorname{tang}^2\xi'}{\operatorname{tang}^2 A'} = \dfrac{\operatorname{tang}^2\eta'}{\sin^2 B'}$ als Gleichung der der Hyperbel ana-
n Kugelellipsen.

Setzt man aber in (3.) eine andre Hülfsgröße B'' ein, deren Gleichung ist:

$\sin^2 B'' = \dfrac{\cos^2 A' - \cos^2 E'}{\cos^2 A'}$, so ist

(5.) $1 = \dfrac{\operatorname{tang}^2\xi'}{\operatorname{tang}^2 A'} - \dfrac{\operatorname{tang}^2\eta'}{\operatorname{tang}^2 B''}$, ebenfalls eine (noch gebräuchlichere) Glei-
der Hyperbel-Ellipsen. Beide entsprechen in ihrer Form der analogen Hyperbelglei-
auf der Ebne:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Nennt man die halben Achsen der als Ellipsen betrachteten Curven [nach A und B, so ist $\text{tang } B'' = \frac{\text{tang } B}{\text{tang } A}$. (cf. ihre Projectionsgleichung §. 11.)

§. 21.

Tangentengleichung.

Legen wir die Gleichung (5.) des vorigen §. unserer fernern Untersuchung zu Grund erhalten wir, als Gleichung für den doppelten Durchschnittspunkt eines Normalkreises $\frac{\text{tang } X'}{\text{tang } m} + \frac{\text{tang } Y'}{\text{tang } n} = 1$ mit der Peripherie der Ellipsen-Hyperbel, folgende:

(1.) $\text{tang } \xi' =$

$$\frac{\text{tang } m \text{ tang}^2 A' \text{ tang}^2 n}{\text{tg}^2 n \text{ tg}^2 A' - \text{tg}^2 m \text{ tg}^2 B''} \pm \frac{\text{tang } m \text{ tang } A' \text{ tang } B''}{\text{tg}^2 n \text{ tg}^2 A' - \text{tg}^2 m \text{ tg}^2 B''} \sqrt{\text{tg}^2 m \text{ tg}^2 n - (\text{tg}^2 A' \text{ tg}^2 n - \text{tg}^2 B''}$$

Soll nun tang ξ' nur einen Werth haben, d. h. soll der Normalkreis zur Hyper tangente werden, so muß $\text{tang}^2 m \text{ tang}^2 n = \text{tang}^2 A' \text{ tang}^2 n - \text{tang}^2 B'' \text{ tang}^2 m$ sein,

(2.) $\text{tang } \xi' = \frac{\text{tang}^2 A'}{\text{tang } m}$ und $\text{tang } \eta' = \frac{-\text{tang}^2 B''}{\text{tang } n}$, (nach derselben Analogie)

hat die Tangente an eine Kugel-Hyperbelellipse bei verändertem Coordinatensyste dieselben Gleichungen für ihren Berührungspunkt, als die der Ellipse, welche §. 1 entwickelt wurden.

Setzen wir die Gleichungen (2.) in die gegebene Curvengleichung ein, so erhalten w

(3.) $\frac{\text{tang}^2 A'}{\text{tang}^2 m} - \frac{\text{tang}^2 B''}{\text{tang}^2 n} = 1$ und

(4.) $\frac{\text{tang } X' \text{ tang } \xi'}{\text{tang}^2 A'} - \frac{\text{tang } Y' \text{ tang } \eta'}{\text{tang}^2 B''} = 1$ als die Gleichungen

Tangente an die Hyperbel-Ellipse.

Zusatz I. Ueber ein Analogon der Asymptoten bei der Hyperbel-El (Figur 6.)

Zieht man vom Anfangspunkte der Coordinaten O an diese Curve eine Tange steht diese im Berührungspunkte a auf dem Gränzkreise $\overset{\frown}{aeb}$ senkrecht, denn da $\left\{ \begin{matrix} m = \\ n = \end{matrix} \right.$

so ist $\left\{ \begin{matrix} \text{tang } \xi' \\ \text{tang } \eta' \end{matrix} \right\} = \infty$, also ist $\left\{ \begin{matrix} \xi' = 90^0 \\ \eta' = 90^0 \end{matrix} \right\}$, was auf dem Gränzkreise allein stat

Wird nun die Kugel unendlich erweitert, so wird der Gränzkreis mit dem Berührungs-
kte a in's Unendliche gerückt, d. h. die dann als Grade erscheinende Linie Oa wird eine
symptote der ebnen Hyperbel $\overset{\frown}{acb}$. Ihre Gleichung auf der Kugel ist jederzeit [nach
. II. §. 1 (12.)] tang Y′ = tang X′ tang B, wenn B die halbe kleine Achse der Ellipse
die man jetzt als Hyperbel betrachtet.

Nun ist aber nach dem oben Angenommenen tang B = tang B″. tang A;

da tang A = tang (90 — A′) = $\frac{1}{\text{tang } A'}$, so ist tang B = $\frac{\text{tang } B''}{\text{tang } A'}$; folglich ist

$\frac{\text{tang } Y'}{\text{tang } X'} = \frac{\text{tang } B''}{\text{tang } A'}$ die Gleichung der der Asymptote analogen Tangente, welche
er Ebne für letztere lautet: $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; wenn y und x ihre allgemeinen
rdinaten, und b und a die halben Achsen der Hyperbel sind. —

Zusatz II. Die sonst noch zu erwähnenden Eigenschaften der Ellipsenhyperbeln auf der
l sollen für jetzt übergangen werden; im Ganzen bedarf es nur einer Andeutung, daß alle
bei der Ellipse abgehandelten Eigenschaften hierher ebenfalls zu rechnen sind. Wir gehen
endlich zur

IV. Parabel auf der Kugeloberfläche

um auch von diesem Kegelschnitte die Analogie aufzusuchen. Wir legen dabei Fig. 7 zu Grunde.

§. 22.

Construction mittelst der Directrix.

Es sei AB ein Normalkreisbogen, worauf andere Normalkreise senkrecht stehen, (z. B. CE,
die sich [nach Cap. II. §. 8.] in dem Pole des erstern, in E, schneiden; F sei auf CE be-
gesetzt und auf jedem senkrechten Normalkreise ein Punkt angenommen, dessen Bogenentfer-
von diesem F gleich der vom Bogen AB ist, (also FG = GC, FH = HD ꝛc.) so
n diese continuirlich fortrückenden Punkte (G, ..., H,) eine der ebnen Pa-
analoge Curve auf der Kugel.

Nun ist $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{DE} = 90^0$, also auch GF + GE = 90° und ebenso FH + HE =
= Gg, wenn GF = Eg gemacht wird; d. h. die Curve ist eine Kugelellipse, da die
ne je zweier conjugirten Brennstrahlen eine constante Größe, nämlich = 90° = 2 A ist.
ich ist, vom Mittelpunkte derselben aus, die große Achse als sphärische Abscissenachse be-
, ihre Gleichung:

(1.) $\text{tang}^2 \xi' + \frac{\text{tang}^2 \eta'}{\text{tang}^2 B} = 1$; weil tang A = tang 45° = 1 ist.

Dreht man das System um die feste Raum-y-Achse (innerhalb der Kugel) um 4[5°], wird der Scheitel G der Parabel-Ellipse der Anfangspunkt der sphärischen Coordi (cf. Fig. 8.), dann wird [nach Cap. I. §. 3. (3)] aus den bisherigen Coordinaten:

(2.) $\text{tang}^2 \xi' = \text{tang}^2 (\alpha' - 45) = \frac{(\text{tang } \alpha' - 1)^2}{(1 + \text{tang } \alpha')^2}$;

(3.) $\text{tang}^2 \eta = \frac{2 \text{ tang}^2 \beta'}{(1 + \text{tang } \alpha')^2}$;

Also in (1.) dies eingesetzt:

(4.) $\text{tang}^2 \beta' = 2 \text{ tang}^2 B \text{ tang } \alpha'$; als die Gleichung einer Parabe lipse, vom Scheitel aus gerechnet.

§. 23.

Projectionen.

1) Auf die der XY-Ebne parallele Tangentenebne; (perspectivische Proj [conf. Fig. 8.]

Es ist $\left\{ \begin{array}{l} x = r \text{ tang } \xi'; \\ y = r \text{ tang } \eta'; \end{array} \right\}$, folglich wird aus §. 22. (1.) die Projectionsgleichung

(1.) $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, d. h. die Gleichung einer Ellipse, vom Mittelp aus berechnet, deren halbe große Achse = dem Radius der Kugel ist. — P man die durch die Gleichung (4) in §. 22 bestimmte Curve, deren Scheitel im Anfangspun sphärischen Coordinaten liegt, perspectivisch auf die Tangentenebne, die der Ebne der X, Y p läuft, so erhält man eine ebne Curve mit der Gleichung:

(2.) $y^2 = 2 r \text{ tang}^2 B . x$; oder

(3.) $y^2 = p . x$, d. h. eine Parabel; nach Fig. 8. ist GHNg die Kugelcurve, G die Projection derselben, der Bogen MN = B, MP = r tang B; da nun $\frac{OM}{Om} = \frac{r \text{ tan}}{m}$

und $mn = \sqrt{r . p}$, so ist $\frac{r . p}{2} = r^2 \text{ tang}^2 B$, d. h. die lineäre Tangente zur h kleinen Achse der Parabel-Ellipse auf der Kugel ist die mittlere Proporti zwischen dem halben Kugelradius und dem Parameter der projicirten e Parabel in 3.)

Anmerkung. Zu der Kugelellipse, deren große Achse = 90°, gehört ebenfall supplementäre auf der entgegengesetzten Halbkugel, die durch dieselbe Gleichung bestimmt

Projection derselben auf eine Tangentenebne, die der obigen diametral entgegensteht, ist daher der durch (3.) bestimmten congruente ebne Parabel, in entgegengesetzter Richtung sich aus-end, deren Leitstrahlen (verlängerte Kugel-Durchmesser) dieselben Graden sind und daher zu-nen zwei conjugirte conoidische Oberflächen mit der Spitze im Kugelcentrum bilden, als deren chschnittscurven mit der Kugeloberfläche die beiden conjugirten Parabelellipsen sich ergeben.

2) Auf die XY-Ebne aus der in §. 22. (4.) angenommene Lage gegen die irischen Coordinaten: (senkrechte Projection.) [Fig. 8.]

Legt man durch die beiden Scheitel Gg eine auf der XZ-Ebne senkrecht stehende Ebne projicirt darauf die Parabelellipse GHNg senkrecht, so erhält man (nach (1.) dieses §. 8.) eine se, deren Ebne gegen die YZ-Ebne sowohl, als gegen die der XY um 45° geneigt ist: ihre Achse 2a wird $= r\sqrt{2}$, also $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$, ihre halbe kleine Achse $b = r \sin B$; wenn man wiederum senkrecht auf die XY-Ebne projicirt, so ist ihre Projectionscurve wieder eine Ellipse, halbe große Achse $\alpha = \frac{r}{2}$, deren halbe kleine Achse $\beta = b = r \sin B$. Diese Curve ist zugleich auch die senkrechte Projection jener Kugelellipse; ihre Coo:-Achsen liegen im Centrum ugel, zugleich in einem ihrer Scheitel. Ihre Gleichung ist daher von der Form:

$$(4.)\quad \frac{\left(\frac{r}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{r^2 \sin^2 B} = 1;$$

Projicirt man dieselbe Ellipse in der gegen die Achsenebnen um 45° geneigten Ebne auf Z-Ebne senkrecht, so erhält man eine der in (4.) gefundnen Ellipse völlig congruente, deren el ebenfalls im Anfangspunkte der Coo. liegt; ihre Gleichung ist:

$$(5.)\quad \frac{\left(\frac{r}{2} - z'\right)^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{y'^2}{r^2 \sin^2 B} = 1;$$

Zwischen den Coordinaten, welche zu einem Paare von Punkten dieser beiden Projectionen n, von denen der $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\\text{andre}\end{matrix}\right\}$ in der $\left\{\begin{matrix}\text{XY-Ellipse}\\\text{YZ-Ellipse}\end{matrix}\right\}$ Projection desselben Punkts der Para-se ist, finden die Gleichungen statt:

$$(6.)\quad y' = y$$

$$(7.)\quad z' = r - x.$$

Anmerkung 1. Sollen jene beiden Projectionen (4.) und (5.) der Parabelellipse Kreise muß $\frac{r}{2} = r \sin B$ werden, d. h. $\sin B = 1/2$, also $B = 30°$. Dann wird aus der

allgemeinen sphärischen Gleichung derselben $\text{tang}^2\,\beta' = 2\,\text{tang}^2\,B\,\text{tang}\,\alpha'$ die besondere:

(8.) $\text{tang}^2\,\beta' = {}^2/_3\,\text{tang}\,\alpha'$.

Anmerkung 2. Daraus folgt, daß, wenn ein grader Cylinder mit kreisförmigen Basis, deren Radius $= \frac{r}{2}$ ist, eine Kugeloberfläche, so schn daß die Kreisbasis des Cylinders den Normalkreis, worauf der Cylinder recht steht, von innen berührt, die Durchschnittscurve der beiden Oberfl eine Parabelellipse sei, deren halbe kleine Achse $= 30^0$ ist.

3) Auf die XZ-Ebne, aus derselben Lage. (Senkrechte Projection).

Nach §. 9 (4.) dieses Capitels ist diese Curve eine Ellipse, die den Normalkre welchem ihre Ebne die Kugel schneidet, in 4 Punkten trifft. Es ist in obiger Formel al $\text{tang}\,A = 1$ zu setzen, und dann wird:

(9). $\frac{x^2\,(1 - \text{tang}^2\,B)}{r^2} + \frac{z^2\,(1 + \text{tang}^2\,B)}{r^2} = 1$ ihre Gleichung vom Mittel aus; soll sie von ihrem Scheitel aus genommen werden, so muß das System der XZ-Achs 45^0 gedreht werden: dann ist (nach der Coordinatenverlegungsformel)

(10.) $x^2 = \frac{(x' - z')^2}{2}$ und $z^2 = \frac{(x' + z')^2}{2}$ in (9.) einzusetzen, so daß entsteht:

(11.) $z'^2 + x'^2 + 2\,z'\,x'\,\text{tang}^2\,B = r$ als die Gleichung derselben Projections- in der XZ-Ebne.

Anmerkung. Wird darin $2\,B = 90^0$, d. h. aus der Ellipsenparabel auf der ein Kugelkreis mit dem Radius $= 90^0$, so wird aus (11.) die Gleichung

$(x' + z')^2 = r^2$, d. h. $x' = r - z'$ (12.)

d. i. die Gleichung einer gegen die XZ-Achsen um 45^0 geneigten graden Lini

§. 24.

Die Tangente an die Parabelellipse.

Die Gleichung eines Normalkreisbogens, welcher die Parabelellipse berührt, deren Gl nach §. 22. (1.) vom Mittelpunkte aus gerechnet $\text{tang}^2\,\xi' + \frac{\text{tang}^2\,\eta'}{\text{tang}^2\,B} = 1$ ist, läßt sich a allgemeineren Gleichung der Ellipsentangente (§. 13, 9) herleiten, indem man $A = 45$ Dann wird

(1.) $\text{tang}\,X'\,\text{tang}\,\xi' + \frac{\text{tang}\,Y'\,\text{tang}\,\eta'}{\text{tang}^2\,B} = 1$ die verlangte Parabeltangenten-Gle

Verlegt man wiederum dieses Coordinatensystem in die neue Lage, so daß der eine Scheitel r Parabelellipse Anfangspunkt der sphärischen Coordinaten wird, (also durch eine Drehung um um die Y-Achse des Raums), so ist aus der Gleichung der Parabelellipse [nach §. 22 (4.)] aus der Gleichung einer Sekante derselben $\frac{\text{tang } \xi'}{\text{tang m}} + \frac{\text{tang } \eta'}{\text{tang n}} = 1$ eine neue Gleichung für ξ' des Durchschnittspunktes der letztern zu deriviren:

$$2.)\ \text{tang } \xi' = \text{tang m} + \frac{\text{tang}^2 B \text{ tang}^2 m}{\text{tang}^2 n} \pm \sqrt{\frac{\text{tang}^2 B \text{ tang}^2 m}{\text{tang}^2 n}\left(2 \text{ tg m} + \frac{\text{tang}^2 B \text{ tang}^2 m}{\text{tang}^2 n}\right)};$$

so für dessen η' eine ähnliche.

Soll nun aus der Sekante eine Tangente werden, so müssen die Werthe für ξ' η' ein- sein, d. h. das Glied $\pm \sqrt{\ldots\ldots}$ muß verschwinden, also muß:

(3.) $2 \text{ tang}^2 n + \text{tang}^2 B \text{ tang } m = 0$ werden.

Dann wird aber zugleich auch:

(4.) $\text{tang } \xi' = \text{tang m}\left(\frac{\text{tang}^2 n + \text{tang}^2 B \text{ tang m}}{\text{tang}^2 n}\right) = -\text{ tang m}$, also

(5.) $\text{tang } \eta' = 2 \text{ tang n}$; d. h. die Abschnitte, welche eine Parabelellipsen- zente von den sphärischen Coordinaten-Achsen macht, stehen zu den Coor- nten des Berührungspunkts in einer solchen Beziehung, daß die tang. des der X-Achse = der negativen Tangente des ξ', die des auf der Y-Achse pelt genommenen, gleich der tang. des η' ist, wenn der Anfangspunkt der dinaten in den einen Scheitel der Curve fällt.

Anmerkung 1. In Fig. 9. ist also tang MO = — tang OR, d. h. — OM = OR ntgegengesetzter Richtung) und tang OQ = 2 tang NO, woraus für die ebne Parabel ehrsatz herzuleiten, daß die Subtangente MR = 2 x, das Stück der Scheitel- ente NO aber = 2 y sein müsse.

Anmerkung 2. Die Länge des Tangentenbogens MP = T wird also durch die Glei- n bestimmt: cos T = cos 2 ξ' cos η; oder in ξ' η' = Coordinaten ausgedrückt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 T}} = \frac{1 - \text{tang}^2 \xi'}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \xi'}\sqrt{1 + \text{tang}^2 \xi' + \text{tang}^2 \eta'}};$$

(Fortsetzung folgt.)

Chronik des Gymnasiums

den Zeitraum von Ostern 1847 bis Ostern 1848 umfassend.

1. Der Unterricht.

Durch **A** wird das Sommerhalbjahr, durch **B** das Winterhalbjahr bezeichnet.

Latein.

1. Prima. (Ordinarius: Prof. Wiggert). Von Dichtern wurde gelesen: **Horat.** ei Oden des 4. Buchs, 15 Briefe, 3 Satiren. **Plauti trinumus**; von Prosa **Tacit. hist. IV. V. Cicero de orat. I.** 5 St.: Prof. Wiggert. Privatlectüre dienten Oden von Horaz, Reden Cicero's und Stellen aus L Stilübungen — prosaische und metrische; mündliche Unterredungen, Dis übungen mit den Geübteren und Extemporalien mit der ganzen Klasse. 3 Prof. Wiggert. Stil- und Disputirübungen mit den minder Geübten. 2 O.-L. Ditfurt. Ausgewählte Briefe Cicero's, besonders zu Sprechübu 1. St.: der Director.

2. Secunda. (Ordinarius Prof. Dr. Sucro). Gelesen wurde: **Liv. XXIV. Cicero Man. Virg. Aen. VII. VIII.** 7 St. Schriftliche prosaische und me Uebungen und mündliche Unterredungen, besonders über gehaltene kurze Vo aus der Mythologie und den römischen Antiquitäten. 3 St.: Prof. Dr. S

3. Ober-Tertia. (Ordinarius: Prof. Wiggert). Gelesen wurde: aus Friedemann's kl Chrestomathie 78 Seiten, **A.** aus Jacobs Blumenlese. **B. Ovid. Met.** aus **XI** geeignete Abschnitte. 5 St. Schriftliche prosaische und leichte me Uebungen; Grammatik nach Zumpt; Memorirübungen aus Cicero und 3 St.: Prof. Wiggert.

4. Unt.-Tertia. (Ordinarius: Oberlehrer Ditfurt). Gelesen wurde: **Caes. b. g. VI**, 31. — **Ovid. Met. II., III.** mit Auswahl. Jacobs Blumenlese, c. 50 S. Schriftliche prosaische und leichte metrische Uebungen, Grammatik nach Z 4 St.: O.-L. Ditfurt.

In den übrigen Klassen wurden dieselben Pensa getrieben, wie im vorigen Jahr; waren dieselben Ordinarien und Lehrer wie im Winter $18^{46}/_{47}$.

Griechisch.

1. Prima. **Plato-Menexenus. Thucyd. II. und IV.** (stellenweis privatim.) Gram nach Rost und schriftliche Uebungen. Zusammen 4 Stunden: der Dire **Homer. Il. VI — VIII** und **Sophocl. Antig. 1 — c. 500.** 2 St.: **Dr. Sucro.**

Secunda. Xenoph. Mem. IV, c. 4 — 8. Lucian. somn. und Demonax. Homer. Od. XII — XVI. Grammatik nach Roſt und ſchriftliche Uebungen. Zuſammen 6 Stunden: Prof. Wolf.

In den übrigen Klaſſen waren dieſelben Curſen und dieſelben Handbücher, wie im vorigen
le. In Ober-Tertia lehrte Candidat Schönſtedt, in Unter-Tertia Oberl. Ditfurt,
ber-Quarta Candidat Schönſtedt, in Unter-Quarta Lehrer Dr. Cruſius.

In allen andern Lehrgegenſtänden waren die Curſen, ſoweit ſie einjährig oder halbjährig
die Stundenzahl, die Uebungen, die Lehrbücher und die Lehrer dieſelben, wie im vorigen Jahre
reſp. im Winter $18^{46}/_{47}$. In Betreff der Abſchnitte aus den zweijährigen Curſen und der
nderungen rückſichtlich der Lehrer iſt nur Folgendes anzuführen:

Im **Deutſchen:** in Prima. Nationallitteratur von der älteſten Zeit bis auf Luther. Prof. Wiggert.

(In einer außerordentlichen Stunde im Sommerhalbjahr für Die, welche dazu Neigung hatten und bei denen nicht weſentliche Lücken in andern nöthigern Kenntniſſen die Theilnahme unrathſam machten, Einführung in die Kenntniß der ältern deutſchen Sprache, mit Benutzung von F. W. Reimnitz Leitfaden. Candidat Dr. Kretſchmann, in Gegenwart des Prof. Wiggert.)

In Ober-Tertia hatte den Unterricht im Deutſchen bis Auguſt v. J. Cand. Schönſtedt, von da an Lehrer Grunow.

Im **Franzöſiſchen** wurde in Prima geleſen: **Ségur — histoire de Napoléon** ꝛc. Buch 5 — 8; in Secunda privatim **Guillaume Tell** mit darüber angeſtellten mündlichen und ſchriftlichen Prüfungen, und in der Klaſſe Wolfart's Leſebuch, Abſchnitte über die Tempus- und Moduslehre, thème 250 — 316; in Ober-Tertia aus demſelben Buche thème 85 — 164; in Unter-Tertia thème 1 — 90; in jeder Klaſſe wöchentlich 2 St.: O-L. Wolfart.

In der **Religionslehre.** Prima. Geſchichte der chriſtlichen Religion und Kirche. Einleitung in die Schriften des Alten und Neuen Teſtaments und Leſung ausgewählter Stellen aus letztern im Grundtexte. 2 St.: der Director. Secunda. Chriſtliche Sittenlehre mit Leſung einzelner Stellen im griechiſchen Neuen Teſtament. 2 St.: Prof. Dr. Sucro.

In der **philoſophiſchen Propädeutik.** Prima. Logik und Wiederholung der Theorie des Vorſtellungsvermögens. 2 St.: Prof. Par.

In der **Mathematik.** In Ober-Tertia lehrte von Oſtern 1847 bis in den Auguſt Cand. Dr. Kretſchmann, von da an Cand. Gorgas; in Unter-Tertia Lehrer Krasper, vom Auguſt an Lehrer Grunow.

In der **Geſchichte.** Prima. Darſtellung des Uebergangs aus dem Mittelalter in die neuere Zeit, und Geſchichte des 16. Jahrhunderts, ſpecieller die Geſchichte des Oſtens und Nordens von Europa. 2 St.: Prof. Par; in Ober-Tertia ſeit Auguſt v. J. Lehrer Grunow; in Unter-Tertia desgl.

In der **Naturbeſchreibung.** Ober-Tertia. A. Zoologie. B. Mineralogie. Cand. Gorgas.

2. Das Lehrerpersonale.

Der seit längerer Zeit beurlaubt gewesene Lehrer Herr Grunow trat im August wieder in das Lehrer-Collegium ein und hat seit der Zeit in Ober- und Unter-Tertia richtet. Die Herren Schulamts-Kandidaten Gorgas und Schönstedt haben ihre Jahre lang der Anstalt gewidmete Thätigkeit fortgesetzt. Herr Schulamts-Candidat Dr. J Kretschmann aus Magdeburg, Zögling unsers Gymnasiums, der durch eine am 6. Februar in Berlin öffentlich vertheidigte Abhandlung (**Rerum Magnesiarum specimen,** 60 S. in 8.) s Würde eines Doctors der Philosophie erworben hat, begann an unserer Anstalt, indem er z als Turnlehrer (s. S. 28.) eintrat, sein Probejahr mit Anfang des Schuljahrs, unterrichtete n Monate mit eben so rühmlichem Eifer als Geschick und Erfolg, konnte aber, weil er zu Mi in den einjährigen freiwilligen Militairdienst eintrat, für das Winterhalbjahr seine Thätigk die Schule nicht fortsetzen und erst gegen Ostern wieder einige Wochen lang einzelne Lehrst als Vertreter vorübergehend behinderter Lehrer übernehmen.

3. Die übrigen äußeren und inneren Verhä nisse des Gymnasiums.

Die Gymnasialbibliothek ist auch in diesem Jahre theils aus den Fonds der Anstalt, durch Geschenke vermehrt worden. Als solche hat uns das Hohe Ministerium der geistlich Unterrichts-Angelegenheiten huldreichst übersandt:

Encyklopäd. Wörterbuch der medicinischen Wissenschaften Bd. 34., 35, 36.

Jo. Monhemii catechismus, ed. C. H. Sack.

Haupt's Zeitschrift für deutsches Alterthum. Bd. 6. Heft 1., 2., 3.

Corpus reformatorum vol. XIV.

Baron Stillfried, Hohenzollersche Forschungen, Bd. 1, mit den dazu gehörigen C tafeln des Hohenzollerschen Hauses.

Auch den zweiten Band des Kosmos in einem Prachtexemplare hatte Se. Exc., de Geh. Rath, Freih. A. v. Humboldt, durch gütige Vermittelung des Herrn Professor Dr. mann in Berlin, die Gewogenheit, unserer Bibliothek zu verehren. (Vgl. Progr. v. 1845,

Auch wurden wieder einige dankbar empfangene Schriften vormaliger Zöglinge des nasiums von ihren Verfassern geschenkt, als vom Herrn Stadtrath Ae. Funk in Mag Verbrechen des Diebstahls nach preußischem Rechte. Magdeburg, 1837; vom Herrn Aus Adolf Schönstedt: die Bedeutung der Jurisprudenz als Wissenschaft. Magdeburg, 1848.

Professor Wiggert gab F. Danneil's Geschichte der v. d. Schulenburg. Salzwedel 2 Bde. und 1 Bd. Stammtafeln, ein für die Geschichte der Provinz Sachsen mehrfach w Werk, bei dessen Herausgabe er selbst mit thätig gewesen war.

Endlich wurden mehrere Schulbücher von ihren Verlegern eingesandt, und die Progr Sammlung mehrte sich auf die von den Hohen Behörden angeordnete Weise.

Von den Büchern, die aus den Mitteln der Bibliothek neu gekauft wurden, besteht der
e Theil in Fortsetzungen umfangreicherer Werke, als: Allgem. Encykl. von Ersch und Gruber ꝛc.
hani thesaus. l. gr., Riedel's n. cod. dipl. Brand., Publicationen des litterarischen Vereins
tuttgard, Ritter's Erdkunde, Schriften der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Zeitschrift
lterthumskunde, Rheinisches Museum für Philologie, Berghaus physik. Atlas, Pertz monu-
a, Hattemer Denkmale des Mittelalters, Heeren und Uckert Geschichte der europäischen Staaten u. a.

Außerdem sind aber mehrere Gelegenheiten, werthvolle, zum Theil seltene, ältere Werke zu
ltnißmäßig wohlfeilen Preisen zu kaufen benutzt worden. Es gehören dahin unter andern:
is ed. Barth. 1664; Reinesii epistolae 1660; Leyser hist. poëtarum et poëmatum medii aevi.
. Hist. Brit. et anglic. scriptores XX. operâ Gale. Oxon. 1691. Historiae anglicanae scriptores
uiX. London, 1652. Ughelli Italia sacra 9 voll. Tych. Brahe astron. 1603. Galilaei systema
cum Lugd. B. 1699. Copernici astronomia instaurata. Amsterd. 1617. Hobbes opera
soph. Amst. 1668. Aldrete del origine de la lingua Castellana. Madrid 1674.

Die Schülerbibliothek ist mittels der vierteljährlichen Beiträge aus den drei obern
n durch manches werthvolle Buch vermehrt und zählt schon über 3700 Bände. Auch das
rhistorische Cabinet und der physikalische Apparat sind nach Maßgabe der Mittel
lständigt.

Erlaß des Schulgeldes erhielten, und zwar fast Alle des ganzen Betrags, im
nerhalbjahr: 36 Schüler, im Winterhalbjahr: 34 Schüler.

Aus der Funk'schen Stiftung wurden an Unterstützungen vertheilt:
ern 1847: 35 Thlr. Gold und 146 Thlr. 4 Sgr. 7 Pf. Cour. an 1 Abitur. u. 18 Schüler.
chaelis 1847: 62½ Thlr. Gold und 121 Thlr. 28 Sgr. 8 Pf. an 2 Abitur. u. 15 Schüler.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Königs ward durch eine zu religiöser Erhebung ver-
te Versammlung der Lehrer und Schüler begangen, in der Herr Prof. Wolf die Festrede hielt.

Von den im Laufe des Schuljahrs eingegangenen Anordnungen der Hohen vorge-
n Behörden sind hier zu erwähnen:

1) (Rescript v. 10. März 1847.) Die Schüler-Stipendien aus den Mitteln der
-Bergeschen Stiftung, welche seit dem Jahre 1826 nicht gezahlt waren (vgl. Matthias
ilungen Nr. 3, S. 117), werden wiederhergestellt, so daß sie an dürftige, dem Universitäts-
sich widmende Schüler, welche bereits in der dritten Klasse, von oben gerechnet, sich befinden,
nen von dem Lehrercollegium das Zeugniß guter Fähigkeiten, vorzüglichen Fleißes und eines
tlich guten Verhaltens ertheilt wird, vom Jahre 1848 ab in der Weise verliehen werden
daß alljährlich 450 Thlr. in halbjährlichen Renten am 1. April und 1. October der Gym-
Kasse überwiesen, und von dieser Summe, nach Maßgabe der Zahl und des Bedürfnisses
eptionsfähigen Competenten, Stipendien zu 100 und zu 50 Thalern gebildet werden, deren
liche Verleihung von dem Königl. Provinzial-Schulcollegium auf den Vorschlag des Directors
Die Gelder selbst werden von der Kasse nur an die Eltern oder Vormünder der Beneficiaten
Quittung gezahlt; auch müssen erstere nach Beendigung des halben Jahres sich gegen den
über die zweckmäßige Verwendung der erhaltenen Summen ausweisen.

2) (Rescript vom 31 März.) Es wird Bericht erfordert über Erfahrungen bei Anwendung
hardtschen Methode und einiger dazu gehörigen Schulbücher.

3) (Rescripte v. 10. u. 22. April.) Bei Genehmigung des Lectionsplans für das Sommer-
wird Bericht erfordert, ob Sexta nicht getheilt werden könne, und über einen dazu aus-

zubauenden Raum. — Dieser Bau wird im bevorstehenden Sommer ausgeführt werden; Nachricht darüber und über Ausführung der beabsichtigten Theilung bleibt dem nächsten Prog vorbehalten.

4) (7 Rescripte vom 20. April an.) Damit alle Gymnasiasten, soweit nicht körp Schwäche oder der bestimmt ausgesprochene Wille der Eltern sie abhält, desto gefahrlose wirksamer am Turnen Theil nehmen können, wird nach Verhandlungen mit der Königl. cations-Behörde und unter Genehmigung des Hohen Ministeriums bestimmt:

Es wird in den Festungswerken vor dem Ulrichsthore ein gemeinschaftlicher Turnpl beide hiesige Gymnasien und das Schullehrer-Seminar bewilligt; jede dieser Anstalten benu an 2 Nachmittagen der Woche. Zum Lehrer für die Gymnasien wird Herr Dr. Kretsch (vgl. oben S. 26), für das Seminar der städtische Lehrer Herr Kalkow ernannt. Der Vo besteht aus den Directoren der drei Anstalten, deren Einer in jährlichem Wechsel die Verwaltu

Um Einrichtung des Platzes u. s. w. hat sich Herr Buchhändler Heinrichshofe mit großer Vorliebe, Sachkenntniß und Uneigennützigkeit dankbar anzuerkennendes Verdienst erw es ist bis in den Herbst hinein geturnt worden, und für den bevorstehenden Sommer ist (u 20. Jan. d. J.) das Fortbestehen der Uebungen in der bisherigen Weise bereits genehmigt Kosten sind von den drei Anstalten verhältnißmäßig getragen, bis jetzt ohne von den S besondere Beiträge zu erheben.

5) (Rescr. v. 8. u. 25. Mai.) Der stenographische Unterricht soll nur in den Klassen bis Tertia einschließlich Statt finden. Demgemäß hat Herr Intendantur-Secretair L auch in diesem Jahre Schülern aus Ober-Tertia und Unter-Tertia, die dazu Lust und hatten, resp. 2 und 1 Stunde ertheilt und sich mit den Fortschritten zufrieden erklärt.

6) (Rescr. v. 8. Mai u. 24. Juni.) Der seit längerer Zeit beurlaubt gewesene Herr Grunow wird wieder in das Lehrer-Collegium eintreten.

7) (Circularerlaß v. 21. Mai.) Wenn ein Abiturient das Zeugniß der Reife blos bestimmter Berücksichtigung eines bestimmten Fachs, z. B. des Forstfachs, nach §. 28 Prüfungsreglements, erhält, so soll gleich in der Ueberschrift der Ausdruck »Zeugniß der näher bestimmt werden durch Angabe des Fachs, für welches die Reife zuerkannt ist.

8) (Circular v. 2. November.) Alles Gymnasial-Eigenthum soll gegen Feuersg versichert werden. Die dadurch herbeigeführten Abschätzungen sind vollendet, und der A mit der Aachen-Münchener Versicherungsgesellschaft steht jetzt bevor.

Frequenz.

Die Schülerzahl betrug:
zu Anfang des Sommerhalbjahrs: 430.
» » » Winterhalbjahrs: 435.
und beträgt jetzt am Schlusse des Jahres: 416.

Das abgewichene Jahr hat uns ungewöhnlich viele Todesfälle gebracht.
Es starb am 31. October 1847: der Sextaner Gustav Freye a. Magdeburg, am nervösen Scharlachfieber, im 13. Jahre;
mselben Tage: der Unter-Quintaner Bruno Witzenhausen a. Schermbke, an derselben
heit, 13½ Jahr alt;
lgenden Tage: der Unter-Quintaner August Nagel a. Frose, an der Gehirnentzündung
hr alt;
Dec. der Sextaner Heinrich Grupe a. Magdeburg, ebenfalls am nervösen Scharlachfieber,
. Jahre;
3. März 1848 der Primaner Albrecht Cuno a. Dodendorf, an Lungenschwindsucht, im
hre.

Einige waren nur kurze Zeit, einer nur wenige Wochen unsre Schüler gewesen, als sie
ittern Schmerze der Ihrigen und zu ernster Mahnung für ihre Mitschüler so früh und
itheils so unerwartet schon hingerufen wurden; aber

Allen, die so früh geschieden,
Sanfte Ruh' in ihrer Gruft!
Ihren Seelen ew'gen Frieden!

Zur Universität gingen mit dem Zeugniß der Reife:

elis 1847:
1) Wilhelm Arndt a. Kirchdorf b. Greifswald. (Medic.)
2) Bruno Brieger a. Halle. (Jur.)
3) Friedrich von Gerlach a. Berlin. (Jur.)
4) Franz Sintenis a. Magdeburg. (Jur.)

tern 1848:
1) Gustav Adolf Böttticher a. Magdeburg. (Theol. u. Philol.)
2) Hermann Wilhelm August Cäsar a. Wülfingerode [Sülldorf]. (Jur.)
3) Heinrich Ludwig Otto Costenoble a. Magdeburg. (Jur.)
4) Otto Paul Heinr. Dienemann a. Güsen [Schartau]. (Theol.)
5) Emil Karl Julius Dreyer a. Magdeburg. (Theol.)
6) Karl Ferdinand Hildebrandt a. Magdeburg (Theol.)
7) Hermann Gottlieb Rudolphi a. Schwerz [Dammendorf] (Jur. u. Cam.)
8) Friedrich Ferdinand Schreyer a. Magdeburg. (Theol. u. Philol.)
9) Ferdinand Theodor Adolf Thiele a. Magdeburg. (Theol.)
10) Friedrich Louis von Uklanski a. Magdeburg. (Forstw.)

Aufgaben

zu den freien Arbeiten der drei obern Klassen von Ostern 1847 bis Ostern 1848.

A. Zu den deutschen Arbeiten.

a. in Prima. (Prof. Wiggert.)

1. Die Freuden des Fleißigen (Für die Neueingetretenen). 2. Erst wiege, dann wäge, wage. 3. Willst du, daß wir mit hinein in das Haus dich bauen, Laß es dir gefallen, Stein, i dich behauen. 4. Ein edler Mensch zieht edle Menschen an und weiß sie fest zu halten. (Abiturie Mich. 1847.) 5. Was ist von dem Grundsatze zu halten: man muß es mit keinem Menschen ver oder: Die Schattenseiten des Mittelalters. 6. „Ende gut, alles gut" brauchbarer und bedenklicher beim Eintritte in die erste Klasse. 7. Wie ist das anfängliche Gelingen von Hannibals Unterneh im zweiten punischen Kriege zu erklären? oder: Mensch, du gleichest dem Schiffe, dein Herz dem sc den Segel, Schicksal und Leidenschaft stürmt, halte das Steuer, Vernunft. 8. Was ist zu halt Horazens Rath: Quid sid futurum cras, fuge quaerere? 9. Glück ist schwerer zu tragen, als (Abiturienten zu Ostern 1848). — Einige Aufsätze nach freier Wahl des Gegenstandes, wobei nicht üble dichterische Versuche lieferten.

b. in Secunda. (Candidat Schönstedt.)

1. Licht- und Schattenseiten der spartanischen Erziehung. 2. Lob des Alterthums. 3. neuern Zeit. 4. In wiefern läßt sich vom Aeußeren der Menschen auf ihr Inneres schließen? 5 das Sprichwort „Irren ist menschlich." 6. Haben die Deutschen ein Recht, auf ihren Namen sein? 7. Charakterschilderung Buttler's in Schiller's Wallenstein. 8. Briefliche Schilderung eines gefährten, den der Schreibende unterwegs kennen gelernt hat, und mit dem er in nähere Verbin treten Willens ist. 9. Briefliche Warnung vor dem leichtsinnigen Schließen von Freundschaften. 10 Thema. 11. Welche Eigenschaften historischer Personen sind vorzüglich geeignet, unsere Vorli dieselben zu erwecken? 12. Parallele zwischen Cäsar und Napoleon. 13. Beurtheilung der Handlu Coriolans. 14. Im engen Kreis verengert sich der Sinn, es wächst der Mensch mit seinen größern 15. Es giebt keinen Zufall. 16. Gespräch in der Unterwelt zwischen Julius Cäsar und M. 17. Gespräch in der Unterwelt zwischen Alexander und Diogenes. 18. Licht- und Schattense Luxus. Gespräch. 19. Ein Tag aus dem Leben eines Wallenstein'schen Kriegers. 20. Beantwort Lobrede eines Franzosen auf Ludwig XIV. oder auf Napoleon. 21. Ein Tag aus meiner Schilderung eines Traums. 22. Seit das Paradies verloren, ist die Arbeit Menschenloos, und d wird geboren nur aus der Beschäft'gung Schooß. 23. Briefliche Schilderung eines unangenehme nicht unglücklichen Reiseabenteuers. 24. Die vereitelte Hoffnung. Brief. 25. Schilderung des eines Seemanns. 26. Wie liest man mit Nutzen? 28. Briefliche Aufforderung zur Versöhnung, Feind, der in Unglück gerathen ist. 28. Freies Thema.

c. in Ober-Tertia. (Candidat Schönstedt.)

1. Rede Alexanders des Großen an sein Heer vor der Schlacht am Granikus. 2. Ueb Glück geht doch der Freund, der's fühlend erst erschafft, der's theilend mehrt. 3. Gedenke des wenn du einen fröhlichen Tag hast. 4. Rede Cäsars an seine Soldaten vor der Schlacht bei Pl 5. Gespräch in Wallensteins Lager bei der Nachricht von der Ermordung des Feldherrn. 6. Sch

Frühlingslandschaft. 7. Ueber die zweckmäßigste Benutzung der Mußestunden. Brief an einen jüngern ic. 8. Erster Brief eines jungen Kriegers aus dem Felde nach der Heimath. 9. Gedanken an der Napoleons.

(Lehrer Grunow.)

1. a. Was ist von der sogenannten öffentlichen Meinung zu halten? b. Wie soll man sich gegen bare benehmen? 2. a. Die Kunst, stets zufrieden zu sein. b. Ueber das Sprüchwort: „Wer unter ist, muß mitheulen. Ein Brief. 3. a. Warnung vor zu großer Vorliebe für das Neue. Ein Brief. eidigungen gehören in die Vergessenheit, Wohlthaten ins Andenken. 4. a. Rede Gottfrieds von Bouillon Eroberung von Jerusalem. b. Rede Theodorichs des Großen, als er Italien zu erobern beschlossen 5. a. Beschreibung einer Geburtstagsfeier. b. Feier des Sylvester-Abends. 6. a. Wäre es gut, alle Menschen gleich gesinnt wären? b. Je mehr man einen Schlüssel gebraucht, desto mehr glättet 8. a. Wer durch den Pflug reich werden will, muß ihn selbst anfassen. b. Warum ist es gut, Zukunft nicht zu wissen? 8. a. Seine Fehler nicht verbessern ist so gut als neue begehen. b. Ein Nachbar ist ein edles Kleinod. 7. a. Liebst Du Dein Leben: so verschleudere die Zeit nicht; denn das Zeug, woraus das Leben gemacht wird. b. Ueber die mannigfache Benutzung der Gewächse. Warum schlagen wir die Tugend höher an als Schönheit, hohe Geburt und Reichthum? b. Er Worte auf die Goldwage. Was heißt das? 11. a. Woraus erklärst Du Dir die Anhänglichkeit ren Geburtsort? b. Das Gewissen ist eine Fackel, die den guten Menschen erwärmt, den bösen verzehrt.

d. in Unter-Tertia. (Lehrer Dr. Crusius, Mich. bis Weihn. 1847.)

1. Der Dom zu Magdeburg, vom Neuen Markt aus gesehen. Beschreibung. 2. Das bunte Laub ume. Schilderung. 3. Die neue Eisenbahnbrücke über die Strom-Elbe. Betrachtung. 4. Gedanken erannahen des Winters. 5. Dädalus und Ikarus. Erzählung und Sinn der Sage. 6. Das Weihnachtsfest. (Aus meinem Tagebuche.)

(Kandidat Dr. Kretschmann, Neuj. bis Ostern 1848.)

7. Schilderung: Schneegestöber im Januar. 8. a. Wie schafft man sich Freuden im Unglück? Erfindung der Buchdruckerkunst und ihre wohlthätigen Folgen. 9. (Neben der Lesung von Schiller's Tell.) a. Wilhelm Tell. Erster Akt. b. Wilhelm Tell. Zweiter Akt. 10. a. Walther Tell. rzeichnung. b. Hermann Geßler. Charakterzeichnung. 11. Geschichte einer Stecknadel. (Für ge aus beiden Abtheilungen.)

B. Zu den lateinischen Arbeiten.

a. in Prima. (Erste Abtheilung, Prof. Wiggert.)

1. Kritischer Versuch im Ergänzen und Berichtigen eines dazu entstellten neuern lateinischen Gedichts. ch hineingebrachte prosodische, metrische Fehler, oder sonst ungehörige Wörter mußten als unpassend nach- durch bessere ersetzt, kurze Lücken ausgefüllt werden.) 2. Insignia quaedam apud Graecos et Romanos paria collaudantur. 3. Quomodo apud Romanos juventus erudita atque instituta est ad rempublicam clam? (besonders mit Rücksicht auf gelesene Stellen in Cicero, Quintilian und Horaz.) 4. America plus commodorum quam incommodorum et detrimenti Europaeis attulit. (Disput.) 5. Luculente ut populi Rom. historia virtutem in adversis rebus maxime enitescere. (Abit. zu Mich. 1847.) 6. Civilis secundum Tacitum breviter narrata (nachdem Tac. hist. IV. u. V. gelesen war). 7. Calles antiquos serves amicos. (Amicus ab amico ne hoc praeceptum negligat epistola admonetur.) 8. Homerum si quis enitum putat, omnibus sensibus orbus est. (Disput.) 9. Victoria Salaminia non Graeciae solum sed pae utilissima fuit. (Abit. zu Ostern 1848.)

b. in Prima. (Zweite Abtheilung Oberlehrer Ditfurt.)

α) zu den Aufsätzen:

1. De rebus gestis Alexandri Magni. 2. De natura Aegypti antiquissimisque Aegyptiorum 3. Quibus caussis effectum est, ut Romani orbem terrarum subigerent? 4. De bello Numantino. 5. D Philippi III, regis Macedonum. 6. Epistola commendaticia. 7. De animi aequitate.

β) zu Disputirübungen:

1. Mercatura plus profuisse generi humano videtur an obfuisse? 2. Utrum artifex statuarius ar bonus uterque, magis admirandus? 3. Si praedonibus pactum pro capite pretium non attuleris nullane fr 4. Funem adiectum in incendio si duo arripuerint licetne alterum eripere alteri? 5. Si puerum nummos alteri rescieris, eumne lege jubente judici trades, an celabis et corrigere conabere? 6. Divitiae plus animo excolendo quam paupertas. 8. Pompejus an Caesar plus profuit reip. Romanae? 8. Utrum juris plus sollertiae opus est an medico? 9. Debetne etiam rex, si solus adsit, puerum interiturum ex aqua s 10. M. Attilius Regulus, quod in senatu de redimendis captivis dissuasit, perverse videtur fecisse. 11. nimia, an nimia verecundia plus videtur obesse? 12. Otium litteratum minus laudabile, quam procura 13. Themistocles an Aristides patriae plus utilitatis attulit? 14. Licetne dolo malo uti in hostes? 15. D divina si quis veriorem se opinionem quam vulgus habere putat, eamne is debet enuntiare?

γ) Zur Übung im Erfinden:

1. de voluptate. 2. de placabilitate. 3. de amicitia.

c. in Secunda. (Prof. Dr. Sucro.)

1. Parricidii crimen atrocissimum et esse et habitum fuisse semper a Graecis Romanisque, Cicero in §§ 62 — 73 orat. pro Rosc. Am. comprobare studeat. 2. T. Otacilius in epistola ad amicum scripta Fabii severitate atque superbia spem consulatus sibi plane sublatam conqueritur, ita ut ne ab quidem et minis in se temperatum sit. Cf. Liv. XXIV. 7. extr. sqq. 3. Pelopidas quomodo patriam dominatione Lacedaemoniorum in libertatem vindicaverit, enarratur. 4. Bellum inter Trojanos et Latino de caussis exortum sit, secundum Virgilii in Aeneidis libro VII. inde a v. 286 enarrationem adumbratur.

;eichniß der Schüler des Domgymnasiums zu Magdeburg, zur öffentlichen Prüfung Ostern 1848. [416].

Diejenigen, deren Geburtsort nicht angegeben ist, sind aus Magdeburg gebürtig. In [ ] steht der jetzige Wohnort en, falls dieser nicht mit dem Geburtsorte des Schülers derselbe ist; M. bedeutet dabei Magdeburg.

Prima (38.)

e mit † bezeichneten sind bei der Prüfung am 4. April d. J. für reif zur Universität erklärt worden.

) Böttticher.
Brandt.
Brecht a. Gr. Quenstedt [Ochtsleben].
nn Cäsar aus Wülfingerode ülldorf].
Dostenoble.
ienemann a. Güsen [Schartau].
) Döbber a. Hakeborn.
öring a. Sandau.
Dreyer.
her a. Ziesar [Hohendodeleben.]
itsche a. Barleben.
ve a. Gr. Holzhausen i. d. Altm.
Hermann a. Schönebeck.
Reinhold Heyn.
†Ferdinand Hildebrandt.
Hugo Keßler.
Friedrich Knobbe a. Bahrendorf [M.]
Ferdinand Koch a. Parey [Ringfurth].
Louis Lagemann a. Wanzleben.
Otto Lehmann a. Stendal [M.]
Louis Leithoff.
Albert Lücke.
Ernst Meyer a. Letzlingen [Kloster Neuendorf].
Heinrich Pfanne a. Gommern.
Heinrich Rathmann aus Klein-Lübs [Wasserleben b. Wernigerode].
†Hermann Rudolphi aus Schwerz bei Halle [Dammendorf b. Halle].
Heinrich Rustenbach a. Nordgermersleben.
Emil Schlunck a. Schönebeck.
Hermann Schmidt a. Borne.
†Ferdinand Schreyer.
Karl Siegfried.
Fedor Sucro.
Gustav Teubner.
†Adolf Thiele.
Emil Torges a. Mühlhausen [M.]
†Louis von Uklanski.
Wilhelm Uterwedde a. Wolmirstedt.
Theodor Wagner a. Bleckendorf.

Secunda (49)

Die zur obern Abtheilung dieser Klasse gehörigen Schüler sind mit * bezeichnet.

aun a. Schermke.
Braune* a. Winningen.
Bunge a. Micheln.
) Decker a. Schönebeck.
Degenkolb aus Eilenburg.
Dorendorf a. Gardelegen
uhaldensleben].
Fischer a. Ziesar [Hohendoen.]
cher.
se a. Quedlinburg [Bukau.]
Fritze a. Scharteuke [M.]
on Gerlach* a. Kläden bei
dal [M.]
Grape a. Barleben.
Große a. Erfurt [M.]
Grothe a. Berlin [M.]
Hachtmann a. Anhalt b. [Barby].
Händler* a. Altenweddingen
iptmann a. Tarthun.
Max Hirsch* a. Halberstadt [M.]
Theodor Humbert a. Berlin [M.]
Albert Jacoby.
Karl Jaensch a. Mühlhausen [Schönebeck].
Karl Janicke.
Karl Kortum* a. Hakeborn [Schwaneberg].
Max Lange.
Hugo Langenstras aus Schönebeck [Plötzky].
Oscar Laué a. Magdeburg [Sandkähnert b. Burg].
Adelbert Lichtenberg a. Seehausen b. Magdeburg.
Julius Liepelt.*
Louis Mehlhose a. Dönstedt [Forsthaus Böddensell].
Louis Meyer a. Gr. Oschersleben.
Karl Müller* a. Samswegen.
Wilhelm Münde a. Schönebeck.
Heinrich Otto a. Schwaneberg.
Johannes Rathmann a. Magdeburg [Cracau].
Julius Reinecke.
Theodor Reinecke a. Gr. Salze.
Rudolf Reinsch a. Ratibor [M.]
Louis Roch.
Ferdinand Rudolphi a. Dammendorf.
Ernst Scheringer.
Karl Schmücker a. Loburg [Prödel b. Leitzkau].
Hermann Schulze a. Salzwedel [M.]
August Schwarzlose a. Ziesar.
Albert Sieger* a. Egeln.
Friedrich Malotki v. Trzebiatowski* a. Torgau [M.]
Otto Volgenau* aus Kaltenhof bei Perleberg.
Eduard Weniger a. Neuhaldensleben.
Hermann Zabel a. Schönebeck.
Theodor Zollmann.

Ober-Tertia (36).

auermeister a. Loitsche.
Born a. Rottstock [Ziesar].
üggemann.
oqui a. Gr. Germersleben [M].
tritz.
ncke a. Gr. Wanzleben.
mme a. Bensdorf b. Genthin thin].
üssow a. Kloster Gröningen n].
Udo v. Heeringen [Großbartensleben].
Ernst Hermann a. Schönebeck.
Hugo Holstein.
Gustav Jäckel.
Emil Knüppel.
Felix Krüger, Moritz Krüger } a. Colbitz [M.]
Ernst Kühne a. Saarmund b. Potsdam [M.]
Friedrich Kuhnert.
Max Lamlé a. Coblenz [M.]
Theodor Lemke.
Konrad Listemann.
Reinhold Meinecke.
Ernst Meyer.
Wilhelm Meyer.
Friedrich Michaëlis.
Emil Müller a. Samswegen.
Karl Oppermann a. Gr. Ammensleben [Stemmern].

Friedrich Reißner a. Osterwieck [M.]
Wilhelm Rohde a. Egeln.
Wilhelm Roterberg a. Salbke.
Philipp Scheringer.
Richard Silberschlag.
Louis Thiele a. Hessendamm [M.]
Theodor Tuchen a. Staßfurth.
Eduard Varges a. Berlin [M.]
Karl Wiebelitz a. Gr. Salze.
Odo von Wulffen a. Pietzpuhl

Unter-Tertia (34.)

Louis Bergmann a. Neumühl b. Salzwedel.
Andreas Brösel a. Zenz b. Calbe.
Eduard Bussenius a. Sohlen [Wellen].
Rudolf Cuno a. Dodendorf.
Adolf Curitz.
Julius Freytag a. Dodendorf.
Oscar Fritze.
Ernst Güssow a. Kloster Gröningen [Egeln].
Hermann Gödecke a. Bischofswalde b. Errleben.
Albrecht Heineke a. Schönebeck.
Karl Hildebrandt.
Rudolf Humbert a. Berlin [M.]
Emil Junghann a. Aschersleben [Drakenstedt].
Bruno Käsebier a. Schönebeck.
Albert Käsemacher.
Richard Kühnau.
Werner Lindemann a. Osterburg [M.]
Wilhelm Mathias.
Hermann Mechow a. Ramstedt.
Ekbert Müller.
Hermann Muths a. Erfurt.
Rudolf Neuland a. Gr. Glogau [M.]
Hermann Papendieck.
Ernst Schmutz a. Crüssau [Werkleitz b. Calbe].
Julius Thäder.
Ernst Thilo a. Möckern.
Oscar Weber a. Burg [M.]
Louis Weniger a. Neuhalden
Karl Wetter a. Genthin [Su
Max Witzenhausen a. Scherr
August Wolfrom.
Richard von Wulffen a. Wü richow [Loburg].
Max Zernial a. Cleve [Neu leben].
Hermann Zieger a. Sandau [

Ober-Quarta (28.)

Hermann Bochat a. Mäckern b. Rheinsberg [Perleberg].
Albrecht Conradi a. Schönebeck.
Herman Crusius a. Deutsch i. d. Altmark [Siestedt].
Hermann Elsner a. Reichnow b. Wrietzen [Kl. Rosenburg].
Victor von Fischer a. Danzig [M.]
Gustav Hartmann.
Louis Henz.
Wilhelm Jellinghaus.
Oscar Koch a. Parey.
Albert Koch a. Gr. Rossau b. Osterburg.
Rudolf Kornfeld.
Wilhelm Kreuzmann.
Albert Lagemann a. Wanzleben.
Rudolf Lösener.
Wilhelm Luther a. Schönebeck.
Karl Maquet.
Gustav Müller a. Salbke.
Wilhelm Naumann a. Osterweddingen.
Hermann Peters.
Wilhelm Riedel a. Neuhalde
Louis Schieß.
Theodor Schmidt a. Uhrsleb
Emil Starke.
Fritz Theune a. Gr.-Salze [He
Ferdinand Tuckermann.
Karl Ursinus.
Gustav Voigt a. Wolmirsted
Friedrich Zernial a. Cleve [Ne leben].

Unter-Quarta (39.)

Julius Bank a. Schraplau.
Julius Berger a. Nordhausen [M.]
Gustav Biermann a. Errleben.
Rudolf Costenoble.
Friedrich Dannenberg a. Schneitlingen.
Emil Dieterici a. Gr.-Ballerstedt bei Osterburg [Lostau].
Karl Dynnebier.
Heinrich Faber.
Hugo Förste.
Friedrich Frölig a. Ribbendorf bei Weferlingen.
Gustav Haug.
Walter Heineke a. Schönebeck.
Karl Henheik a. Ackendorf.
Wilhelm Heuckenkamp.
Ernst Hundt a. Calbe a. d. S.
Emil Jahn a. Loburg. [M.]
Ernst Karnstedt.
Heinrich Knoche.
Wilhelm Könecke a. Gr.-Wanzleben.
Ernst Krüger.
Rudolf Kühne a. Berlin [M.]
Wilhelm L'hermet.
Theodor Liepelt.
Oscar Mehlhose a. Barleben.
Robert Möhring.
Reinhold Nesemann a. Bahrendorf.
Ferdinand Piatscheck.
Franz Rudolphi a. Dammendorf b. Halle.
Gustav Seipke aus Kalten Oebisfelde.
August Scharrer.
Arnold Schnarr a. Burg [Su
Wilhelm Starke a. Gr.-Sal
Hermann Sucro.
Richard Temming.
Eduard Weber.
Rudolf Weise a. Derenbu Neustadt].
Eduard Wiermann.
Ernst Zernial a. Cleve [Ne leben].
Wilhelm Zernial a. Neuhalde

Ober-Quinta (45.)

Louis Behrendt a. Schönebeck.
Hermann Biermann a. Errleben.
Otto Brösel a. Tangermünde [Neue Neustadt-Magdeburg].
Adolf Bussenius a. Sohlen [Wellen].
Adolf Clement.
Wilhelm Deppe.
Richard Dohlhoff.
Friedrich Duchstein a. Bukau.
Maximilian Fischer.
Eduard Fischer a. Gr.-Wanzleben. [M.]
Hugo von Fischer a. Danzig [M.]
Otto Heyn.
Albert Hildebrandt.
August Kämmerer a. Heinrichsberg.
Robert Kleinecke a. Neuhaldensleben.
Karl Knevels.
Julius König.
Rudolf von Kotze.
Hugo Kühne a. Stolberg [M.]
Alwin Kummer a. Bahrendorf.
August Maquet.
Albert Maquet.
Bernhard Meyer.
Otto Muths.
Richard Paasche a. Althal [Neue Neustadt-Magdel
Gustav Papendieck.
Karl Rejall.
Hermann Rönsch.
Hermann Saalwächter a. Er
Adolf Sasse.
Adolf Scherping a. Olvenste
Julius Schirrmeister a. Kob
Theodor Schliephak a. Gr.-W

f Schmelzer a. Commende Bergen
). Seehausen im Magdeburgischen.
rich Schrader.
hard Graf von der Schulenburg
n. Schwanebeck.

Hugo Stötzer a. Prenzlau [M.]
Emil Trenkmann.
Eduard Ulrich a. Schackensleben.
Julius Voigtel.
Richard Waltenberg a. Leitzkau [M.]

August Wernecke a. Bukau.
Theophil Wieruszewski.
Paul Wolfart.
Louis Wolter.

Unter-Quinta (62).

a von Alemann a. Altenplathow.
uw Baensch.
st Bethge a. Eggersdorf.
Böse a. Leitzkau [M.]
Brockhaus.
w Bussenius a. Calbe a. d. S.
v Clement.
Dannehl.
lf Danckworth.
rd Deneke.
Ebeling.
e or Eisenhardt a. Schönebeck.
ian Falkenberg a. Eikendorf.
v Feber a. Neue Neustadt Mag-
eburg.
Finzenhagen a. Oebisfelde.
ich Fischer.
Fischer.
ert Förste.
Freundt a. Kl.-Paschleben b.
öthen [N. Neustadt-Magdeb.]
Fritze.
Grobe a. Calbe a. d. S.

Ernst Grüson.
Hermann Günther.
Andreas Heinrichs a. Ochtmersleben
[Neuhaldensleben.]
Rudolf Horch.
Albert Humbert.
Albert Ibold.
Karl Käsemacher.
Hans von Kaltenborn-Stachau.
Ferdinand Köhler.
Hermann Kost a. Wellen [M.]
Christian Lindstädt a. Behlitz [Wallwitz.]
Udo Lorenz.
Robert Maaß.
Gustav Meitzendorff.
Wilhelm Nagel a. Wackersleben.
Adolf Naumann.
Otto Nolte a. Rätzlingen.
Ludwig Otto.
Ulrich Paasche a. Neuhaldensleben
[Neue Neustadt-Magdeburg.]
Bernhard Pape a. Hohen-Leina [M.]
Friedrich Pielert.

Gustav Prey a. Berlingerode.
Otto Reibe.
Franz Robolsky.
Friedrich Roch.
Hugo Roch.
Louis Rückert.
Louis Ruprecht a. Schönebeck [M.]
Otto Schäffer a. Groppendorf.
Albert Schildt a. Hasselburg.
Rudolf Schmilinsky.
Hermann Schönfeldt a. Calbe a. d. S. [M.]
Wilhelm Schubert.
Friedrich Spamann a. Sudenburg-
Magdeburg.
Emil Stahlknecht a. Neuhaldensleben
Karl Stein.
Wilhelm Stöffler a. Westerhüsen.
Emil Beckenstedt a. Behlitz.
Albert Wagenknecht a. Kloster Neuen-
dorf b. Gardelegen.
Friedrich Walther a. Üdem b. Cleve.
Karl Weihe.

Sexta (85.)

von Alemann a. Weferlingen.
d Arndt a. Querfurt.
or Aßmann.
nn Bauermeister.
Beck.
un Bedau a. Wolmirsleben.
Braun a. Schermke.
Brockhaus.
n Brünicke.
uchholz.
ch Buchholz.
Burchardt a. Sudenb.-Magdb.
Chwatal.
n Costenoble.
s Cuny.
annehl a. Angern.
Dörfling.
Eccardt aus Ornshagen in
mmern [M.]
Faber.
d Friedrich.
ritze.
Fritze.
ritze a. Scharteuke.
itze.
ericke.
ottschalk.
Haack.
ager.
Heyne.
n Heinrich.

Otto Hemptenmacher.
Max Henny a. Berlin [M.]
Emil Hildebrandt a. Stettin [M.]
Eduard von Homeyer a. Trier [M.]
Friedrich Janke a. Barleben.
Heinrich Kayser.
Paul Koch a. Groß-Rossau.
Robert Kohls.
Karl Kuchenbuch a. Sudenb.-Magde-
burg [M.]
Adolf Kühne.
Otto Künne.
Louis Lange a. Arendsee.
Theodor Lange.
Ludwig Lehmann a. Stendal [M.]
Friedrich Lindau a. Schartau [M.]
Adolf Luber.
August Lüders a. Groß-Mantel.
Wilhelm Lutz a. Gardelegen [M.]
Otto Marth a. Kolberg [M.]
Matthias Nesemann a. Klein-Lübs.
Friedrich Nickau a. Seehausen [M.]
Ferdinand Ortel a. Saarbrück [M.]
Karl Otto.
Rudolf Otto a. Sudenburg-Magdeb.
Alwin Panzer a. Nedlitz.
Wilhelm Papendieck.
Louis Pätsch.
Otto Prüß.
Wilhelm Ranzow.

Fritz von Rosenberg a. Frankfurt a. d.
O. [M.]
Wilhelm Rost.
Karl Rühle.
Hermann Schäffer.
Fritz Schieß.
Hermann Schliebs.
Georg Schneider.
Hermann Schultze.
Gustav Stock a. Neue Neustadt-Mag-
deburg [M.].
Friedrich Stolze a. Oebisfelde.
August Stübner.
Theodor Teichner.
Wilhelm Thiele.
Friedrich Totte.
Johannes Uhlich a. Pömmelte [M.]
Heinrich Waltenberg } a. Leitzkau [M.]
Theodor Waltenberg }
Bernhard Weber.
Albert Weihe a. Alte Neust.-Magdb.
Otto Wesemeyer a. Seehausen.
Gustav Wilhelmy a. Althaldensleben
[M.]
Heinrich Winselmann a. Niederndo-
deleben.
Alwin Wisch a. Oebisfelde.
Hermann Wolter.
Leo von Wulffen a. Pietzpuhl.
Theodor Zimmermann a. Wittenberg.

Oeffentliche Prüfung im Domgymnasium

am 14. April 1848.

Vormittag 8 bis 12½ Uhr.

Sexta: Geographie (Hr. Lehrer Weise).
Unter-Quinta. Geschichte (Hr. Lehrer Hase.)
Ober-Quinta. Naturbeschreibung (Hr. Lehrer Krasper.)

Ober-Quarta. Mathematik (Hr. Candidat d. h. Sch. A. Gorgas).
Unter-Tertia. Griechisch (Hr. Oberlehrer Ditfurt).
Ober-Tertia. Lateinisch (Hr. Prof. Wiggert).
Secunda. Lateinisch (Hr. Prof. Dr. Sucro).
Prima. Deutsch (Hr. Prof. Wiggert).

Druck und Papier von C. Baensch jun. in Magdeburg.

Programm

des

Königl. Domgymnasiums zu Magdeburg,

zu Ostern 1849

herausgegeben

von

Friedrich Wiggert,
Director und Professor.

Inhalt: 1. Ueber die Analysis auf der Kugel. (Beschluß der in den Programmen von 1847 und 1848 gelieferten Abhandlung.) Von R. Gorgas.
2. Schulnachrichten über den Zeitraum von Ostern 1848 bis Ostern 1849.

11.

Magdeburg, 1849.
bei W. Heinrichshofen.

11

Ueber die

Analysis auf der Kugel.

(Beschluß der in zwei frühern Programmen gelieferten Abhandlungen.)

Von

R. Gorgas,
Gymnasiallehrer.

Viertes Capitel.

Von den Kugelspiralen.

§. 1.

Vorbemerkungen.

In den zwei voraufgehenden Programmen des Domgymnasiums (für 1846/47 und 1847/48)) die Anfangsgründe der Analysis auf der Kugeloberfläche entwickelt und zuletzt gezeigt, daß gelschnitte der Planimetrie hier nur ein einziges Analogon in der sogenannten Kugel- haben, deren verschiedene orthographische und perspectivische Projectionen auf die Centralebne Ellipsen[1]), bald als Hyperbeln[2]), in besonderen Fällen auch als Parabeln[3]) erscheinen, der Lage der Projectionsebne zur Kugelellipse; dadurch wird ein neues Licht auf den schon geldurchschnitt sich ergebenden Zusammenhang zwischen den Curven zweiten Grades auf e unter einander geworfen; hauptsächlich aber wird aus dem Gange der sphärisch-analytischen ung das klar, daß die ebnen Kegelschnitte in zwei Hauptklassen, Ellipsen und Hy-

---

[1]) cf. Cap. III. §. 8—9 und 18. Programm für 1847/48.

[2]) Cap. III. §. 9—11, §. 18—20.

[3]) Cap. III. §. 22—23. Hierbei sind einige Berichtigungen nachzutragen: Es muß Cap. III. §. 23. (pag. 21.(-14 v. o. der kleine Satz: »diese Curve — Kugelellipse« gestrichen werden, desgleichen Zeile 8 v. u. ist das rmel (5.) in + umzuwandeln; ferner Zeile 2. v. u. die Worte: »der Kugelellipse« wegzulassen, Anmerk. 2. 22. Zeile 3—7 v. o. zu streichen.

perbeln [allgemeine Fälle] zu trennen sind, während Parabeln und Kreise [beso Fälle] den ersten nur subordinirt werden können. Das Folgende soll als vorläufiger Abschl Abhandlung die Resultate enthalten, die ich bei der Bestimmung der Gleichung, des Flächen und der Bogenlänge einer neuen Art von Kugelcurven erzielt habe, welche ich, der Analogi Curven zufolge, Kugelspiralen nennen will.

§. 2.

Ueber das Wesen und die wichtigsten Classen der Kugelspiralen.

Denkt man sich einen Normalkreis um zwei, sich diametral entgegenstehende Puncte d gedreht, und von einem dieser Pole auf dem Normalkreise aus einen andern Punct bewegt Geschwindigkeit in einem bestimmten, sich gleich bleibenden Verhältnisse zur Drehungsgeschwi des ganzen Normalkreises steht, so ist der Weg dieses fortbewegten Punctes eine sogenannte spirale. Der Name ist der Classe von Curven in der Ebne entlehnt, bei denen eine u festen Punct bewegte Grade [bei stetem Verharren in derselben Drehungsebne] die Stelle Kreises auf der Kugel vertritt, und von der z. B. die Spirale des Archimedes (nach des Conon) ein besonderer Fall ist.

Je nachdem nun das Verhältniß der Geschwindigkeiten des Puncts und des Kreises ein metisches oder ein geometrisches ist, wollen wir von Spiralen I) des arithmetisch II) des geometrischen Verhältnisses sprechen, andre denkbare Fälle aber für jetzt übe

An die Spitze der Sp. arithmetischer Proportion stelle ich der Einfachheit diejenige, bei welcher Punct und Kreis gleiche Geschwindigkeit haben und nenne diesel erster Ordnung; höherer Ordnung sind somit alle diejenigen derselben Classe, welche heres Verhältniß der Geschwindigkeiten, als das 1 : 1, [allgemein n : 1], niederer Or die, welche ein niedrigeres Verhältniß, [z. B. 1 : n] haben. Von jeder dieser Arten gen Beispiel; dann folgt die allgemeinere Betrachtnng über die bezügliche Ordnung.

Die Spirale erster Ordnung mit arithmetischem Verhältniß.

§. 3.

Gleichung und Gestalt. (Fig. 1.)

Die Puncte E und F seien die festen Pole der Bewegung des Normalkreises EAF gangspunkt derselben sei A, die Bewegung sei von A nach B gerichtet; ist also z. B. der E EA in die Lage Ea gekommen, so muß von E aus der Punkt soweit herabgelaufen sein,

gungsbogen = Aa, d. h. gleich der Bogengeschwindigkeit des Normalkreises ist; man mache also = $\overset{\frown}{Aa}$, oder was dasselbe ist $\overset{\frown}{Ba} = \overset{\frown}{a\alpha}$, so ist, (wenn B Coordinatenanfangspunct, EBF die sphä- Y-Achse, BaA die zugehörige X-Achse):

$$\xi' = \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.)$$

Gleichung der Kugelspirale erster Ordnung mit arithmetischem Verhältniß. Gleichung soll aber noch auf trigonometrische Form gebracht werden: es ist also [weil, wie erhellen wird, η und ξ' sowohl + als − zu nehmen]:

$$\sin \xi' = \sin \eta \text{ oder } \frac{\operatorname{tang} \xi'}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \xi'}} = \operatorname{tang} \eta' \cos\delta,$$

uch:

$$\operatorname{tang}^2 \eta' = \operatorname{tang}^2 \xi' (1 + \operatorname{tang}^2 \xi') \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

ne Gleichung für diese Kugelspirale in trigonometrischer Form. Ihre Untersuchung führt auf eitern Eigenthümlichkeiten der Curve (Fig. I.)

1) Ein Normalkreis kann die Curve in 4 Puncten schneiden, denn ihre Gleichung ist 4ten , die des Normalkreisbogens nur vom ersten Grade. Die Curve hat also 4 Arme.

2) Die Lösung der biquadratischen Gleichung für tang ξ' führt auf 4 Werthe dieser Tan- die einander zum Theile (je zwei und zwei) bis auf das Vorzeichen gleich sind. Die Wur- uten:

$$\text{(1. u. 2.) } \operatorname{tang} \xi' = \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + \operatorname{tang}^2 \eta'}}$$

$$\text{(3. u. 4.) } \operatorname{tang} \xi' = + \sqrt{-\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + \operatorname{tang}^2 \eta'}}$$

s folgt: a) Ist $\operatorname{tang} \eta' = 0$, so ist (1. u. 2.) $\operatorname{tang} \xi' = 0$

b) Ist $\operatorname{tang}^2 \eta' > 0$, so ist (1. u. 2.) tang ξ' reell, bis ins ∞, was anzeigt, daß, wenn $\eta' = 90^0$, auch $\xi' = 90^0$ wird, abgesehn vom Vorzeichen.

c) Die Wurzeln (3. u. 4.) tang ξ' sind stets imaginär;

e Figur ergiebt sich daraus ad a): daß die beiden obern und untern Arme der Curve sich rdinatencentrum schneiden müssen, also erst von da ab in 4 Zweige auseinandergehen; ad b): Arme zu beiden Seiten der Y-Achse symmetrisch verlaufen, und für $\eta' = 90^0$ (also in beiden der Normalkreisbewegung,) sich wieder mit einander vereinigen. ad c., daß weitere ufer der Curve nicht vorhanden sind, welche mit obigen 4 Armen ein gleiches η' ge- ftlich haben.

Endlich 3.) da die Gleichung für $\operatorname{tang}^2 \eta'$ in (2.) in allen Gliedern von gerader Dimen- also die Vorzeichen von tang ξ' keinen Einfluß auf die Verschiedenheit der zwei $\pm$ Wur- Gl. für tang η' haben können, so giebt es für jeden möglichen Punct der Curve über und er X = Achse der Kugeloberfläche und rechts und links von der Y = Achse derselben einen

symmetrisch gelegnen, d. h. die Spirale ist auch in Bezug auf die Lage gegen die sphärische X vollkommen symmetrisch.

Aus alledem geht klar hervor, daß der Weg des Punktes nach obiger Bedingung Form einer 8 geschlungene Curve sei, die sich über die eine Halbkugel ausbreitet, deren P Coordinatencentrum der Oberfläche ist[1]) und die von jeder sphärischen Coordinaten-Achse in zungspunkte halbirt wird.

§. 4.

Projectionen auf die Ebne.

1) In Raumcoordinaten erhalten wir die Gleichung unsrer Spirale, wenn wir

tang ξ' und $\frac{y}{z} = \text{tang } \eta'$ setzen; [cf. Cap. I. §. 1. (3.)]: alsdann ist die Form derselben:

$$y^2 z^2 = x^2 (x^2 + z^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.)$$

oder, da $x^2 + z^2 = r^2 - y^2$, wo r der Radius der Kugel,

$$r^2 x^2 = y^2 (x^2 + z^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.)$$

daraus: $\frac{y^4}{x^4} = \frac{r^2}{z^2}$ oder $\pm \frac{r}{z} = \frac{y^2}{x^2}$ . . (3.), oder $\pm rz = x^2 + z^2$ . . (4.)

2) Daraus folgt [nach (4.)], daß die senkrechte Projection der Curve auf die XZ-Eb Kreis sei. Denn (cf. Fig. II.) da BM die Z-Achse, MD die X-Achse der Raumcoordinaten repr so ist für den Punct p in der XZ-Ebne (als Project von P auf der Kugel)

$$r.z = BM.qM$$

und: $x^2 + z^2 = \overline{pq}^2 + \overline{qM}^2 = \overline{pM}^2$, also ist $\pm BM.qM = pM^2$ . . . . . (5.)

d. h. Die Gleichung eines Kreises, der über dem Halbmesser der Kugel al $\frac{r}{2} = \varrho$ als Radius beschrieben ist. Die Kugelspirale erster Ordnung mit metischem Verhältnisse ist also die Durchschnittscurve zwischen der Kuge fläche und der Oberfläche eines senkrecht auf jenem Kreise (5.) errichtete linders.

3) Die senkrechte Projection auf die XY-Ebne giebt, durch Elimination von z^2 a die Curvengleichung:

$$v^4 - y^2 r^2 + x^2 r^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6.)$$

---

[1]) Ein Schiff würde z. B. im Falle das Meer die [völlig kugelrunde] Erde überall bedeckte, vo pol östlich durch den Aequator westlich zum Südpol, von da wieder östlich zurück durch denselben Punct de tors auf der westlichen Seite des Meridians zum Nordpol gelangen und diese Curve beschreiben müssen, u stets unter gleicher Länge und Breite fortsteuerte.

. vierten Grades und also von einer Graden möglicherweise in 4 Puncten zu schneiden; dieſe Curve geht durch den Anfang der Coordinaten im Kugelcentrum, da für $y = o$ auch $x = o$ Die Wurzeln ſind:

$$(1.\text{ u. }2.)\quad y = \pm\sqrt{\frac{r^2}{2} + \sqrt{\frac{r^4}{4} - x^2 r^2}}$$

$$(3.\text{ u. }4.)\quad y = \pm\sqrt{\frac{r^2}{2} - \sqrt{\frac{r^4}{4} - x^2 r^2}}$$

i zu bemerken, daß, y''' und y'''' reell zu machen, $\sqrt{\frac{r^4}{4} - x^2 r^2}$ reell und $\leq \frac{r^2}{2}$ ſein . und daß für y (1. u. 2.) $= \pm r$ noch einmal $x = o$ ſein muß, d. h. daß die Y-Achſe der Ebne dieſe ebne Curve zweimal außer in dem Coordinatencentrum ſchneidet. Ferner wird für $x^2 >$, alſo für $x > \pm \frac{r}{2}$ dte ganze Wurzelreihe für y imaginär, d. h. die Curve erſtreckt ſich ens auf eine Entfernung $= \pm \frac{r}{2}$ von der Y-Achſe. Dann iſt $\left(\text{nämlich für } x = \pm \frac{r}{2}\right)$ $+\sqrt{\frac{r^2}{2}}$ und $y'' = -\sqrt{\frac{r^2}{2}}$ (desgleichen y''' und y'''' dem y' und y'' an Werthe :).

4) Die ſenkrechte Projection auf die YZ-Ebene ergiebt ſich aus der Gleichung (6. und 3.) durch:

$$y^2 = r^2 \pm rz = r(r \pm z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7.),$$

zu bemerken, daß für $y = 0 : z = \pm r$, für $z = 0$ desgleichen $y = \pm r$ wird. Da aber $r' > r$ ſein darf, ſo gilt in (7.) nur das Zeichen — von beiden, ebenſo auch bei z; die Curve o nur auf einer Seite der Y-Achſe, aber auf zwei Seiten der Z-Achſe (ſymmetriſch) gelegen.

5) Die Gleichung für die perſpectiviſche Projection auf eine Tangentenebene, die durch ıfangspunkt der ſphäriſchen Coordinaten auf der Kugeloberfläche gelegt iſt, wird durch die Glei- n $\frac{x'}{r} = \text{tang } \xi'$ und $\frac{y'}{r} = \text{tang } \eta'$ hergeleitet [cf. Cap. II. §. 10. (3.) und (4.)] alſo iſt ſie:

$$\frac{y'^2}{r^2} = \frac{x'^2\,(r^2 + x'^2)}{r^4}$$

oder $y'^2 r^2 = x'^2 r^2 + x'^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8.)$

Gleichung, welche mit (6.) viele Aehnlichkeit hat; ſie gehört zu einer vieräſtigen Curve, die das Coordinaten-Centrum (Berührungspunct der Tangentenebene) geht, da für $x = 0$, $y = 0$. Da die vier Werthe von x' unter der Wurzel kein — enthalten, ſo iſt für beide Coordina- eine Werthgränze geſetzt, d. h. die 4 Arme der Curve ſind ∞.

6) Endlich die Gleichung für die ſphäriſche Curve von einem ihrer Scheitel (z. B. E in aus gerechnet, wird dadurch gefunden, daß man (ihrer Entſtehungsart zufolge) tang $\delta =$

tang φ schreibt, wobei φ den Winkel $\widehat{AE\alpha}$ ($\widehat{EAF}$ als X-Achse gerechnet) und $E\alpha$ das δ bei

vorausgesetzt, daß die Richtung der Y-Achse (nämlich $\widehat{EBF}$) bleibt.

Da aber $\text{tang}^2\delta = \text{tang}^2\xi'' + \text{tang}^2\eta''$ (neue Coordinaten)

$$\text{tang}^2\varphi = \frac{\text{tang}^2\eta''}{\text{tang}^2\xi''} \text{ (cf. Cap. I. §. 4 und §. 1.)}$$

so ist $(\text{tang}^2\xi'' + \text{tang}^2\eta'')\,\text{tang}^2\xi'' = \text{tang}^2\eta'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9.)$

Die neue Gleichung unserer Spirale auf der Kugel; legt man nun eine Tan Ebne an das neue Coordinatencentrum E, und projicirt darauf die Kugeleurve perspectivisch, die Gleichung der Projectionscurve:

$$(10.) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \dfrac{x''^2 + y''^2}{r^2} = \dfrac{y''^2}{x''^2} \text{ oder } x''^4 + y''^2\,x''^2 = y''^2\,r^2, \\ \text{oder } \pm\dfrac{\triangle}{r} = \dfrac{y''}{x''} \text{ wenn } \triangle^2 = x''^2 + y''^2. \end{cases}$$

welche der vorigen in vielen Stücken so ähnlich ist, daß man die Entwicklung ihrer Eigens ganz in gleicher Weise vornehmen kann.

§. 5.

Quadratur der vorliegenden Kugelspirale auf elementarem Wege.

Um den Flächenraum zu berechnen, den ein Viertel der in Rede stehenden Spirale (s sten Kugelquartier gelegen) einschließt, ohne dabei die Integralrechnung nöthig zu haben, man sich diesen von E aus durch viele auf der X-Achse senkrecht stehende Normalkreisbogen fenartige Streifen, deren Basis je aus kleinen Bögen paralleler Kreise, von der Curv bis zum nächsten Normalkreisbogen rechts und links, gebildet wird. Um dies ersichtlic machen sind deren in der Figur III. nur drei im Innern des Flächenraums (nämlich Eam Eep) und vier äußere Streifen (Epf, End, Emb und EBG) construirt worden. Jedenfa nun F $\left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right.$ als die Summe der innern $\left.\begin{matrix} \\ \\ \text{als die Summe der äußern} \end{matrix}\right\}$ Streifen, und kann daher bei wachsender Anzahl de die Gränze des Flächenwerthes F annähernd gewiß bis zu jeder beliebigen Genauigkeit be werden; denn F wird durch zwei unendliche convergirende Reihen zu bestimmen sein, die Annahme unendlich vieler solcher Streifchen in ihm entstehen und zwischen die der wahre von F fällt. Nun findet man aber leicht durch Berechnung, daß, wenn der Quadrant der X in n gleiche Bögen zertheilt wird, deren jeder $= a$ ist, die Fläche des Streifens EBG $=$

die des Streifens Emb $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos(n-1)\,a)$ des folgenden $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos(n-$

f. bis zum letzten und kleinsten $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos a)$, wobei zu bemerken, daß der erste Streifen

auch $= \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos na)$ zu schreiben ist, da $\cos na = \cos 90^0 = 0$ ist. Nennen wir nun

1) die Summe aller der äußern Streifen, und der Spirale EpnmB Fläche $\mathbf{F}$, während Σ (i) e Summe der innern Streifchen ist, so war $\Sigma(a) > \mathbf{F}$, dagegen $\Sigma(i) < \mathbf{F}$. Aber

$$\Sigma(a) = \frac{r^2\pi}{2n}(n\,[\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos(n-1)a]); \quad (1.)$$

$$\Sigma(i) = \frac{r^2\pi}{2n}(n - 1 - [\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos(n-1)a]); \quad (2.)$$

es ist $\mathbf{F} > \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{n} - \left[\frac{\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos(n-1)a}{n}\right]\right\}$

$$< \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \left[\frac{\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos(n-1)a}{n}\right]\right\} \quad (3.)$$

li leicht ersichtlich, wie der ganze Unterschied sich um den Bruch $\frac{1}{n}$ handelt, der für $n = \infty$ ver**schwindende** Größe wird.

Jetzt kommt es darauf an, die in der Klammer stehende durch n getheilte Cosinusreihe zu niren, wobei wir gleich darauf aufmerksam machen, daß

$+ \cos 2a + \ldots + \cos(n-1)a = \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(n-1)a \ldots (4.)$

$na = 90^0$ ist, weil $\sin(90 - a) = \cos a$ ist. Nennen wir jede dieser Reihen $= S$ so ist zwischen die Gränzen $\frac{r^2\pi}{2}\left[1 - \frac{1+S}{n}\right]$ und $\frac{r^2\pi}{2}\left[1 - \frac{S}{n}\right]$ eingeschlossen.

Nach einer bekannten Reihenentwickelung ist:

$$(5.) \ldots\ldots \sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \frac{a^9}{9!} - \text{etc.}$$

folglich $\sin 2a = 2a - 2^3\frac{a^3}{3!} + \frac{2^5a^5}{5!} - \frac{2^7a^7}{7!} + \frac{2^9a^9}{9!} - \text{etc.}$

etc. etc. etc.

$$\text{also } S = a\,[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] - \frac{a^3}{3!}[1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + (n-1)^3] + \frac{a^5}{5!}[1^5 + 2^5 + 3^5 \ldots + (n-1)^5] \quad \ldots\ldots (6.)$$

etc. etc. etc.

Nach den Grundsätzen über die arithmetischen Reihen höherer Ordnung lassen sich aber die Klammern stehenden Ausdrücke so summiren:

$$(7.) \ldots . 1 + 2 + 3 + \ldots . + (n-1) = \frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}$$

$$(8.) \ldots . 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . + (n-1)^3 = n - 1 + \frac{(n-1)\,(n}{1.}$$
$$+ \frac{12\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{6\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$(9.) \ldots . 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots . + (n-1)^5 = n - 1 + 31.\frac{(n-1)\,(n}{1.}$$
$$+ 180.\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1.\ 2.\ 3} + 390\,\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$
$$+ 360\,\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} + 120.\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Also $\mathfrak{S} = a$ [Reihe in (7.)] $- \frac{a^3}{3!}$ [Reihe in (8.)] $+ \frac{a^5}{5!}$ [Reihe in (9.)] ꝛc. — Für a kann

aber setzen: $\frac{r\pi}{2n}$, denn der Normalquadrant ist $= \frac{r\pi}{2}$, dessen nter Theil $= a$ ist,

$$(10.) \ldots . \text{Folglich ist } \mathfrak{S} = \frac{r\pi}{2}\left[\frac{\text{Reihe in (7.)}}{n}\right] - \frac{r^3\pi^3}{2.3!}\left[\frac{\text{Reihe in (8.)}}{n^3}\right]$$
$$+ \frac{r^5\pi^5}{2.5!}\left[\frac{\text{Reihe in (9.)}}{n^5}\right] \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Setzt man nun $n = \infty$, so ist

$$\frac{\mathfrak{S}}{n} = \frac{r\pi}{2}\left[\frac{1}{2!}\,\frac{\infty.\infty}{\infty.\infty}\right] - \frac{r^3\pi^3}{2.3!}\left[0 + 0 + 0 + \frac{6.}{4!}\,\frac{\infty.\infty.\infty.\infty}{\infty.\infty.\infty.\infty}\right] + \text{ꝛc.}$$

$$\text{d. h.} = \frac{r\pi}{2.2!} - 6.\ \frac{r^3\pi^3}{2.3!4!} + 120.\ \frac{r^5\pi^5}{2.5!6!} - \text{etc. weil von den Reihen}$$

dern in (7.) (8.) und (9.) ꝛc. nur die letzten von gleicher Potenz mit dem
großen Nenner sind, die man (der gleichen Natur und Abstammung wegen), h
einen endlichen Fehler zu begehen, gegen die Zähler heben kann. Die Coeffici
1, 6, 120, 5040 ꝛc. der letzten Glieder in dem Summenwerthe der Reihen oben sind aber a

$$\text{zu schreiben} \left\{\begin{array}{r} 1 = 1! \\ 6 = 3! \\ 120 = 5! \\ 5040 = 7! \\ \text{ꝛc.} \quad \text{ꝛc.} \end{array}\right\} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (12.)$$

folglich, dies in (11.) eingesetzt giebt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathbf{S}}{n} &= \frac{r\pi}{2.2!} - \frac{r^3\pi^3}{2.4!} + \frac{r^5\pi^5}{2.6!} - \frac{r^7\pi^7}{2.8!} + \text{etc.}\\ &= \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{r^0\pi^0}{2!} - \frac{r^2\pi^2}{4!} + \frac{r^4\pi^4}{6!} - \frac{r^6\pi^6}{8!} + \text{etc.}\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (13.)$$

r Werth von $\frac{1}{n}$ ist aber, für $n = \infty$, kleiner als jede angebbare Größe geworden, folglich daus (3.) in diesem Falle:

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{r^0\pi^0}{2!} - \frac{r^2\pi^2}{4!} + \frac{r^4\pi^4}{6!} - \frac{r^6\pi^6}{8!} + \text{etc.}\right\}\right) \ldots\ldots (14.)$$

e chwankende Reihe, die sich durch rasches Convergiren (schon bei dem 9. Gliede) dem Gränzwerthe nähert. Man findet (15.) $\frac{\mathbf{S}}{n} = 0{,}63661977 \ldots = \frac{2}{\pi}$ [cf. später §. 7. (7.)] . also

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}\ 0{,}36338022 \ldots\ldots,$$ d. h.

d dem so vielten Theile der Kugeloctantenfläche, in welcher der Theil unsrer Spirale liegt. eres über die Quadratur siehe §. 7.)

§. 6.

etification der vorliegenden Kugelspirale auf elementarem Wege. (Fig. III.)

Durch die im vorigen §. construirten Kugelstreifen auf der gleichen Basis BG = GH etc., n Seitenbogen EB, EG etc., auf der X-Achse AB senkrecht stehende Normalkreisquadranten sind, ie Spirallienie in eben so viele Abschnitte Bm, mn, np etc., zerlegt, deren Länge von einer , zwischen denselben Endpuncten um so weniger abweicht, je größer die Eintheilungs- ist. Ist also $n = \infty$, so kann man ohne merklichen Fehler sowohl die Dreiecke BGm, c., als die: Bam, mcn etc. als geradlinige rechtwinklige Dreiecke ansehen, also ist, wenn ge Bmn . . . . pE = **L**,

$$(1.) \ldots\ldots \mathbf{L} = \sqrt{\overline{BG^2} + \overline{Gm^2}} + \sqrt{\overline{mb^2} + \overline{nb^2}} + \ldots\ldots + \sqrt{\overline{pf^2} + \overline{Ef^2}};$$

$\widehat{BG} = \frac{r\pi}{2n}$ oder $= \frac{r\pi}{2n} \sin na$, da $na = 90^0$, eben so $\widehat{mb} = \frac{r\pi}{2n} \sin (n-1)\,a$, $\widehat{nd} =$ $(n-2)\,a$, ... $\widehat{pf} = \frac{r\pi}{2n} \sin a$, während $\widehat{mG} = \widehat{nb} = \ldots\ldots = \widehat{Ef} = a = \frac{r\pi}{2n}$ (nach vennatur,) also ist (umgekehrt geschrieben):

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{r\pi}{2n}\left\{\sqrt{1+\sin^2 a} + \sqrt{1+\sin^2 2a} + \sqrt{1+\sin^2 3a} + \ldots\ldots + \sqrt{1+\sin^2 na}\right\}\\ &= \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{\sqrt{1+\sin^2 a}}{n} + \frac{\sqrt{1+\sin^2 2a}}{n} + \text{etc.} \ldots\ldots + \frac{\sqrt{1+\sin^2 na}}{n}\right\}\end{aligned}\right.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze für gebrochene Potenzen entwickelt man aber:

$$(1 + \sin^2 a)^{1/2} = 1 + {}^1/_2 \sin^2 a - {}^1/_8 \sin^4 a + {}^1/_{16} \sin^6 a - {}^5/_{128} \sin^8 a + \text{et}$$

$$(1 + \sin^2 2a)^{1/2} = 1 + {}^1/_2 \sin^2 2a - {}^1/_8 \sin^4 2a + {}^1/_{16} \sin^6 2a - {}^5/_{128} \sin^8 2a + \text{etc.}$$

$$(1 + \sin^2 na)^{1/2} = 1 + {}^1/_2 \sin^2 na - {}^1/_8 \sin^4 na + {}^1/_{16} \sin^6 na - {}^5/_{128} \sin^8 na + \text{etc.}$$

(3.) . . . . . folglich $\mathbf{L} = \frac{r\pi}{2}\left\{\frac{n}{n} + \frac{1}{2n}\mathbf{S}_{(2)} - \frac{1}{8n}\mathbf{S}_{(4)} + \frac{1}{16n}\mathbf{S}_{(6)} - \frac{5}{128n}\mathbf{S}_{(8)} + \text{etc.}\right\}$

wobei zu bemerken, daß:

$$\mathbf{S}_{(2)} = \sin^2 a + \sin^2 2a + \sin^2 3a + \sin^2 4a + \ldots + \sin^2 na;$$

$$\mathbf{S}_{(4)} = \sin^4 a + \sin^4 2a + \sin^4 3a + \sin^4 4a + \ldots + \sin^4 na;$$

2c. 2c. 2c. sei;

auf die Summation dieser Reihen kommt es jetzt hauptsächlich an; eine jede besteht aus nussen der Vielfachen von a bis zu 90°; am leichtesten wird ihre Berechnung nach einer die als ein Ergebniß der Moivre'schen im Lefebure de Fourcy's Analyt. Geometrie in der (übersetzt von Gruner 1848. pag. 82) cf. Lacroix Calc. diff. pag. 71 aufgeführt wird, näm

$$\left.\begin{aligned} {}^1/_2(2\sqrt{-1})^{2m} \sin^{2m}\varphi = \cos 2m\varphi - \frac{2m}{1}\cos 2(m-1)\varphi + \frac{2m(2m-1)}{1.\ 2} \\ \cos 2(m-2)\varphi - \ldots\ldots\ldots \pm {}^1/_2 \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots\ldots(m+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ m} \end{aligned}\right\}$$

Hiernach wird $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$;

$$\sin^4 a = \frac{\cos 4a - 4\cos 2a + 3}{8};$$

$$\sin^6 a = -\frac{\cos 6a - 6\cos 4a + 15\cos 2a - 10}{32};$$

$$\sin^8 a = \frac{\cos 8a - 8\cos 6a + 28\cos 4a - 56\cos 2a + 35}{128};$$

2c. 2c.

also: $\mathbf{S}_{(2)} = \frac{n - [\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \ldots\ldots + \cos 2na]}{2}$;

$$\mathbf{S}_{(4)} = \frac{3n - 4[\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \ldots + \cos 2na] + [\cos 4a + \cos 8a + \ldots + \cos 4na]}{8}$$

und wenn $\Sigma^2 = [\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 2na]$, $\Sigma^4 = [\cos 4a + \cos 8a + \ldots + \cos 4$

ird ferner:

$$\mathfrak{S}_{(6)} = \frac{10n - 15\Sigma^2 + 6\Sigma^4 - \Sigma^6}{32};$$

$$\mathfrak{S}_{(8)} = \frac{35n - 56\Sigma^2 + 28\Sigma^4 - 8\Sigma^6 + \Sigma^8}{128};$$

ist aber, wie leicht zu erweisen:

$\sin^2 a + \sin^2 2a + \ldots + \sin^2 na = \frac{n+1}{2}$, folglich, dies in (5.) eingesetzt, giebt:

$\Sigma^2 = -1$; . . . . . (6.)

so leicht ergiebt sich: $\Sigma^4 = 0$, $\Sigma^6 = -1$, $\Sigma^8 = 0$, etc.

aupt: $\Sigma^{4p} = 0$, $\Sigma^{4p\pm 2} = -1$ . . . . . (7.)

ach wird: $\mathfrak{S}_{(2)} = \frac{n+1}{2}$, $\mathfrak{S}_{(4)} = \frac{3n+4}{8}$, $\mathfrak{S}_{(6)} = \frac{10n+15}{32}$, $\mathfrak{S}_{(8)} = \frac{35n+64}{128}$, überhaupt

$$\mathfrak{S}_{(2p)} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2p}{1.}\,\frac{(2p-1)}{2.}\,\frac{(2p-2)}{3.}\ldots\ldots\frac{(p+1)}{p}}{2^{2p-1}}\, n + \tfrac{1}{2}; \ldots . \quad (8.)$$

ach wird, wenn man $n = \infty$ setzt:

$$(9.) \ldots\ldots \mathfrak{L} = \frac{r\pi}{2}\,[1 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{10}{32} - \tfrac{5}{128}\cdot\tfrac{35}{128} + \text{2c.}]$$

Form des allgemeinen Glieds ist, ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen:

$$\ldots\ldots = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{(1/2-1)}{2}\cdot\frac{(1/2-2)}{3}\ldots\frac{(1/2-m)}{(m+1)}}{1} \cdot \tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{2p}{1}\cdot\frac{(2p-1)}{2}\cdot\frac{(2p-2)}{3}\ldots\frac{(p+1)}{p}}{2^{2p-1}};$$

$p = (m-1)$ ist. Ist m eine $\left\{\begin{matrix}\text{grade}\\ \text{ungrade}\end{matrix}\right\}$ Zahl, so ist das Vorzeichen $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$; jedoch t sich dasselbe ohne weiteres aus dem Producte: $\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}-1)\ldots.\,(\frac{1}{2}-m)$.

Berechnung findet man: $\mathfrak{L} = 1{,}2158\ldots\ldots\frac{\pi}{2}$.

§. 7.

Quadratur und Rectification der Spirale mit Hülfe der Integralrechnung. (Fig. III.)

1) Quadratur:

Man denke sich durch Drehung des Normalquadranten EH nach EG um einen unendlich kleinen GH = $d\varphi$ ein Stück der Curvenfläche (Enm) entstanden, das als unendlich kleiner Zuwachs on erzeugten Flächenstücks $\mathfrak{F}$ = Epn mit $d\mathfrak{F}$ zu bezeichnen ist. Da mn unendlich klein, so ist

der Fehler, wenn man Emn als gleichschenkliches Kugeldreieck ansieht, auch unendlich klein (nach §. 5.), wenn $n = \infty$ ist,

(1.) . . . . . $d\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos\delta)$; wo $\delta = \widehat{En}$ ist; nennt man aber $\widehat{AH} =$

ist, weil $\widehat{En} = \widehat{AH}$, nach der Natur unsrer Spirale,

(2.) . . . . . $d\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}(1 - \cos\varphi)$;

(3.) . . . . . Nun ist auch: $d\varphi = \frac{r\pi}{2n}$ (als unendlich kleiner Theil des Normbranten $\widehat{AB}$), also

(4.) . . . . . $d\mathbf{F} = r d\varphi\,(1 - \cos\varphi)$; folglich:

$$\mathbf{F} = \int r d\varphi\,(1 - \cos\varphi) = r\int d\varphi - r\int \cos\varphi\, d\varphi; \quad \ldots\ldots (5.)$$

Das Stück $\mathbf{F}$ liegt zwischen den Gränzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \delta$, also ist (nach Fig. III.)

$$Epn = r\int_{\varphi=0}^{\varphi=\delta} d\varphi - r\int_{\varphi=0}^{\varphi=\delta} \cos\varphi\, d\varphi$$
$$= r\delta - r\sin\delta + \text{const.}$$

Da für $\delta = 0$ aber $Epn = 0$ ist, so ist $const = 0$, also das vollständige Integral:

$$Epn = r(\delta - \sin\delta) \ldots\ldots (6.)$$

Um das vollständige Viertel der Spiralenfläche im ersten Kugelquartier zu berechnen, ist die (i zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^0$ zu nehmen, also für $r = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{¼ Spiralfläche} = \frac{\pi}{2} - 1 \\ \text{folglich ganze Fläche} = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \end{array}\right\} \ldots\ldots (7.)$$

Nach §. 5 war nun, für $r = 1$,

$$\text{¼ Spiralfläche} = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^0}{2!} - \frac{\pi^2}{4!} + \frac{\pi^4}{6!} - \frac{\pi^6}{8!} \text{ ꝛc.}\right)\right]$$

folglich ist $\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^0}{2!} - \frac{\pi^2}{4!} + \frac{\pi^4}{6!} - \frac{\pi^6}{8!} + \text{ ꝛc.}\right)$

$$\text{d. h. } 1 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\pi^0}{2!} - \frac{\pi^2}{4!} + \frac{\pi^4}{6!} - \frac{\pi^6}{8!} + \text{ ꝛc.}\right) \ldots\ldots (8.)$$

was eine neue Relation zwischen π und endlichen Zahlen ergiebt.

Anmerkung 1. Nach Grunerts Statik p. 392 ist für die ebene Cyclois, wenn die k derselben die Abscissenachse, ihr Anfang der Anfang der x: $x = r(\varphi - \sin\varphi)$, wo φ der Wälz winkel. Ich mache auf die mit (6.) oben merkwürdig übereinstimmende Gleichung aufmerks

Anmerkung 2. Die Quadratur dieser Curve ist der Gegenstand eines mathematischen ä'sels (aenigma geometricum), welches Viviani, der letzte Schüler Galilei's, 1692 der gelehrten ße aufgab, „eine halbkugelige Domkuppel mit 4 gleichen Fenstern so zu durchbrechen, daß der ıje Gewölbsraum vollständig zu quadriren sei." Die Fenster sind nach seiner eigenen Lösung e solche Spiralviertel, deren jedes $= \frac{\pi}{2} - 1$, folglich alle zusammen $= 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ für = 1. Denn, da die Halbkugeloberfläche $= 2\pi$, die Fenster zusammen $= 2\pi - 4$, so ist der re Raum $= 4$ (eigentlich $= 4r^2$). (S. Montucla Hist. d. M. I, pag. 71 und Lacroix Calc. int. pag. 219.

2) Rectifikation.

Das vorher mit construirte unendlich kleine Dreieck mnc ist als rechtwinklig und geradlinig zunehmen, also ist: mn = ds, wenn s = Curvenbogen Epn, dann ist ferner:

$$mc = nb = GH = d\varphi, \quad nc \begin{cases} = \sin\delta.\ d\varphi \\ = \sin\varphi.\ d\varphi \end{cases} \text{[cf. §. 6. bei (1.)]},$$

wenn: $\overline{mn}^2 = \overline{mc}^2 + \overline{cn}^2$, so ist

$$ds = \sqrt{1 + \sin^2\varphi}\ d\varphi \quad \ldots\ldots\ (1,)$$

Integration dieser Differentialgleichung geschieht am besten durch Reihenentwicklung, indem man

$$\sqrt{1 + \sin^2\varphi} = (1 + \sin^2\varphi)^{1/2} = 1 + {}^1/_2\sin^2\varphi + \frac{{}^1/_2({}^1/_2 - 1)}{1.\ 2}\sin^4\varphi + \frac{{}^1/_2({}^1/_2 - 1)({}^1/_2 - 2)}{1.\ 2.\ 3.}\sin^6\varphi + \text{2c. macht;}$$

Nun ist (nach Grunerts Statik pag. 326. Ed. 1826.)

$$(2.)\ \ldots\ldots\ s = \int\sqrt{1 + \sin^2\varphi}\ d\varphi = \int d\varphi + {}^1/_2\int\sin^2\varphi d\varphi + \frac{{}^1/_2({}^1/_2 - 1)}{1.\ 2}\int\sin^4\varphi d\varphi + \text{2c.}$$

Nun ist nach der theilweisen Integration und nach bekannten trigon. Sätzen:

$$\int\sin^2\varphi d\varphi = \int {}^1/_4(1 - \cos 2\varphi)\ \text{d.}\ 2\varphi = {}^1/_4\int \text{d.}\ 2\varphi - {}^1/_4\int\cos 2\varphi d2\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin^2\varphi}{4}$$

$$2)\ \int\sin^3\varphi d\varphi = -\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\int\sin\varphi\cos^2\varphi^2 d\varphi$$

$$= -\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\int\sin\varphi\ (1 - \sin^2\varphi)\ d\varphi$$

$$3\int\sin^3\varphi d\varphi = -\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\int\sin\varphi d\varphi$$

$$= -\sin^2\varphi\cos\varphi - 2\cos\varphi$$

$$\int\sin^3\varphi d\varphi = -\left(\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\cos\varphi}{3}\right)$$

$$3)\ \int\sin^4\varphi d\varphi = -\sin^3\varphi\cos\varphi + 3\int\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi, \text{ also:}$$

$$4\int\sin^4\varphi d\varphi = -\sin^3\varphi\cos\varphi + 3\int\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= -\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{3\varphi}{2} - \frac{3\sin 2\varphi}{4}$$

also: $\int \sin^4\varphi d\varphi = \frac{3\varphi}{8} - \frac{3\sin 2\varphi}{16} - \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi}{4}$

4) $\int \sin^5\varphi d\varphi = -\sin^4\varphi\cos\varphi + 4\int \sin^3\varphi\cos^2\varphi d\varphi$, also;

$5\int \sin^5\varphi d\varphi = -\sin^4\varphi\cos\varphi - 4\int \sin^3\varphi d\varphi$

$\sin^5\varphi d\varphi = -\left(\frac{\sin^4\varphi\cos\varphi}{5} + \frac{4(\sin^2\varphi\cos\varphi + 2\cos\varphi)}{15}\right)$

5) $\int \sin^6\varphi d\varphi = -\sin^5\varphi\cos\varphi + 5\int \sin^4\varphi\cos^2\varphi d\varphi$, also:

$6\int \sin^6\varphi d\varphi = -\sin^5\varphi\cos\varphi + 5\int \sin^4\varphi d\varphi$

$\int \sin^6\varphi d\varphi = \frac{-\sin^5\varphi\cos\varphi + {}^{15}/_{8}\varphi - {}^{15}/_{16}\sin 2\varphi - {}^{5}/_{4}\sin^3\varphi\cos\varphi}{6}$

$= {}^{5}/_{16}\varphi - {}^{5}/_{32}\sin 2\varphi - {}^{5}/_{24}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{\sin^5\varphi\cos\varphi}{6}$;

2c. 2c. 2c.

Für die Gränzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$ wird alsdann wenn $r = 1$,

$s = \frac{\pi}{2} + + {}^{1}/_{2} \cdot \frac{\pi}{2} - {}^{1}/_{8} \cdot \frac{3\pi}{8} + {}^{1}/_{16} \cdot \frac{5\pi}{16}$ — 2c. wie oben,

da alle andere Integralglieder für beide Gränzen = Null werden.

---

2) Die Kugelspiralen arithmetischer Progression höherer und niederer Ordnung

Nach Erklärung unserer Ausdrucksweise giebt es außer der in vorigen §§. besprochenen spirale noch unendlich viele andre Arten, die durch schnellere oder langsamere Bewegu Puncts auf dem sich drehenden Normalquadranten erzeugt werden; jedoch so, daß die Pro welche das Wachsen seines Wegs anzeigt, eine arithmetische bleibt. (cf. §. 2.) Ein Beispiel reicht hin, um danach die allgemeinen Fälle zu behandeln.

§. 8.

Gleichung der Kugelspirale zweiter Ordnung. (Fig. IV.)

Wenn der Punct P bei der Bewegung des Normalquadranten von EA bis ED vo p so läuft, daß $\widehat{Ep} = 2\widehat{DA}$ 2c. so ist die Curve Epmno 2c. eine Spirale zweiter Ordnu der Kugeloberfläche. Verlegt man den Anfang der sphärischen Coordinate nach O, so ist, weil 2c

$2\xi' = \eta$ . . . . . (1.)

die einfachste Gleichung der Curve; folglich ist auch

$2\sin\xi'\cos\xi' = \sin\eta$

$$\text{oder: } \frac{2\operatorname{tang}\xi'}{1+\operatorname{tang}^2\xi'} = \frac{\operatorname{tang}\eta'}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\eta'+\operatorname{tang}^2\xi'}}$$

$$\text{also: } \operatorname{tang}^4\xi' + \frac{2\,(2+\operatorname{tang}^2\eta')}{4-\operatorname{tang}^2\eta'}\operatorname{tang}^2\xi' - \frac{\operatorname{tang}^2\eta'}{4-\operatorname{tang}^2\eta'} = 0 \quad \ldots\ldots (2.)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{folglich } \operatorname{tang}\xi' \text{ (1. u. 2.)} = \pm\sqrt{\dfrac{2+\operatorname{tang}^2\eta'+2\sqrt{1+2\operatorname{tang}^2\eta'}}{\operatorname{tang}^2\eta'-4}} \quad \ldots\ldots (3.)\ \text{a} \\ \text{und } \operatorname{tang}\xi' \text{ (3. u. 4.)} = \pm\sqrt{\dfrac{2+\operatorname{tang}^2\eta'-2\sqrt{1+2\operatorname{tang}^2\eta'}}{\operatorname{tang}^2\eta'-4}} \quad \ldots\ldots (3.)\ \text{b} \end{array}\right\}$$

ıt man aber das System der sphärischen Coordinatenachsen um die räumliche Y-Achse EC um nach B zurück, so ist (nach Cap. I. §. 3., 3.) $\operatorname{tang}\xi' = \operatorname{tang}(\alpha' - 45)$

$$= \frac{\operatorname{tang}\alpha' - 1}{1+\operatorname{tang}\alpha'} \Big\} \text{ und } \operatorname{tang}\eta' = \frac{\sqrt{2}\operatorname{tang}\beta'}{1+\operatorname{tang}\alpha'} \quad \ldots\ldots (4.);$$

' und β' die neuen sphärischen Coordinaten statt ξ' und η' sind.

in (2.), (3a.) und (3b.) eingesetzt, giebt:

$$\frac{\operatorname{tang}^2\alpha' - 1}{\operatorname{tang}^2\alpha' + 1} = \frac{\operatorname{tang}\beta'}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha'+\operatorname{tang}^2\beta'}}; \quad \ldots\ldots (5.)$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang}\beta' \text{ (1. u. 2.)} = \pm\dfrac{\sqrt{\operatorname{tang}^6\alpha' - \operatorname{tang}^4\alpha' - \operatorname{tang}^2\alpha' + 1}}{2\operatorname{tang}\alpha'} \\ = \pm\dfrac{\operatorname{tang}^2\alpha' - 1}{2\operatorname{tang}\alpha'}\sqrt{\operatorname{tang}^2\alpha' + 1} \\ = \mp\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha'}}{\operatorname{tang} 2\alpha'} \end{array}\right\}; \quad \ldots\ldots (6.)$$

Die zu obigen Gleichungen construirte Kugelcurve geht zweimal durch jeden Pol des alkreises, der die X-Achse der sphärischen Coordinaten bildet; denn ξ' wird (sammt $\operatorname{tang}\xi'$) nal = 0 [wegen seiner 4 Werthe in (3a.) und (3b.)]. Sie ist im Allgemeinen vierten Grades besteht aus zwei sich abwärts wieder berührenden Schleifen, deren jede die eine Hälfte der einnimmt, so daß eine cylindrische Oberfläche mit dem größten Durchmesser = 2r, die der se der zweiten Coordinatenlage parallel läuft und durch die erste Schleife geht, auf der entzesetzten Hemisphäre die andre Schleife abschneidet. Der außerhalb des Cylinders nde Kugeloberflächenraum besteht aus zwei eben so geschlungenen, aber umrt gelegenen Kugelspiralen, die den vorigen congruent sind. [cf. Fig. V.] Alles ßt sich leicht aus den obigen Gleichungen ableiten. Daher ist der Raum, den die ganze iale auf der Kugeloberfläche einnimmt, = $2r^2\pi$, der einer Schleife = $r^2\pi$, d. h. = fläche eines Normalkreises der Kugel.

§. 9.

Gleichung der Kugelspirale niederer Ordnung, deren Geschwindigkeiten sich wie 1:2 verhalten (Fig. VI.)

Der Punct auf dem sich drehenden Normalkreise läuft halb so geschwind herab, als die Drehung beträgt. So ist, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in C liegt, $CM = 2gM$,

$$\xi' = 2\eta \quad \ldots\ldots\ldots (1.)$$

die Gleichung der entstandenen Spirale, deren Hälfte $\overset{\frown}{Cghk \ldots pE}$ ist. Ist dagegen der Anfang der Coordinaten in E und beginnt die Drehung von der Achse $\overset{\frown}{EA}$, so ist wenn $\overset{\frown}{Aek} = \varphi$, $\overset{\frown}{Ep} = \delta$

$$\delta = 2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (2.)$$

eine andere Gleichung der Spirale.

Für die erste Coordinatenachsen-Lage ist aus (1.):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{tang}\xi'}{1+\operatorname{tang}^2\xi'} &= \frac{2\operatorname{tang}\eta'}{1+\operatorname{tang}^2\xi'+\operatorname{tang}^2\eta'} \\ \text{oder: } \operatorname{tang}^2\eta' - 2\,\frac{1+\operatorname{tang}^2\xi'}{\operatorname{tang}\xi'}\,\operatorname{tang}\eta &+ 1 + \operatorname{tang}^2\xi' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3.)$$

$$\text{folglich } \operatorname{tang}\eta' = \frac{1+\operatorname{tang}^2\xi'}{\operatorname{tang}\xi'} \pm \sqrt{\frac{1+\operatorname{tang}^2\xi'}{\operatorname{tang}^2\xi'}};$$

$$\text{oder } \operatorname{tang}\eta' = \frac{2}{\sin^2\xi'} \pm \frac{1}{\sin\xi'}; \quad \ldots\ldots (4.)$$

Für die zweite Lage der Coordinaten-Achsen ist nach (2.):

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\delta &= \frac{2\operatorname{tang}\varphi}{1-\operatorname{tang}^2\varphi} \\ \text{oder: } (\operatorname{tang}^4\xi' - \operatorname{tang}^4\eta')\ (\operatorname{tang}^2\xi' - \operatorname{tang}^2\eta') &= 4\operatorname{tang}^2\xi'\operatorname{tang}^2\eta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5.$$

Letztere Gleichung ist vom 6. Grade; die Curve wird also von einem Normalkreise in ihrem B 6mal geschnitten (cf. ihre Gestalt Fig. VI. 6c.); sie umschließt die Kugel natürlich erst dann voll kehrt also in sich zurück, wenn der Normalkreisbogen, auf dem der Punct sich bewegt, 720° laufen hat. Daraus folgt, daß das ξ' der Curve bis 720° wachsen kann, während η' nu erreicht. Die Symmetrie der Curve, ihre Lage gegen die Pole sowohl, als gegen die Coord achsen ꝛc. läßt sich leicht aus der Gleichung 4) in der einen, aus der 5) in der andern La Coordinatenanfangs herleiten.

§. 10.

Verallgemeinerung des in §. 8 und §. 9 Vorgetragenen.

Aus dem in genannten §§. Abgehandelten ergiebt sich als die allgemeinste Bogengl einer beliebigen Kugelspirale mit arithmetischem Geschwindigkeitsgesetz:

entweder: $\xi' = n\eta$; . . . . . (1.)

oder: $\delta = n\varphi$; . . . . . (2.)

rste für rechtwinklige sphärische Ordinaten, die andre für Polarcoordinaten, wobei noch zu be-
:n, daß n jede positive ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Will man die höhern
niedern Ordnungen dieser Kugelcurven scheiden und ihre Gleichung trigonometrisch darstellen,
ndet man:

a) Für die höhere mte Ordnung:

$\sin(m\xi') = \sin\eta$, woraus man erhält:

$$\frac{}{} = \frac{m}{1}\tang\xi' - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ 2\ 3}\tang^3\xi' + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\ 2\ 3\ 4\ 5}\tang^5\xi' - \text{ꝛc.} =$$

$$\frac{\tang\eta'\ \sqrt{(1+\tang^2\xi')^m}}{\sqrt{1+\tang^2\eta'+\tang^2\xi'}} \quad \ldots\ldots \text{(3.)}$$

d. h. im allgemeinen für $\tang\xi'$ eine Gleichung
n, für $\tang\eta'$ dagegen nur 2ten Grades; die Curve liegt, in ihrer Projection auf die
Ebne der räumlichen Coordinaten betrachtet, gegen beide Achsen symmetrisch, die
ction geht durch das Coordinatencentrum zweimal hindurch; da für ξ' 2m Wurzeln gefunden
n, so schneidet ein Normalkreis die sphärische Curve in 2m Puncten.

Aus der Bogengleichung $\delta = m\varphi$ erhält man eine ähnliche trig. Curvengleichung:

$$\text{(4.)}\quad \frac{\sqrt{(1+\tang^2\varphi)^m}\cdot\sqrt{\tang^2\xi'+\tang^2\eta'}}{\sqrt{1+\tang^2\xi'+\tang^2\eta'}} = \frac{m}{1}\tang\varphi - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\ 2\ 3}\tang^3\varphi + \text{ꝛc.}$$

b) Für die niedere mte Ordnung:

$$\frac{\xi'}{m} = \eta \ldots\ldots \text{(5.)}$$ für die eine Coordinatenlage und:

$$\frac{\delta}{m} = \varphi \ldots\ldots \text{(6.)}$$ für die andre;

$$\tang\xi'\sqrt{(1+\tang^2\xi'+\tang^2\eta')^m} = \frac{m}{1}\tang\eta'\sqrt{(1+\tang^2\xi')^m} -$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ 2\ 3}\tang^3\eta'\sqrt{(1+\tang^2\xi')^{m-2}}\ \text{ꝛc.}$$

ine ähnliche Gleichung für $\sin\delta = \sin(m\varphi)$. Beide sind für die Berechnung von ξ' und η'
iger, da die Tangens beider in den Wurzeln aller Glieder sowohl, als außerhalb derselben
Ein Normalkreis schneidet im Allgemeinen auch diese Curve in $2(m+1)$ Puncten, die Gleichung
vom $2(m+1)$ten Grade für $\tang\xi'$.

§. 11.

Quadratur und Rectification solcher Kugelspiralen beider Ordnungen

a) Quadratur und Rectification der Spirale aus §. 8. (Fig. IV.) auf elementarem Wege.

1) Um sich zuerst den Abschnitt **F** der Curvenfläche zwischen den Meridianen EA und zu berechnen, theile man den achten Theil des Aequatorumfangs, also von A bis O in n Theile $\widehat{AD} = \widehat{DF} = \ldots = \frac{r\pi}{4n}$, ziehe die Quadranten $\widehat{ED}$, $\widehat{EF}$ ꝛc. so ist (nach der Natur der $\widehat{Ep} = 2 \cdot \frac{r\pi}{4n}$, $\widehat{Em} = 4 \cdot \frac{r\pi}{4n}$, ꝛc. $\widehat{EO} = 90^0 = 2n \cdot \frac{r\pi}{4n}$; also ist das Kugeldreieck $Epb = \frac{r^2\pi}{2n}$ ferner $Emd = \frac{r^2\pi}{2n} \sin^2 2\frac{r\pi}{4n}$, ... endlich $Eoh = \frac{r^2\pi}{2n} \sin^2 n\frac{r\pi}{4n} = \frac{r^2\pi}{2n} \sin^2 45^0$. Sin alle diese Flächenelemente unendlich klein (bei $n = \infty$) so ist (mit unendlich kleinem Fehler) $\frac{r\pi}{4n} = \psi$, also $n\psi = 45^0$;

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}[\sin^2\psi + \sin^2 2\psi + \sin^2 3\psi + \ldots + \sin^2 45] \ldots\ldots (1.)$$

Nun ist (nach §. 6.):

$$\sin^2\psi = \frac{1-\cos 2\psi}{2}, \text{ also ist: } \sin^2 2\psi = \frac{1-\cos 4\psi}{2} \text{ ꝛc.}$$

$$\text{Mithin } \mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}\left[\frac{n-(\cos 2\psi + \cos 4\psi + \cos 6\psi + \ldots + \cos 2n\psi)}{2}\right] \ldots\ldots$$

Setzt man nun $2\psi = \omega$, so ist

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2n}\left[\frac{n-(\cos\omega + \cos 2\omega + \ldots + \cos n\omega)}{2}\right]$$

Diese Reihe geht bis zu cos 90⁰ hinauf, ist also $= \sin\omega + \sin 2\omega + \sin 3\omega + \ldots + \sin n$ [§. 5. (4.)]

Setzt man ferner $r = 1$, so ist $\mathbf{S} = \frac{2}{\pi}$, also ist:

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{4}\left[1 - \frac{2}{\pi}\right] = \frac{r^2}{4}(\pi - 2); \ldots\ldots (3.)$$

Vergleicht man diesen Werth mit dem der Fläche in §. 7. (7.), welche den ähnlichen Abschn Spirale erster Ordnung bildet, so finden wir, daß jener doppelt so groß ist, als der in gendem §. entwickelte.

Daraus läßt sich der leicht zu beweisende Schluß ziehen: Die Abschnitte der Si Curven, die vom Pol aus bis zum ersten Durchschnittspunct derselben mi Aequator liegen und durch einen Meridian begränzt werden, verhalten sich gekehrt, wie die Geschwindigkeiten des beschreibenden Punctes.

Der zweite Curvenabschnitt zwischen den untern Meridianen BC und CO ist dem vorigen ncuent. Die Fläche Epm .... o .... swC, die durch den Normalbogen EBC begränzt wird, ist also en Kugelzweieck EBCOE = $^1/_8$ Kugeloberfläche. Ferner ist das Kugelflächenviertel EBCAE durch nnte Curve halbirt.

2) Zur Rectification der Curve gelangt man ähnlich wie in §. 6., durch Berechnung der enelemente on, nm etc., die in den fast gradlinigen Dreiecken onh, mnf etc. die Hypotenuse n. Also ist:

$$\ldots \mathbf{L} = \widehat{on} + \widehat{nm} + \ldots + \widehat{Ep} = \sqrt{oh^2 + hn^2} + \sqrt{nf^2 + fm^2} + \ldots + \sqrt{pb^2 + Eb^2}$$

ist $nh = mf = \ldots = Eb = 2\frac{r\pi}{4n}$ (cf. oben), dagegen $oh = \frac{r\pi}{4n} \sin\left(2n \cdot \frac{r\pi}{4n}\right)$, $nf =$ in $\left[2\,(n-1)\,\frac{r\pi}{4n}\right]$, $\ldots$ $pb = \frac{r\pi}{4n} \sin 2\,\frac{r\pi}{4n}$. Man setze wieder $\frac{r\pi}{4n} = \psi$, so wird:

$$(2.)\ \mathbf{L} = \frac{r\pi}{2n}\left\{\sqrt{1+\frac{\sin^2 2\psi}{4}} + \sqrt{1+\frac{\sin^2 4\psi}{4}} + \sqrt{1+\frac{\sin^2 6\psi}{4}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{\sin^2 2n\psi}{4}};\right\}$$

ch, [wenn $2\psi = \omega$, also $2n\psi = 90^0 = n\omega$]:

$$(3.)\ \mathbf{L} = \frac{r\pi}{2n}\left\{\sqrt{1+\frac{\sin^2\omega}{4}} + \sqrt{1+\frac{\sin^2 2\omega}{4}} + \sqrt{1+\frac{\sin^2 3\omega}{4}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{\sin^2 n\omega}{4}}\right\}$$

der binomischen Entwicklungsreihe für gebrochene Potenzen ist ferner:

$$\sqrt{1+\frac{\sin^2\omega}{4}} = 1 + {}^1/_2\frac{\sin^2\omega}{4} - {}^1/_8\frac{\sin^4\omega}{4^2} + {}^1/_{16}\frac{\sin^6\omega}{4^3} - {}^5/_{128}\frac{\sin^8\omega}{4^4} + {}^7/_{256}\frac{\sin^{10}\omega}{4^5} - \text{2c.}$$

$$\sqrt{1+\frac{\sin^2 2\omega}{4}} = 1 + {}^1/_2\frac{\sin^2 2\omega}{4} - {}^1/_8\frac{\sin^4 2\omega}{4^2} + {}^1/_{16}\frac{\sin^6 2\omega}{4^3} - {}^5/_{128}\frac{\sin^8 2\omega}{4^4} + {}^7/_{256}\frac{\sin^{10} 2\omega}{4^5} - \text{2c.}$$

$$\sqrt{1+\frac{\sin^2 n\omega}{4}} = 1 + {}^1/_2\frac{\sin^2 n\omega}{4} - {}^1/_8\frac{\sin^4 n\omega}{4^2} + {}^1/_{16}\frac{\sin^6 n\omega}{4^3} - {}^5/_{128}\frac{\sin^8 n\omega}{4^4} + {}^7/_{256}\frac{\sin^{10} n\omega}{4^5} - \text{2c.}$$

b: $$(4.)\ \mathbf{L} = \frac{r\pi}{2n}\left\{n + {}^1/_8\,\mathbf{S}_{(2)} - {}^1/_{128}\,\mathbf{S}_{(4)} + {}^1/_{1024}\,\mathbf{S}_{(6)} - {}^5/_{32768}\,\mathbf{S}_{(8)} + {}^7/_{262144}\,\mathbf{S}_{(10)} - \text{2c.}\right\}$$

man nun die in §. 6. (8.) entwickelten Werthe von $\mathbf{S}_{(2)}$, $\mathbf{S}_{(4)}$ 2c. ein, so erhält man nach ivision mit n:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{L} &= \frac{r\pi}{2}\left[1 + {}^1/_8 \cdot {}^1/_2 - {}^1/_{128} \cdot {}^5/_8 + {}^1/_{1024} \cdot {}^{10}/_{32} - {}^5/_{32768} \cdot {}^{35}/_{128} + \text{2c.}\right]; \ldots \\ &= \frac{r\pi}{2} \cdot 1{,}05984 \ldots .\end{aligned}\right\} (5.)$$

§. 12.

Fortsetzung.

a.) Quadratur und Rectification der Spirale aus §. 9. (Fig. VI.)

Man theile den Quadranten AB in n sehr kleine Abschnitte, so daß $\widehat{BG} = \widehat{GH} = \text{2c.} =$ $= \frac{r\pi}{2n}$; ferner nach der Natur der Curve ist: $\widehat{Ep} = \frac{r\pi}{4n}$, $\widehat{En} = \frac{2r\pi}{4n}$, 2c., $\widehat{EI} = n\,\frac{r\pi}{4n} = 45^0$. Berechnet

man also zuerst den Curvenabschnitt zwischen EA und EB, so findet man, (wenn $n = \infty$ mit verschwindendem Fehler:

$$\mathbf{F} = \text{Epz} + \text{Env} + \ldots\ldots + \text{Elr};$$

$$= \frac{r^2\pi}{2n}\left[n - \left(\cos\frac{r\pi}{4n} + \cos 2\frac{r\pi}{4n} + \cos 3\frac{r\pi}{4n} + \ldots\ldots + \cos 45^0\right)\right]; \ldots\ldots$$

Setzt man nun $\frac{r\pi}{4n} = a$, so ist zu berechnen, wie groß die Summe: $\cos a + \cos 2a + \ldots +$ sei. Man setze sie $= \mathbf{S}_1$, dagegen $\sin a + \sin 2a + \ldots\ldots + \sin 45 = \mathbf{S}_{11}$, so ist,

$$\text{weil} \left\{\begin{array}{l} \cos(45-a) = \frac{\cos a + \sin a}{\sqrt{2}}; \\ \cos(45-2a) = \frac{\cos 2a + \sin 2a}{\sqrt{2}}; \\ \cos 2a = \frac{\cos(45-2a) + \sin(45-2a)}{\sqrt{2}}; \\ \cos a = \frac{\cos(45-a) + \sin(45-a)}{\sqrt{2}}; \end{array}\right\} \ldots\ldots (2.)$$

auch in der Summe:

$$\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(45-a) = \frac{[\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(45-a)] + [\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(4$$

$$\text{d. h. } \mathbf{S}_1 - \cos 45 = \frac{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_{11} - (\cos 45^0 + \sin 45^0)}{\sqrt{2}};$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also } \mathbf{S}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_{11} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \\ \text{oder } \mathbf{S}_{11} = (\sqrt{2} - 1)(\mathbf{S}_1 + 1) \end{array}\right\} \ldots\ldots (3.)$$

Nun ist (nach §. 5. 14) $\frac{\mathbf{S}}{m} = \frac{\sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(m-1)a}{m} = 0{,}63661977 \ldots$

$ma = 90^0$ ist, also ist [da auch $\sin(45 + a) = \cos(45 - a)$ ꝛc. und da $m = 2n$,] $\frac{\mathbf{S}}{m} =$

$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_{11} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{n}\right]$; . . . (4.); Da aber $n = \infty$, so ist $\frac{1}{2\sqrt{2}n}$ gegen die andern Gl

als verschwindend zu betrachten, also auch: $\frac{\mathbf{S}}{m} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{S}_1}{n} + \frac{\mathbf{S}_{11}}{n}\right]$; nun ist aber nach (3.) $\mathbf{S}$

Function von $\mathbf{S}_1$, also durch Substitution:

(5.) . . . . $\frac{\mathbf{S}_1}{n} = \sqrt{2} \cdot 0{,}63661977 \ldots$; (nach Weglassung des unendlich Klu

Dies setzen wir jetzt in die Reihe (1.) ein, und finden somit den Werth:

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}(1 - \sqrt{2} \cdot 0{,}63661977 \ldots)$$

$$= \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) \text{ oder } = \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi \cos 45^0}\right) \ldots\ldots (6.)$$

Anmerkung 1. Um die Gleichung des Flächeninhalts für die Spirale erster Ordnung 5 und 7 dieser ähnlicher zu machen, kann man jene auch so schreiben

$$\text{Fläche} = \frac{r^2\pi}{2}\left[1 - \frac{2}{\pi \cos 0^0}\right].$$

Anmerkung 2. Es läßt sich leicht beweisen, daß wenn die Geschwindigkeit des Puncts n Pole E herab (Fig. VI.) noch einmal so langsam, als vorhin angenommen worden wäre: daß sie sich zu der des Normalquadranten wie 1 : 4 verhielte, die Fläche zwischen $\widehat{EA}$ und $\widehat{EB}$ sich s ücken ließe durch

$$\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi \,.\, \cos 45^0 \,.\, \cos 22\tfrac{1}{2}^0}\right) \ldots\ldots (7.)$$

n die Reihe in der Gleichung (1,) ginge für diesen Fall von cos a nur bis $\cos 22\frac{1}{2}^0$, statt n r also n/2 zu schreiben; Nun ist aber:

$$\left.\begin{aligned} \cos(22\tfrac{1}{2}^0 - a) &= \cos 22\tfrac{1}{2}^0 \cos a + \sin 22\tfrac{1}{2}^0 \sin a \\ \cos(22\tfrac{1}{2}^0 - 2a) &= \cos 25\tfrac{1}{2} \cos 2a + \sin 22\tfrac{1}{2} \sin 2a \\ \cos a &= \cos 22\tfrac{1}{2} \cos(22\tfrac{1}{2} - a) + \sin 22\tfrac{1}{2} \sin(22\tfrac{1}{2} - a) \end{aligned}\right\} (8.)$$

a): $\left.\begin{aligned} \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos(22\tfrac{1}{2} - a) &= u \\ \sin a + \sin 2a + \ldots + \sin(22\tfrac{1}{2} - a) &= v \end{aligned}\right\}$ gesetzt:

$$u = u \cos 22\tfrac{1}{2}^0 + v \sin 22\tfrac{1}{2}^0$$

ist ferner:

$$\left.\begin{aligned} \cos(22\tfrac{1}{2} + a) &= \cos 22\tfrac{1}{2} \cos a - \sin 22\tfrac{1}{2} \sin a \\ \cos(22\tfrac{1}{2} + 2a) &= \cos 22\tfrac{1}{2} \cos 2a - \sin 22\tfrac{1}{2} \sin 2a \\ \cos(22\tfrac{1}{2} + 22\tfrac{1}{2} - a) &= \cos 22\tfrac{1}{2} \cos(22\tfrac{1}{2} - a) - \sin 22\tfrac{1}{2} \sin(22\tfrac{1}{2} - a) \end{aligned}\right\} (9.)$$

enn $\cos(22\frac{1}{2} + a) + \ldots + \cos(45 - a) = w$, so ist

$$w = u \cos 22\tfrac{1}{2} - v \sin 22\tfrac{1}{2}$$

folglich $u + w = 2u \cos 22\frac{1}{2}^0$; .... (10.)

$+ w = \mathbf{S}_1 - \cos 22\frac{1}{2}^0 - \cos 45^0$, folglich $\frac{\mathbf{S}_1 - \cos 22\frac{1}{2} - \cos 45}{2 \cos 22\frac{1}{2}} = u$. Auf beiden Seiten vidirt, giebt (nach Weglassuug des unendlich Kleinen,) $\frac{\mathbf{S}_1}{n} \,.\, \frac{1}{\cos 22\frac{1}{2}} = \frac{u}{n/2}$, folglich, da $\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{u}{n/2}\right)$ wird, $\mathbf{F} = \frac{r^2\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi \,.\, \cos 45^0 \,.\, \cos 22\frac{1}{2}^0}\right)$, wie oben in (7.) behauptet e

Anmerkung 3. Setzt man diese Verdopplung der Geschwindigkeit des Normalquadranten , so daß sie sich zu der des Puncts verhält, wie 8 : 1, oder wie 16 : 1, oder allgemein ^{n} : 1 so erhält man für diesen Flächenraum zwischen $\widehat{AE}$ und $\widehat{BE}$ im ersten Kugeloctanten i die Werthe:

$$\mathbf{F}_{(8:1)} = \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{90^0}{2}\right) \cos\left(\frac{90^0}{2^2}\right) \cos\left(\frac{90^0}{2^3}\right)}\right\};$$

$$\mathbf{F}_{(16:1)} = \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{90^0}{2}\right) \cos\left(\frac{90^0}{2^2}\right) \cos\left(\frac{90^0}{2^3}\right) \cos\left(\frac{90^0}{2^4}\right)}\right\};$$

allgemein $\mathbf{F}_{(2^n:1)} = \frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi \cos\left(\frac{90^0}{2}\right) \cos\left(\frac{90^0}{2^2}\right) \ldots\ldots \cos\left(\frac{90^0}{2^n}\right)}\right\};$

wo n alle Werthe von 1 bis ∞ haben darf.

§. 13.

Fortsetzung der Quadratur ꝛc.

Kehren wir zur Quadratur der Spirale im §. 9. (Fig. VI.) zurück, so kann ferner d messung des Flächeninhalts gefordert werden, der zwischen den Quadraten AE und EC a Viertel der Kugeloberfläche liegt und durch die Curve Epnm . . . hgC begränzt wird. Sei diesen Raum $= \mathbf{R}$, so ist

(1.) . . . . $\mathbf{R} = EMC + Ebg + Edh + \ldots + Evn + Ezp$, wenn der Aequator AC unendlich kleine Theile getheilt wird. Dann ist aber auch, wenn $AK = KH = ꝛc. = a$

$$(2.)\quad \begin{cases} EMC = \frac{r^2\pi}{p}\,[1-\cos pa]; \text{ wo } pa = 90^0; \\ Ebg = \frac{r^2\pi}{p}\,[1-\cos(p-1)a]; \\ Evn = \frac{r^2\pi}{p}\,[1-\cos 2a]; \\ Ezp = \frac{r^2\pi}{p}\,[1-\cos a]; \end{cases}$$

folglich $\mathbf{R} = \frac{r^2\pi}{p}[p-(\cos a + \cos 2a + \ldots + \cos pa)]$; . . . . (3.)

Nun ist [nach §. 5. und §. 7.] $\frac{\cos a + \cos 2a + \ldots \cos 90^0}{p} = \frac{2}{\pi}$ also:

$$\mathbf{R} = r^2\pi\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0{,}36338022\ldots r^2\pi. \quad (4.)$$

d. h. das doppelte der entsprechenden Fläche der Spirale erster Ordnung in Octanten (Fig. III.)

Hieraus läßt sich ein leicht zu erweisender Schluß per inductionem ziehen:

Ist die Geschwindigkeit des sich bewegenden Normalquadranten größer, als die des auf ihm sich bewegendon Puncts, so ist die Fläche,

rve bis zum Aequator hinab mit dem letzten Meridiane einschließt, n mal so ß als bei der Spirale erster Ordnung, also allgemein $= n.\frac{r^2\pi}{2}$ 0,36338022 . . . .

Anmerkung 1. Ist also das Geschwindigkeitsverhältniß z. B. wie 4 : 1, so ist

$$\mathbf{R} = 4.\frac{r^2\pi}{2}\left\{1 - \frac{2}{\pi}\right\}$$

$= 2r^2\pi - 4r^2$ (wie bei dem Problem des Viviani; cf. §. 7. Anmerkung 2.) bleibt als Rest von der Oberfläche der Halbkugel die Fläche $= 4r^2$, d. h. eine vollkommne drable Fläche. Dieser Satz findet sich, isolirt stehend, ebenfalls unter den Problemen der n Zeit.

§. 14.

Rectificationen ꝛc. (Fig. VI.)

1) Rectification des Curvenbogens Epnml im ersten Kugeloctanten.

wird $L = lm + mn + \ldots + Ep = \sqrt{lr^2 + mr^2} + \sqrt{mt^2 + nt^2} + .. + \sqrt{pz^2 + Ez^2}$;

ist $Ez = mr = nt$ ꝛc. $= \frac{r\pi}{4n}$, ferner, wenn $a = \frac{90^0}{2n}$, so ist:

$= \frac{r\pi}{2n}\sin a$, $nv = \frac{r\pi}{2n}\sin 2a$, . . . endlich $lr = \frac{r\pi}{2n}\sin na = \frac{r\pi}{2n}\sin 45^0$, also:

$$(1.) = \frac{r\pi}{4n}\left\{\begin{array}{l} n + {}^1/_2\,2^2\sin^2 a - {}^1/_8\,2^4\sin^4 a + {}^1/_{16}\,2^6\sin^6 a - \ldots\ldots \\ + {}^1/_2\,2^2\sin^2 2a - {}^1/_8\,2^4\sin^4 2a + {}^1/_{16}\,2^6\sin^6 2a - \ldots \\ + {}^1/_2\,2^2\sin^2 3a - {}^1/_8\,2^4\sin^4 3a + {}^1/_{16}\,2^6\sin^6 3a - \ldots \\ + {}^1/_2\,2^2\sin^2 45^0 - {}^1/_8\,2^4\sin^4 45^0 + {}^1/_{16}\,2^6\sin^6 45^0 - \ldots \end{array}\right\}$$

$$= \frac{r\pi}{4n}\left[n + {}^1/_2 . 2^2 . \Sigma_{(2)} - {}^1/_8\,2^4\,\Sigma_{(4)} + {}^1/_{16}\,2^6\,\Sigma_{(6)} - \ldots\ldots \text{ ꝛc.}\right]$$

$\Sigma_{(2)} = \sin^2 a + \sin^2 2a + \ldots\ldots + \sin^2 45$, und ähnlich $\Sigma_{(4)} =$ der vierten Potenzreihe ꝛc. kömmt es darauf an, $\frac{\Sigma_{(2)}}{n}, \frac{\Sigma_{(4)}}{n}$ ꝛc. in ihren Gränzwerthen zu bestimmen.

§. 6. (5.) ist aber:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \\ \sin^2 2a = \frac{1-\cos 4a}{2} \\ \sin^2 na = \frac{1-\cos 2na}{2} \end{array}\right\} \text{folglich } \Sigma_{(2)} = \frac{n - (\cos 2a + \cos 4a + .. + \cos 90^0)}{2}$$

$$\text{also } \frac{\Sigma_{(2)}}{n} = 1 - \frac{(\sin 90 + \ldots\ldots + \sin 2a)}{n}$$

$$2$$

(cf. §. 7. (7.) $= \frac{1-{}^2/_\pi}{2} = 0{,}18169011 \ldots$ (2.)

Verfährt man ähnlich mit $\sin^4 a + \ldots + \sin^4 na$ ꝛc., so stößt man auf Cosinusreihen fol
Gestalt:

$$(2.)\quad \frac{\cos 4a + \cos 8a + \ldots + \cos 180^0}{n} = -\,{}^1/n = 0;\ (\text{wenn } n = \infty)$$

$$(3.)\quad \frac{\cos 6a + \cos 12a + \ldots + \cos 270^0}{n} = -\,{}^2/\pi;$$

$$(5.)\quad \frac{\cos 8a + \cos 16a + \ldots + \cos 360^0}{n} = +\,{}^1/n = +\,0;$$

$$(6.)\quad \frac{\cos 10a + \cos 20a + \cos 30a + \ldots + \cos 450^0}{n} = \frac{\cos 2a + \ldots + \cos 90}{n} = {}^2/\pi$$

d. h. es kehren nun alle 4 Werthe $^2/\pi$, $-\,0$, $-\,{}^2/\pi$, $+\,0$ wieder.

Fernerhin findet man die Gleichungen:

$$\Sigma_{(4)} = \frac{3n - 4(\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 90) + (\cos 4a + \cos 8a + \ldots \cos 180^0)}{8}$$

$$\Sigma_{(6)} = \frac{10n - 15(\cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos 90) + 6(\cos 4a + \ldots + \cos 180) - (\cos 6a + \cos 12a + \ldots + \cos 27}{32}$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

folglich ist:

$$\frac{\Sigma_{(4)}}{n} = \frac{3 - {}^8/\pi}{8},\ \frac{\Sigma_{(6)}}{n} = \frac{10 - {}^{30}/\pi + {}^2/\pi}{32},\ \frac{\Sigma_{(8)}}{n} = \frac{35 - {}^{112}/\pi + {}^{16}/\pi}{128}\ \text{ꝛc.} \ldots . \quad (8.)$$

Daraus folgt endlich:

$$\mathfrak{L} = \frac{r\pi}{4}\left\{1 + 2\,\frac{1 - {}^2/\pi}{n} - 2\,\frac{3 - {}^8/\pi}{n} + 4\,\frac{5 - {}^{14}/\pi}{16} - 10\,\frac{35 - {}^{96}/\pi}{128}\ \text{ꝛc.}\right\} \ldots$$

$$= \frac{r\pi}{4}\,[1 + 0{,}36338022 \ldots - 0{,}11338023 \ldots + 0{,}13521540 \ldots - \text{ꝛc.}]$$

eine Reihe, die wenig oder gar nicht zu convergiren scheint.

§. 15.

Fortsetzung. (Fig. VI.)

Diese ganze Berechnung ließe sich eben so leicht mit Integralrechnung anstellen. Wir
das Verfahren hier noch mittheilen, um endlich zu der allgemeinsten Formel für die Rect
der arithmetischen Kugelspiralen von vorgeschriebener Art zu gelangen.

Es sei (wie ähnlich in §. 7. 2.) das Curvenstück $\widehat{Epn} = \mathfrak{S}$ der Zuwachs $\widehat{nm} =$
$\widehat{En} = \delta$, also $\widehat{um} = d\delta$, $\widehat{un} = \widehat{GH} \cdot \sin\delta$, und da $\widehat{GH} = d\varphi$ und $2\delta = \varphi$, so ist. $d\mathfrak{S} = \sqrt{u^2}$
$= r\sqrt{1 + 4\sin^2\delta}\,d\delta = d\delta\left\{1 + {}^1/_2\,4\sin^2\delta + \frac{{}^1/_2 \cdot ({}^1/_2 - 1)}{1\ \ 2}\,16\sin^4\delta + \right.$
$\left.\frac{{}^1/_2\ ({}^1/_2 - 1)\ ({}^1/_2 - 2)}{1\ \ 2\ \ 3}\,64\sin^6\delta + \text{ꝛc.}\right\}$

$$\text{o } \mathbf{S} = \int d\delta + 2\int \sin^2\delta d\delta - 2\int \sin^4\delta d\delta + 4\int \sin^6\delta d\delta - \text{ꝛc.}$$

$$= \delta + \delta - \frac{\sin 2\delta}{2} + 2\sin^3\delta\cos\delta - 3\delta + \frac{3\sin 2\delta}{2} + {}^3/_4\delta - {}^3/_8\sin 2\delta - {}^5/_6\sin^3\delta\cos\delta -$$

$/\sin 5\delta\cos\delta$ . . . ꝛc. (1.) (nach §. 7. 2.)

Setzt man nun die Gränzen von $\delta = 0$ bis $\delta = \frac{r\pi}{4}$, so erhält man die Rectificationen e Curve von E bis I:

(2.) . . . . $\mathbf{S} = \mathbf{F}\,(r, \pi)$ in einer fortlaufenden Zahlenreihe ohne trigonometrische Fun- ren, da $\sin 45 = \sqrt{{}^1/_2}$.

In der Formel (1.) liegt zugleich die Berechnung der Curvenlänge in jeder gegebenen dehnung begründet, da man nur δ nach und nach $= \frac{r\pi}{2}$, $= \frac{3r\pi}{4}$, $= r\pi$ u. ſ. f. bis $\delta = 3 = 2r\pi$ einzuſetzen hat. Die Ausführung deſſen liegt jedoch außerhalb der engern Gränzen er Abhandlung.

Eben ſo überlaſſen wir die Bearbeitung der Eigenſchaften, welche den Kugelſpiralen i geometriſchem Verhältniſſe zukommen, ſpäteren Muſeſtunden und ſchließen mit der erkung, wie ſich ſchon aus den vorliegenden drei Abhandlungen leicht der Beweis für die ichkeit der ſphäriſchen Analyſis bei Unterſuchung von Curven mehrfacher Krümmung . Kugelellipſe und Kugelſpiralen) herleiten läßt, deren Formeln mit nur zwei Coordinaten ſehr leichte und einfache Berechnung (auch Integration) möglich machen.

Berichtigungen.

23, Z. 15 v. o. [bei § 14. (1.)] ſtatt (1.) $= \frac{r\pi}{4n}$ { } zu ſetzen (1.) $L = \frac{r\pi}{4n}$ { }

24, Z. 9 v. o. fehlt am Ende vor { (7.) die Schluß-Klammer)

da, Z. 14 v. o. in der Formel (9.) iſt ſtatt $2\frac{1-{}^2/\pi}{n}$ zu ſetzen $2\frac{1-{}^2/\pi}{2}$, und $2\frac{3-{}^8/\pi}{8}$ ſtatt $2\frac{3-{}^8/\pi}{n}$.

da, Z. 15 v. o. lies + 0, 13591540 . . . ſtatt + 0, 13521540 . . .

em iſt S. 14, Z. 11 v. o. einmal das + zu ſtreichen, wo es doppelt ſteht.

Chronik des Gymnasiums

den Zeitraum von Ostern 1848 bis Ostern 1849 umfassend.

1. Lehrerpersonal und Unterricht.

Dies Schuljahr ist, abgesehen von dem, was es für alle Schulen an Störun
Art mit sich geführt hat, insbesondere für unsere Anstalt voll Veränderungen und Unru
wesen. Voran beklagen wir das Ausscheiden unseres hochverehrten und innig geliebten Dir
des Herrn Consistorialraths D. Carl Funk. Eben in den Tagen, wo das vorjährige Pro
gedruckt wurde, am 19. März 1848, traf ihn der harte Schlag, durch einen unerwartete
eine Gattin zu verlieren, die über 40 Jahr lang ihn liebend und geliebt durchs Leben b
hatte. Während des ihm nach dieser schweren Prüfung Bedürfniß gewordenen vierteljährig
laubs wurde der schon früher ihm entstandene Wunsch lebendiger, aus dem öffentlichen
eher scheiden zu dürfen als das Gefühl schwindender Kraft ihn dazu verpflichtete; und
er bei den vorgesetzten Hohen Behörden auf seine Pensionirung zum 1. Juli an. Den
diesen ungeahneten Vorgang betroffenen Lehrercollegium und insbesondere den jünger
Theil schon viele Jahre auf Vorrücken in einträglichere Stellen hoffenden Gliedern desselbe
nur der Wunsch, daß der neue Director aus dem Collegium selbst gewählt werden möchte
in Beziehung hierauf an das Königl. Provinzial-Schul-Collegium gerichtetes Gesuch erfre
huldvoller Berücksichtigung, und es wurde, nachdem meine zwei älteren innig von mir u
ganzen Lehrerkreise verehrten Amtsgenossen, die Professoren Wolf und Dr. Sucro, ihr
schluß auf das Directorat zu verzichten erklärt hatten, ich dagegen auf den Wunsch meine
gen und nach gewissenhafter Prüfung meines Willens und der an der Anstalt obwaltend
hältnisse es gewagt hatte nicht abzulehnen, vom Königl. Provinzial-Schul-Collegium unterm
mir eröffnet, daß das Königl. Ministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-An
heiten, nach einem Rescripte vom 26. Juni, mit der vom Herrn D. Funk nachgesuchten Ve
in den Ruhestand vom 1. Juli ab sich einverstanden erklärt, auch zugleich die Absicht au
chen habe, Sr. Majestät dem Antrage des Königl. Provinzial-Schul-Collegiums gemäß, n
Amtsnachfolger des Herrn D. Funk in Vorschlag zu bringen, sobald die Uebernahme de
derlichen Pension auf den Civilfonds ausführbar würde. Zu gleicher Zeit wurde mir die
sorische Verwaltung des Directorats, indem bis dahin Herr Professor Wolf den beu
Director vertreten hatte, von den Sommerferien an übertragen und mir auch die Amtsw
zu baldiger Benutzung überwiesen. Nachdem die Uebernahme jener Pension auf den Ci
sionsfonds mit dem 1. Januar erfolgt war, hat das Königl. Ministerium huldreichst meine
tigung zum Director gefördert, und Se. Majestät die Gnade gehabt, durch Allerhöchste C
Ordre vom 19. Febr. d. J. mich zum Director zu ernennen.

Indem ich nun jetzt, ohne daß eine weitere feierliche Einführung und Verpflichtung von nächstvorgesetzten Hohen Behörde zweckdienlich erachtet worden ist, durch dankbarlichst anerkenntes Vertrauen meiner Obern mich in einem Amte bestätigt sehe, nach dem ich im Bewußtsein mit ihm verbundenen Schwierigkeiten und Verantwortlichkeit nie getrachtet habe (mein stiller sch war immer unter den Augen und der Leitung meines hochverehrten Amtsvorgängers end des Ueberrestes meiner Wirksamkeitsjahre mein Werk noch forttreiben zu können wie r), richte ich meinen Blick zu Dem empor, von dem alle Hülfe kommt, und bitte Gott dig, daß, wie es in der Stellung, in der ich jetzt vierunddreißig und ein halbes Jahr lang eitet habe, mir durch seine Gnade gelang nicht vergeblich und nicht ohne ermuthigende Annung meines Strebens von Seiten meiner Vorgesetzten, meiner Amtsgenossen und Schüler zu ten, er mir auch ferner gnädig beistehen wolle, nach dem Muster, das mir drei hochachtbare ehrfurchtsvoll von mir auch als meine Lehrer verehrte Amtsvorgänger gelassen haben, sein auf Erden zu fördern, daß er mir, zumal in diesen Tagen des Zwiespalts und der Wirrim kirchlichen und staatlichen Leben, Kraft verleihen wolle, meinem Könige treu zu sein, aller n Behörden und ihrer einzelnen Glieder, denen ich zu innigstem Danke mich verpflichtet Erwartungen zu entsprechen, meines Vaterlandes und der Stadt und Gegend, für die ich r gewirkt habe und ferner wirken soll, wahres Wohl fördern zu helfen, meiner redlich strebenden en Amtsgenossen Vertrauen und Zuneigung mir zu erhalten und immer mehr zu verdienen die brüderliche Eintracht unter uns Allen, die bisjetzt der Schule Schirm und Segen war, legen und zu sichern, meinen Schülern endlich mich nicht nur, wie ich bisher schon unabläßzu sein strebte, als einen treuen und liebenden Lehrer und Berather, sondern nun auch cht öfter als bisher als einen — wenn's sein muß — allen Ungehorsamen und ihr eigenes und die wahre Freiheit Verkennenden strengern Erzieher zu beweisen.

Mit mir sind in ihrer äußern Stellung durch Vorrücken jetzt verbessert worden die Herrofessor Pax, Oberlehrer Wolfart, Ditfurt, Sauppe, Lehrer Krasper, Hase, ow, Gorgas, und ins Collegium ist eingerückt Herr Schönstedt.

Innig und tief ergriffen fühlten sich alle Collegen und alle an Einsicht und Gefühl reiferen r, zumal die, welche noch den eigenen Unterricht des scheidenden Directors genossen hatten, im Schlusse des Sommerhalbjahrs und der Entlassung der Abiturienten die schriftlichen schweren Worte des hochverehrten Mannes vorgelesen wurden, mit denen er von einer Anbschied nahm, von der er als Knabe und Jüngling gebildet war, der er als Mann seine fast 35 Jahr als Lehrer ganz gewidmet und für die er 10 Jahre lang als Leiter gelebt strebt hatte. Verehrten doch viele im Collegium in ihm ihren eigenen vormaligen weckenid hebenden Lehrer, alle aber den allseitig gebildeten, einsichtsvollen, umsichtigen, anerken, milden und gern helfenden Vorgesetzten, die ganze Schule aber das was er bei Uebernahme Amtes (s. Progr. 1839. S. 49 ff.) zu sein gewünscht und gelobt hatte, den treuen Hausder Vatertreue gegen seine Zöglinge, Freundestreue gegen seine Amtsgenossen, Bürgertreue König und Vaterland, Dienertreue gegen den Herrn aller Herren bewährte; gab er doch nem Scheiden selbst noch mehrfache Beweise seiner aufopfernden Liebe zu Schule und Lehenn nicht nur daß er die aus dem Collegium, welche während des Vierteljahrs, in welchem laubt war, ihn vertreten hatten*), aufs Anständigste entschädigte, — er machte es auch möglich, le aus dem Collegium, denen bei seinem Abgange von den Königlichen Hohen Behörden

---

von dem Herrn Const.-Rath D. Funk bis zu seinem Abgange gehaltenen Stunden wurden zunächst ertheilt: 2 Religionsstunden in I. übernahm Prof. Wiggert, 2 hebräische Stunden in I. und 2 hebräische I. Hr. Oberl. Wolfart, 3 griechische in I. Hr. Oberl. Ditfurt und 1 griechische eben da Hr. Prof. Sucro.

Verbesserung ihrer Lage zugedacht war, nachträglich gleich vom 1. Juli ab in den vollen
der ihnen durch das Vorrücken zufallenden Gehaltserhöhung kamen. — Wir haben für sole
nur fromme Wünsche für ihn. Mag Gottes Gnade, ehe sie ihren treuen Diener zu höhe
gewerke abruft, ihm noch einen langen und durch Freuden in häuslichem Kreise und in wiss
licher Beschäftigung recht heitern Lebensabend schenken! Mag er auch des Wunsches Ei
sehen, mit dem er schied, daß Lehrende und Lernende an der Domschule durch die Liebe
Band der Vollkommenheit" verbunden bleiben und so die Schule auch in der ungewissen
die Stürme bestehen möchte, die von innen und außen sich erheben könnten; mag des
Rechte auch sein „Schild und großer Lohn" bleiben!

Von andern Veränderungen im Lehrercollegium, so wie von sonstigen Ereigniss
sehr bedauernswerthe aber unvermeidliche Störungen brachten, sind zu erwähnen:

Mit dem 30. April 1848 schied Herr Dr. Crusius, der seit Ostern 1842 der
genützt hatte, aus dem Collegium, um die Stelle eines Divisionspredigers zu übernehme
folgte unsere Achtung und unser Segenswunsch in seinen neuen Wirkungskreis. In sein
rückte, auf Verfügung des Königl. Prov. Schul-Collegiums vom 8. Juli 1848, der schon se
durch Kenntnisse und Eifer dem Gymnasium werth gewordene Schulamts-Candidat Hr. R. G
und in dessen Stelle der schon seit dem Beginn seines Probejahrs zu Joh. 1843 um da
nasium treuverdiente Schulamts-Candidat Hr. C. Schönstedt. Beide sind jetzt bei dem dr
Directoratswechsel herbeigeführten Vorrücken wiederum weiter gefördert.

Zu Ostern 1848 übernahm, da Hr. O.-L. Wolfart anderweitig schon hinreichend be
war, der Prediger der hiesigen französischreformirten Gemeinde, Hr. Lionnet, gegen Re
tion den Unterricht in der französischen Sprache mit wöchentlich 2 Stunden in Prima, di
zum Lesen französischer Classiker, theils zu Stilübungen und zur Conversation benutzt wer

Hr. Dr. Kretschmann wurde auch für d. J. 1848 wieder mit der Leitung de
übungen beauftragt. (vgl. Progr. v. 1848 S. 28.)

Hr. Professor Pax ward durch sein Amt als Stadtverordneter veranlasst bei den
derungen in den politischen Verhältnissen sich lebendiger zu betheiligen. Er ging mit Höhe
willigung zunächst auf kürzere Zeit als Abgeordneter der Stadt Magdeburg nach Frankfurt
bald darauf aber nach Berlin, wo er als Mitglied der National-Versammlung bis zu Ei
vembers weilte; seit dem 22. Februar d. J. aber ist er wieder dort als Deputirter zur
Kammer. In seinen Lehrstunden wurde er nun von seinen Collegen — größtentheils geg
schädigung aus dazu vom Königl. Prov. Schul-Collegium angewiesenen Ueberschüssen de
nasial-Kasse — auf die Weise vertreten, daß Prof. Wiggert die 2 philosoph. Stunde
Hr. O.-L. Wolfart (später Hr. Schönstedt) die 2 histor. Stunden in I, Hr. Lehrer
2 deutsche Stunden in Unter IV, Hr. Dr. Kretschmann 7 latein. Stunden eben da üb
Der Zeichnenunterricht blieb bis zum December ausgesetzt, seit dem 23. Februar aber hat
Anordnung des Königl. Provinz. Schul-Collegiums der Historienmaler und beim hiesigen
und Pädagogium zu Kloster U. L. Fr. als Zeichnenlehrer angestellte Hr. v. Hopffgart
wöchentlichen Stunden ertheilt.

Die asiatische Cholera, die im Sept. v. J. in Magdeburg stärker hervortrat,
daß auf gutachtliche Weisung der städtischen Sanitäts-Commission die Michaelisferien zwei
längert werden mußten, so daß der Unterricht erst am 24. October beginnen konnte.

Kaum hatten wir aber, eingerichtet so gut es sich thun ließ, das Winterhalbja
fangen, als Hr. O.-L. Wolfart so bedenklich erkrankte, daß er bis jetzt noch nicht wie
unterrichten können, und wir die Sorge haben, ihn noch längere Zeit zu entbehren. Gl
Weise kehrte bald darauf Hr. Prof. Pax, wenigstens auf einige Zeit, zu seiner Amtswir
zurück. Vertreten wird Hr. O.-L. Wolfart bisjetzt so, daß 2 hebr. Stunden in I Prof. Wi
2 hebr. in II Hr. Prof. Sucro, 6 französ. Stunden Hr. L. Grunow, den Religionsu

Unter-II Hr. O.-L. Ditfurt, den in III Prof. Wiggert, den in Ober-V Hr. L. Hase, eschichtsstunden eben da Hr. L. Schönstedt besorgt. *)

In Hinsicht der Cursen ist ungeachtet des mehrmaligen Wechsels der Lehrer für manche enstände und ungeachtet der großen Stundenzahl für die meisten Lehrer (der Unterzeichnete t hat mehrere Wochen lang über 20 Stunden gehalten) doch so wenig als irgend möglich war, mniß eingetreten. Die Ordinariate und die Hauptstunden sind in den Händen geblieben, in n sie früher schon lagen, bis auf folgende Aenderungen:

Durch die Versetzung zu Ostern 1848 wurde es rathsam, Unter-Secunda als eine in allen Lehrstunden von Ober-Secunda völlig getrennte Klasse so einzurichten, daß die für zweijährigen Cursus der Secunda bestimmten Pensa zwischen beide nunmehr getrennte Ord- en getheilt würden, und dafür Ober- und Unter-Tertia, die bisher in allen Stunden ihre be- rn Lehrer gehabt hatten, zusammen zu legen. Das Ordinariat der Unter-Secunda über- t für den Sommer P. Wiggert mit derselben Stundenzahl, die er früher in Ober-Tertia bt hatte, für beide Abtheilungen von Tertia führte es Hr. O.-L. Ditfurt fort. Seit An- des Winterhalbjahrs hat das Ordinariat von Unter-Secunda und das Lateinische und Grie- e in dieser Klasse Hr. O.-L. Ditfurt, von Tertia hat es, mit dem Unterrichte im Lateinischen Griechischen, Hr. L. Krasper. Das Ordinariat von Unter-Quinta führte — für Hr. Pax — im Sommer Hr. O.-L. Sauppe (den Unterricht im Lateinischen aber besorgte Hr. retschmann und Hr. L. Grunow, im Deutschen Hr. Meyer,) im Winter Hr. L. Gru- , der in diesem Halbjahr in dieser Klasse 10 latein. und 3 geschichtliche und geographische den gehalten hat.

Die übrigen äußeren und inneren Verhältnisse des Gymnasiums.

Die Gymnasial-Bibliothek ist theils aus den Mitteln der Anstalt, theils durch Geschenke in diesem Jahre wieder vermehrt worden; zu den letztern gehören, als vom Hohen Ministerium eistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten huldreichst übersandt:

Gerhard's Archäologische Zeitung. Jahrg. 1847.
Haupt's Zeitschrift für deutsches Alterthum. Bd. 7. Heft 1. 2.
Merlecker's Vorschläge zur Reorganisation des preuß. Schulwesens.
Codex Pomeraniae diplom., herausgeg. von Kosegarten. Lieferung. 3,
vom Herausgeber selbst eingeschickt
Busch's Königsberger astronom. Beobachtungen (Nr. 24.) aus d. J. 1838.

Mehrere zum Theil bändereiche Werke hat auch Hr. Consistorialrath D. Funk bei sei- lbgange der Bibliothek geschenkt. Indem die Anstalt für diesen neuen Beweis seiner auf- den Liebe zu ihr dankt und in diesen Büchern immer ein theures Andenken an seine und unvergeßlichen Oheims nur der Schule dienende tiefe Studien mannichfacher Art aner- ine fernere zweckdienlich scheinende Auswahl gütigst freigestellt ist, eine genauere Angabe der kten Werke künftiger Mittheilung vorbehalten bleiben.

*) Auch außer den hier genannten Lehrern haben die meisten Gelegenheit gefunden, durch Uebernahme einzelner Hrstunden auf längere oder kürzere Zeit oder durch nothwendige Vertauschung ihrer Lehrgegenstände oder nlegung ihrer Stunden bei oft entstehender Verlegenheit ihre Bereitwilligkeit dem Ganzen zu dienen von uem darzuthun.

Was in dem abgewichenen Jahre aus den eigenen Mitteln der Bibliothek gekauft i
größtentheils wieder Fortsetzungen und meistens der im vorjährigen Programm aufgeführten
Unter den andern Erwerbungen mögen genannt werden: Orelli opuscula Graecorum veterum sent
1819. 2 Bde. C. A. Böttiger's kleine Schriften. 3 Bde. 1838. Coluthus ed. Schäfer. Lips. 182
lust. ed. Kritz. 2 Bde. — Hesychii Lexic. suppl. ed. Show. 1792. Genelli's Theater zu
1818. — Ulm's Buchdruckergeschichte von Haßler. 1840. — Wilken's Gesch. der Heidelb. Bi
sammlung. 1817. — Linnaei systema naturae Stuttg. 1817 ff. vol. I—VI et mantissa I.
Musellii antiquitatis reliquiae. Veron. 1756 in Fol. — Steiner codex inscriptt. roman. Rheni
Aristaeneti epistolae ed. Boissonade. 1822. Dionis Chrysost. opera ed. Emperius. 2 Bde.
Cicero p. Mil. ed. Orell. 1826. Knigth die Baukunst unter den Normannen, bearb. v. R. Ly
1841. J. Rutgersii variarum lectt. libri 6. Lugd. B. 1618. Poetae latini minores ed. Wer
1788 — 99. 6 t. in 7 Bdn. Taciti opera ed. Ritter. 4 Bde. 1848. Scheibert's höhere Bürge
1848. Heydemann und Mützel Zeitschrift für Gymnasialwesen. 1848. Otto commentarii in codd. bi
sensis 1842. Wiltsch kirchl. Geogr. und Statistik. 2 Bde. 1846. Album Viteberg. ed. Först
Lassen's indische Alterthumskunde. Bd. 1.

Für die Schülerbibliothek sind die regelmäßigen Beiträge der sie benutzenden Cl
verwandt worden theils zur Ergänzung verbrauchter Exemplare der früher angeschafften Sc
theils zum Ankaufe eines Zuwachses von etwa 60 Bänden.

Unter dem was zur Vermehrung des naturhistorischen Cabinets und des p
kalischen Apparats geschafft ist, verdient vor allem das „Modell einer Dampfmaschi
Hochdruck" erwähnt zu werden, das von einem ehemaligen Zöglinge des Gymnasiums, dem b
Mechaniker Hrn. Robert Cuny, eben so geschickt gearbeitet als preiswürdig geliefert ist
dafür nöthig gewordene Ausgabe von 60 Thlrn. gestattete das Königl. Provinzial-Schul-Col
soweit sie nicht aus der Etats-Summe zu Unterrichtsmitteln bestritten werden könnte, aus
weitigem Bestande der Gymnasialkasse zu entnehmen.

Erlaß des ganzen Schulgeldes erhielten im Sommerhalbjahr 32, im Wint
jahr 35 Schüler.

Aus der Funk'schen Stiftung wurde an Unterstützungen vertheilt:
Zu Ostern 1848: 30 Thlr. Gold an 1 Abitur., 60 Thlr. Cour. an 3 Abitur. u. 70 Thlr. 2
3 Pf. Cour. an 13 Schüler.
Zu Michaelis 1848: 48 Thlr. Gold an 2 Abitur. u. 132 Thlr. 7 Sgr. 9 Pf. Cour. an 21 S

Das von Münchhausen'sche Stipendium (vormals beim Pädagogium des Kl
Berge; vgl. Progr. v. 1844 S. 31), das für die Zeit von Ostern 1848 bis Ostern 1849 b
serm Gymnasium zu vertheilen war, erhielten 2 Primaner und 2 Secundaner, jeder zu 2
Durch die mit ehrfurchtsvollem Danke anerkannte Fürsorge des Königl. Provinzial-S
Collegiums sind auch die seit dem Jahre 1826 (vgl. Matthias Mittheilungen 1826, S. 117) v
damals unzureichender Mittel der Kloster Berge'schen Stiftung nicht mehr ausgezahlten vie
ein halbes Kloster Berge'sche Stipendien, die dem Domgymnasium überwiesen war
sprünglich fünf volle Stipendien oder 500 Thlr. vgl. Matthias Mittheilungen Progr. v. 184
104) im Betrage von jährlich 450 Thlrn. wieder ins Leben getreten und vom 1. Jan. 1848 ab
vergeben worden. Vgl. Progr. 1848. S. 27.

Da nun aber die Stipendiengelder bei der Kloster Berge'schen Stiftung nach de
lenderjahre vom 1. Jan. 1848 ab bewilligt worden waren, die Verleihung aber grundsätzli
dem Schuljahre Statt findet, so konnte für die Zeit vom 1. Jan. 1848 bis Ende Sept
225 Thlr. + 112 Thlr. 15 Sgr., zusammen 337 Thlr. 15 Sgr. vertheilt werden, von e
5 Primaner je 50 Thlr., 3 Primaner je 25 Thlr., 2 Secundaner je 50 Thlr., 1 Secunda

r. 15 Sgr. und 1 Tertianer 25 Thlr. bekamen. Von den für das Halbjahr Michaelis 1848 Ostern 1849 fälligen 225 Thlr. erhielten 1 Primaner 50 Thlr., 3 Primaner je 25 Thlr., 3 undaner je 25 Thlr. und 1 Tertianer 25 Thlr. — Unterstützungen, die für viele Eltern in diese Jahre doppelten Werth gehabt haben.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Königs konnte in diesem Jahre nicht auf die herkömmWeise gefeiert werden, weil er in die oben (S. 28) erwähnte unfreiwillige Verlängerung der en fiel.

Andere Schulfeierlichkeiten, als Rede- und musikalische Uebungen, wurden vermieden, weil weder schon störend genug wirkenden Zeitumstände und des oben berührten Mangels an Lehrern alle Zeit zu Rathe gehalten werden mußte.

Von den im Laufe des Schuljahrs eingegangenen Verfügungen der Hohen vorgesetzten örden, soweit sie nicht in den obigen Nachrichten schon zu berücksichtigen waren, sind hier folzu nennen:

1) Nach ministerieller Genehmigung wird vom Königl. Prov. Schul-Collegium unter dem Mai 1848 aus den disponibeln Schulgeld-Ueberschüssen der Anstalt einem Lehrer eine außerliche Unterstützung von 100 Thlrn. und einem Hülfslehrer eine Remuneration von 200 n. gewährt.

2) Vom 5. Juni. — Nach dem am 30. Mai erfolgten Tode des frühern Schuldieners Anstalt, Fischer, soll dem jetzigen Schuldiener Horn das etatsmäßige Einkommen der Stelle 1. Juli ab unverkürzt gewährt werden.

3) Vom 16. Juli. — Aus den Ueberschüssen des im Jahre 1847 eingenommenen Schuls sollen 200 Thlr. zu Gratificationen für 5 Lehrer verwandt werden. Diese haben den neuen eis huldvoller Fürsorge der Hohen Behörden mit gebührender Dankbarkeit empfangen.

4) Durch Rescripte vom 8. Sept., 22. Sept., 6. Nov. wurde das Lehrercollegium aufgert, zu einer zur Berathung von Gymnasial-Angelegenheiten nach Berlin zusammen zu rufenden mission 3 Abgeordnete für die Provinz Sachsen aus den Directoren und Lehrern der Provinz ählen. Unterm 11. Dec. wurde mitgetheilt, daß auf Rector Dr. Eckstein zu Halle, Professor ke zu Merseburg und Professor Jacobi I zu Pforta die Wahl gefallen sei.

5) Vom 19. Oct. — Die jährlichen Conduitenlisten der Lehrer sollen wegfallen.

6) Vom 8. Dec. — Allen Gymnasiasten und Schülern wird Betheiligung an politischen nen verboten, und haben die Schul-Anstalten mit allen ihnen zuständigen Mitteln der Schulin ernstlich dagegen zu wirken, selbst wenn Eltern oder Vormünder sich etwa veranlaßt finollten, ihren Kindern oder Pflegebefohlenen eine desfallsige Erlaubniß zu ertheilen.

7) Vom 20. Dec. — Nach ministerieller Verfügung vom 14. Dec. sollen bis zu einer in cht stehenden gesetzlichen Regulirung des Unterrichtswesens die bestehenden Einrichtungen Vorschriften für die Gymnasien in Kraft bleiben.

8) Vom 4. Jan. — Mittheilung eines Ministerialcirculars vom 20. Dec. enthaltend eine rderung der Lehrer zur würdigen Haltung bei der politischen Aufregung der Zeit und Verung derselben hinsichtlich der Uebertragung ihrer mit der bestehenden Staatsverfassung etwa übereinstimmenden Ansichten in die Schule.

Frequenz.

Die Schülerzahl betrug:
zu Anfang des Sommerhalbjahrs: 434.
" " " Winterhalbjahrs: 428.
und beträgt jetzt am Schlusse des Jahres: 417.

Gestorben sind zwei: Der Unterquintaner Andr. Hermann Kost a. Wellen [2
28. Aug. nach längerer Kränklichkeit, und Louis Friedr. Karl Otto a. M., in Sexta, 1
alt, der am 9. Sept. der Cholera erlag.

Zur Universität gingen mit dem Zeugnisse der Reife:

Michaelis 1848:
1) Julius Adolf Brandt a. Magdeburg. (Theol. u. Philol.)
2) Friedrich Heinrich Döbber a. Hakeborn. (Theol.)
3) Friedrich Heinrich Reinhold Heyn a. Magdeburg. (Jur.)
4) Friedrich Hugo Keßler a. Magdeburg. (Medic.)
5) Anton Ludwig Fedor Sucro a. Magdeburg. (Jur.)

Ostern 1849:
1) Albert Friedrich Wilh. Fischer a. Ziesar [Hohendodeleben.] (T
2) Friedrich Wilh. Karl Fritzsche a. Barleben. (Medic.)
3) Jacob Fritz August Gewe a. Gr. Holzhausen i. d. Altmark. (
4) Moritz Albert Otto Hermann a. Schönebeck. (Chemie.)
5) Gottfried Wilh. Louis Lagemann a. Gr. Wanzleben. (Theol
6) Georg Albert Lücke a. Magdeburg. (Jur.)
7) Ernst Friedrich Julius Meyer a. Letzlingen [Kloster Neuendorf.] (
8) Eduard Heinrich Rathmann a. Klein Lübs [Wasserleben.] (Theol.
9) Johann Heinrich Berthold Rustenbach a. Nordgermersleben.
10) Aug. Ferdinand Emil Schlunck a. Schönebeck. (Jur.)
11) Theodor Melchior Wagner a. Bleckendorf. (Bergwiss.)

Wigg

rzeichniss der Schüler des Domgymnasiums zu Magdeburg, zur öffentlichen Prüfung, Ostern 1849. [417.]

Diejenigen, deren Geburtsort nicht angegeben ist, sind aus Magdeburg gebürtig. In [ ] steht der jetzige Wohnort Eltern, falls dieser nicht mit dem Geburtsorte des Schülers derselbe ist; M. bedeutet dabei Magdeburg.

Prima (34).

Die mit † bezeichneten sind bei der Prüfung am 13. März d. J. für reif zur Universität erklärt worden.

lav Brecht a. Gr. Quenstedt [Ochtnersleben].
l Döring a. Sandau.
bert Fischer a. Ziesar [Hohendoleleben].
l Fischer.
rl Fritzsche a. Barleben.
ob von Gerlach a. Kläden b. Stendal.
itz Gewe a. Groß-Holzhausen i. d. Altmark.
nhard Große a. Erfurt [M.]
ddor Hachtmann a. Anhalt b. Pleß Barby].
oritz Hermann a. Schönebeck.
Max Hirsch a. Halberstadt [M.]
Karl Janicke.
Ferdinand Koch a. Parey [Ringfurth].
Karl Kortum a. Hakeborn [Schwaneberg.]
†Louis Lagemann a. Gr. Wanzleben.
Otto Lehmann a. Stendal [M.]
Ludwig Leithoff.
Julius Liepelt.
†Albert Lücke.
†Ernst Meyer a. Letzlingen [Kloster Neuendorf].
Karl Müller a. Samswegen.
Heinrich Pfanne a. Gommern.
†Heinrich Rathmann a. Klein-Lübs [Wasserleben].
Johannes Rathmann a. M. [Krakau].
†Heinrich Rustenbach a. Nordgermersleben.
†Emil Schlunck a. Schönebeck.
Albert Sieger a. Egeln.
Karl Siegfried.
Gustav Teubner.
Emil Torges a. Mühlhausen [M.]
Fritz v. Trzebiatowski a. Torgau [Glatz].
Wilhelm Uterwedde a. Wolmirstedt.
Otto Volgenau a. Kaltenhof i. d. Priegnitz.
†Theodor Wagner a. Bleckendorf.

Ober-Secunda (28).

l Braun a. Schermbke.
rich Degenkolb a. Eilenburg.
helm Dorendorf a. Gardelegen.
nann Fischer a. Ziesar [Hohendoleleben].
Friese a. Quedlinburg [Bukau].
ard Fritze a. Scharteuke [M.]
on Grape a. Barleben.
av Grothe a. Berlin [M.]
ddor Humbert a. Berlin [M.]
Albert Jacoby.
Emil Knüppel.
Max Lange.
Oscar Laué a. M. [Kehnert].
Adelbert Lichtenberg a. Seehausen i. M.
Konrad Listemann.
Heinrich Märker a. Wettin.
Louis Mehlhose a. Dönstedt [Böddensell].
Louis Meyer a. Gr. Oschersleben.
Wilhelm Münde a. Schönebeck.
Heinrich Otto a. Schwaneberg.
Theodor Reinecke a. Gr. Salze.
Julius Reinecke.
Louis Roch.
Karl Schmücker a. Loburg [Prödel].
Hermann Schulze a. Salzwedel [M.]
August Schwarzlose a. Ziesar.
Richard Silberschlag.
Theodor Zollmann.

Unter-Secunda (32).

is Bauermeister a. Loitsche.
f Brüggemann.
ipp Coqui a. Gr. Germersleben.
olf Cuno a. Dodendorf.
o Curitz.
l Francke a. Gr. Wanzleben.
o Fromme a. Bensdorf b. Genthin Genthin].
av Güssow } a. Kloster Gröningen
t Güssow } [Egeln].
v. Heeringen a. M. [Großbartensleben].
Karl Hildebrandt.
Hugo Holstein.
Gustav Jäckel.
Felix Krüger } a. Colbitz [M.]
Moritz Krüger }
Ernst Kühne a. Saarmund b. Potsdam [M.]
Friedrich Kuhnert.
Max Lamle a. Coblenz [M.]
Theodor Lemke.
Reinhold Meinecke.
Ernst Meyer.
Wilhelm Meyer.
Friedrich Michaelis.
Emil Müller a. Samswegen.
Hermann Muths a. Erfurt [M.]
Karl Oppermann a. Gr. Ammensleben [Stemmern].
Wilhelm Rohde a. Egeln.
Wilhelm Roterberg a. Salbke.
Heinrich Schwenke a. Calbe a. d. S.
Eduard Varges a. Berlin [M.]
Karl Wetter a. Genthin [M.]
Odo von Wulffen a. Pietzpuhl.

Ober-Tertia (17).

ird Bussenius a. Sohlen [Wellen].
f Curitz.
is Freytag a. Dodendorf.
r Fritze.
olf Humbert a. Berlin [M.]
av Junghann aus Aschersleben Drakenstedt].
Bruno Käsebier a. Schönebeck.
Werner Lindemann a. Osterburg.
Wilhelm Matthias.
Hermann Mechow a. Ramstedt.
Ekbert Müller.
Rudolf Neuland a. Gr. Glogau [M.]
Ernst Schmutz a. Crüssau [Werkleitz].
Oscar Weber a. Burg [M.]
August Wolfrom.
Richard von Wulffen a. Wüsten-Jerichow [Loburg].
Hermann Zieger a. Sandau [Leitzkau].

Unter-Tertia (30).

Julius Banck a. Schraplau.
Hermann Bochat a. Mäckern b. Rheinsberg [Perleberg].
Albrecht Conradi a. Schönebeck.
Hermann Elsner a. Reichnow b. Wriezen [Kl. Rosenburg].
Victor von Fischer a. Danzig [M.]
Hermann Gödecke a. Bischofswalde.
Gustav Hartmann.
Albrecht Heineke } a. Schönebeck.
Walter Heineke }
Louis Henz.
Ernst Hundt a. Calbe a. d. S.
Wilhelm Jellinghaus.
Albrecht Käsemacher.
Albert Koch a. Gr. Nossau b. Osterburg.
Oscar Koch a. Parey [Ringfurth].
Wilhelm Kreuzmann.
Albert Lagemann a. Gr. Wanzleben.
Karl Maquet.
Reinhold Nesemann a. Barendorf.
Hermann Peters.
Wilhelm Riedel a. Neuhaldensleben.
August Scharrer.
Theodor Schmidt a. Urslebe
Julius Thäder.
Friedrich Theune aus Gr[Hermsdorf].
Ernst Thilo a. Möckern.
Karl Ursinus.
Gustav Voigt a. Wolmirsted
Max Witzenhausen a. Scher
Friedrich Zernial a. Cleve densleben].

Ober-Quarta (48).

Louis Behrendt a. Schönebeck.
Gustav Biermann a. Errleben.
Hermann Crusius a. Deutsch i. d. Altmark [Siestedt].
August Dänecke a. Schakensleben [Gr. Wanzleben.]
Friedrich Dannenberg a. Schneidlingen.
Emil Dieterici a. Gr. Ballerstedt b. Osterburg [Lostau].
Eugen Döring a. Sandau.
Friedrich Duchstein a. Buckau.
Karl Dynnebier.
Heinrich Faber.
Eduard Fischer a. Gr. Wanzleben [M.]
Hugo Förste.
Friedrich Frölig a. Ribbensdorf b. Weferlingen.
Karl Henheik a. Ackendorf.
Wilhelm Heuckenkamp.
Emil Jahn a. Loburg [M.]
Ernst Karnstedt.
Karl Knevels.
Heinrich Knoche.
Wilhelm Könecke a. Gr. Wanzleben.
Rudolf Kornfeld.
Ernst Krüger.
Rudolf Kühne a. Berlin [M.]
Hugo Kühne a. Stolberg [M.]
Alwin Kummer a. Barendorf.
Hermann Kunze a. Zeppernick.
Wilhelm Lhermet.
Theodor Liepelt.
Oscar Mehlhose a. Barleben.
Robert Möhring.
Wilhelm Naumann a. Osterweddingen.
Ernst Nöldichen a. Wolmirstedt.
Louis Philippson aus Grünberg in Schlesien.
Ferdinand Piatscheck.
Heinrich Rühlandt a. Helmst
Julius Schirrmeister a. Cobu
Theodor Schliephak a. Gr. W
Arnold Schnarr a. Burg [Su
Gustav Seipke aus Kalten Oebisfelde.
Wilhelm Starke a. Gr. Sal
Hugo Stötzer a. Prenzlau [
Hermann Sucro.
Richard Temming.
Rudolf Weise a. Derenbur stadt M.]
Eduard Wiermann.
Gustav Wilberg a. Hohensee
Theophil Wieruszewski.
Louis Wolter.

Unter-Quarta (48).

Reinhold Arends a. Dreileben [Seehausen].
Otto Brösel a. Tangermünde [Neustadt M.]
Adolf Bussenius a. Sohlen [Wellen].
Gustav Bussenius a. Calbe a. d. S.
Adolf Clement.
Rudolf Costenoble.
August Dieck a. d. Sudenburg.
Theodor Eiserhardt a. Schönebeck.
Gustav Feber a. Neue Neustadt M.
Max Fischer.
Hugo von Fischer a. Danzig [M.]
Gustav Haug.
Richard von Heeringen a. Helmstedt [Gr. Bartensleben].
Otto Heyn.
Albert Hildebrandt.
August Holst a. Wolmirstedt.
Karl Junghann a. Drakenstedt.
Otto Junghann = =
Robert Kleinecke a. Neuhaldensleben.
Julius König.
Karl Kunze a. Zeppernick.
Theodor Lange.
Adolf Laue.
August Maquet.
Albert Maquet.
Otto Muths.
Wilhelm Nagel a. Wackersleben.
Richard Paasche a. Althaldensleben [Neustadt M.]
Gustav Papendieck.
Karl Rejall.
Hermann Rönsch.
Hermann Saalwächter a. Gommern.
Adolf Sasse.
Adolf Scherping a. Olvenstedt
Adolf Schmelzer a. Commende
Heinrich Schrader.
Wilhelm Schubert.
Emil Stahlknecht a. Neuhald
Emil Trenckmann.
Eduard Ulrich a. Schakensleb
Emil Veckenstedt a. Behlitz.
Julius Voigtel.
Albert Wagenknecht a. Kloste dorf.
Eduard Weber.
Oscar Weichsel.
Paul Wolfart.
Ernst Zernial a. Cleve [Neu leben].
Wilhelm Zernial a. Neuhalden

Ober-Quinta (44).

Hans von Alemann a. Altenplatow.
Gustav Baensch.
August Bethge a. Eggersdorf.
August Blencke a. Diesdorf.
Adolf Böse a. Leitzkau.
Cäsar Brockhaus.
Gustav Clement.
Rudolf Danckworth.
Adolf Dannehl.
Richard Deneke.
Emil Ebeling.
Eduard Eccardt a. Ornshagen i. Hinterpommern [M.]
Julius Finzenhagen a. Oebisfelde.
Heinrich Fischer.
Fedor Fritze.
Ernst Grüson.
Hermann Günther.
Adolf Hagen.
Rudolf Horch.
Karl Huth a. Gellmersdorf.
Albert Ibold.
August Kämmerer a. Heinrich
Edmund Kämpf.

echt Kämpf.
Käsemacher.
Kühne a. Wolmirstedt.
stian Lindstedt a. Behlitz [Walwitz].
rt Maaß.
hard Meyer.
f Naumann.
Nolte a. Rätzlingen.

Ulrich Paasche aus Neuhaldensleben [Neustadt M.]
Gustav Prey a. Berlingerode [M.]
Friedrich Roch.
Louis Ruprecht a. Schönebeck. [M.]
Otto Schäffer a. Groppendorf.
Rudolf Schmilinsky.
Herm. Schönfeldt a. Calbe a. d. S. [M.]

Bernhard Gf. von der Schulenburg a. Schwanebeck [Altenhausen].
Friedrich Spamann a. d. Sudenburg.
Karl Stein.
Wilhelm Stöffler a. Westerhüsen.
Gustav Volkholz a. Loburg.
Karl Weihe.

Unter-Quinta (60).

von Allemann a. Weferlingen Schweinitz].
lf Andreä a. Etgersleben.
ard Arndt a. Querfurt [M.]
ann Bauermeister.
as Beck.
stian Bedau a. Wolmirsleben.
ann Bertram a. Diesdorf.
f Brockhaus.
elm Brünecke.
er Burchardt.
or Chwatal.
elm Costenoble.
Cuny.
Dannehl a. Angern.
thias Denecke a. Ackendorf.
h Dietz a. Mainz [M.]
f Eiserhardt a. Schönebeck.
t Fischer.
ert Förste.
Fritze.
er Fritze.

Adolf Glöckner a. Seehausen.
Emil Hattorf a. Welsleben [Leitzkau].
Max Henny a. Berlin [M.]
Albert Humbert a. Berlin [M.]
Hermann Käsemacher.
Heinrich Kayser.
Wilhelm Kötz a. Förderstedt [Gr. Salze].
Otto Künne.
Adolf Laue a. Gr. Salze [Calbe a. d. S].
Ludwig Lehmann a. Stendal [M.]
Friedrich Lindau a. Schartau [Barleben].
Rudolf Löwe a. Frohse [Randau].
Adolf Luber.
August Lüders a. Gr. Mantel [Lindhorst].
Wilhelm Lutz a. Gardelegen. [M.]
Matthias Nesemann a. Kl. Lübs.
Friedrich Nickau a. Seehausen i. d. A. [M.]
Wilhelm Papendieck.
Ferdinand Ranzow.

Otto Reibe.
Hugo Roch.
Wilhelm Rost.
Louis Rückert.
Hermann Schäffer.
Fritz Schieß.
Hermann Schliebs.
Georg Schneider.
Hermann Schultze.
Otto Schwieder a. Förderstedt.
Friedrich Stolze a. Oebisfelde.
Theodor Teichner.
Wilhelm Thiele.
Johannes Uhlich a. Pömmelte [M.]
Heinrich Voigt a. Diesdorf b. Salzwedel [Wolmirstedt].
Albert Weihe a. Neustadt [M.]
Alwin Wisch a. Oebisfelde.
Heinrich Winselmann a. Nieder-Dodeleben.
Max v. Westernhagen a. Erfurt [M.]
Leo von Wulffen a. Pietzpuhl.

Serta (76).

Allier.
Arends a. Seehausen i. M.
dor Aßmann.
rich Balan a. Cottbus [M.]
rt Baron.
elm Biermann a. Errleben.
elm Bonte.
s Brandt a. Barleben.
w Braun a. Schermbke.
ann Bussenius a. Sohlen [Wellen].
elm v. Cölln a. Mühlhausen [M.]
nnes Cuno a. Dodendorf.
Dannenberg a. Schneidlingen.
lf Decker.
hard Decker.
von Dobschütz a. Ruppin.
rd Engelke.
rd Faber.
Fischer.
st Fleschner.
ich Fricke a. Wellen.
old Friedrich.
Fritze a. Scharteuke [M.]
Fritze.
o von Glasenapp.
lm Gluth a. Gr. Bodungen [M.]

Ernst Gottschalk.
Robert Griesemann a. Bukau.
Hermann Heinrich.
Otto Hemptenmacher.
Hugo Hildenhagen.
Eduard von Homeyer a. Trier.
Friedrich Janke a. Barleben.
Otto Jenrich.
Otto Kattengell.
Bernhard Kattengell.
Paul Koch a. Gr. Rossau.
Otto Kölling } a. Möckern [M.]
Udo Kölling }
Heinrich Krüger.
Theodor Lange.
Karl Lehmann.
Albert Liepelt.
Heinrich Mähre.
Adolf Mechow a. Ramstedt.
Wilhelm Meinecke.
Ferdinand Ortel a. Saarbrück [M.]
Rudolf Otto a. d. Sudenburg.
Karl Petschke.
Otto Prüß.
Karl Rasch a. Barleben.
Adolf Redmann.

Robert Röpner.
Karl Rühle.
Emil Schatz.
Rudolf Schmidt.
Rudolf Schrader.
Gustav Schüler.
August Schulz a. Halberstadt [M.]
Emil Schütze.
Adolf Simon a. Schneidlingen.
Gustav Stock a. d. Neustadt M.
August Stübner.
Otto Stübner.
Berthold Teichner.
Alfred Tischbein a. Bukau.
Richard Vester.
Heinrich Waltenberg } a. Leitzkau [M].
Theodor Waltenberg }
Bernhard Weber.
Karl Weibezahl.
Otto Wesemeyer a. Seehausen i. M.
Gustav Wilhelmy a. Althaldensleben [M.]
Hermann Wolter.
Max von Wulffen a. Pietzpuhl.
Theodor Zimmermann a. Wittenberg [M.]

Oeffentliche Prüfung im Domgymnasium

am 29. und 30. März 1849.

Vormittag 8 bis 12 Uhr.

Donnerstag, den 29. März.

Ober-Quarta: Lateinisch. (Hr. Oberlehrer Sauppe.) 8—8¾.
Unter-Quarta: Geschichte und Geographie. (Hr. Lehrer Grunow.) 8¾—9½.
Ober-Quinta: Lateinisch. (Hr. Candidat u. provis. Lehrer Schönstedt.) 9¾—0
Unter-Quinta: Naturbeschreibung. (Hr. Lehrer Weise.) 10½—11¼.
Sexta: Lateinisch und Deutsch. (Hr. Lehrer Meyer.) 11¼—12.

Freitag, den 30. März.

Ober- und Unter-Tertia: Geschichte. (Hr. Candidat Dr. Kretschmann.) 8.
Unter-Secunda: Griechisch. (Hr. Oberlehrer Ditfurt.) 9.
Ober-Secunda: Mathematik. (Hr. Professor Wolf.) 10.
Prima: Tacit. Germ. (Professor Wiggert.) 11.

Druck und Papier von E. Baensch jun. in Magdeburg.

Fig. 1.

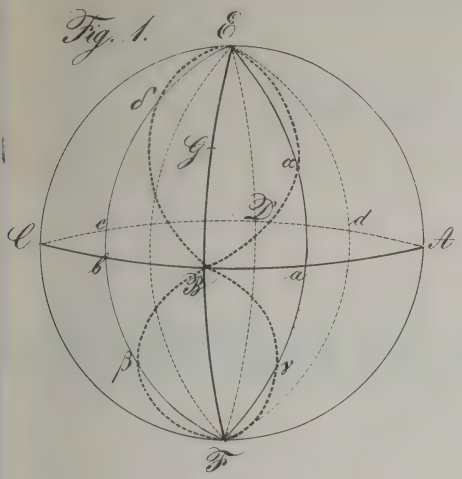


Fig. 2.

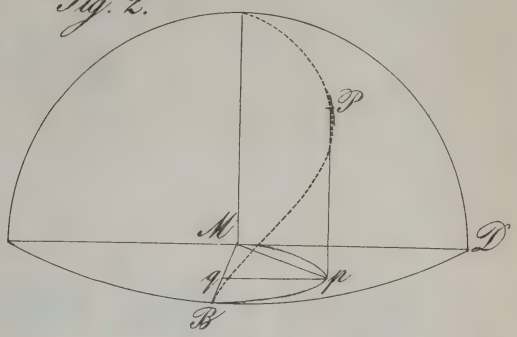


Fig. 3.

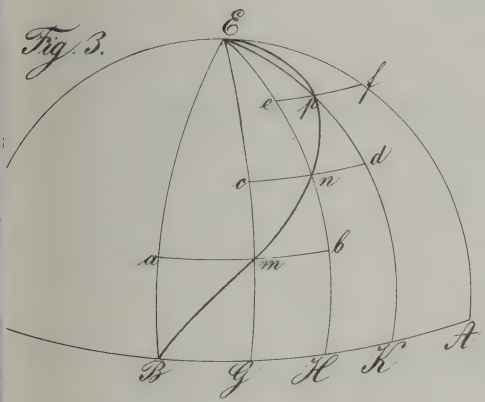


Fig. 4.

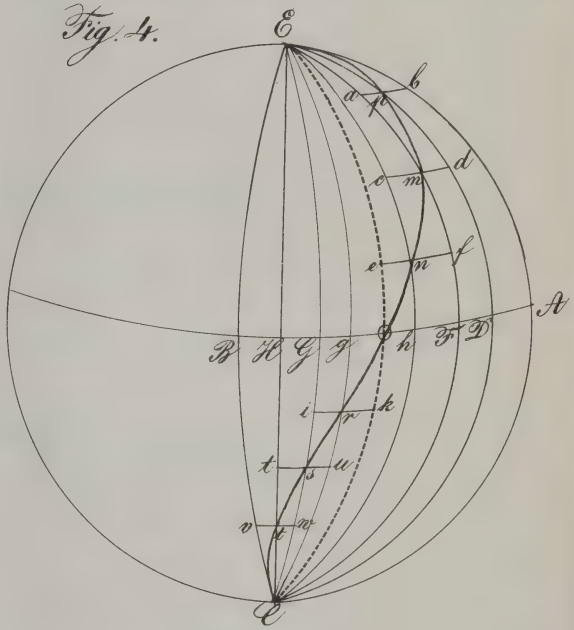
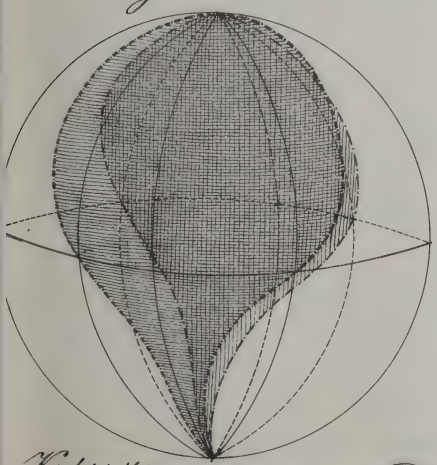


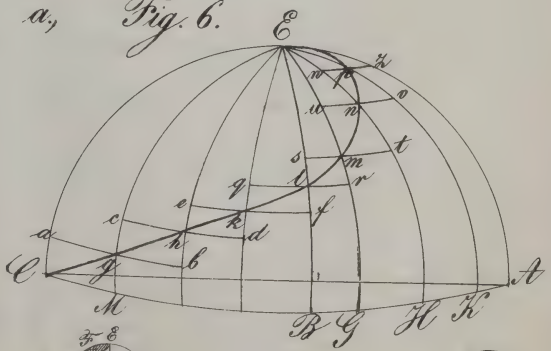
Fig. 5.

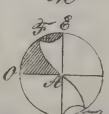


Vorderseite } d. Kugeloberfl.
Hinterseite }

Proj. auf d. XZ-Ebne.

a, Fig. 6.





b, Proj. auf d. YZ-Ebne.

c, Proj. a. d. XY-Ebne.

Lith. Inst. von R. Baensch jun. in Magdeburg.

Über die Entwickelung

der

...renzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index

und die damit

zusammenhängende Logialrechnung.

Von

Dr. Anton Grünwald,

o. ö. Professor der Mathematik an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(ABHANDLUNGEN DER KÖNIGL. BÖHM. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN. VI. FOLGE, 11 BAND.)

(Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe. Nr. 2.)

PRAG.

Verlag der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von dr. Ed. Grégr.

1881.

Vorwort.

In der am 26. November abgehaltenen Sitzung der k. böhm. Gesellschaft der i enschaften habe ich, zur Wahrung meiner Priorität, die *Resultate* meiner Unter- ungen „über die Entwickelung begrenzter, *geradliniger* Derivationen nach Potenzen Index und die damit zusammenhängende Logialrechnung“ mitgetheilt, in deren z ich mich schon durch viele Jahre befand, ohne sie bisher veröffentlicht zu n, weil ich durch andere (geometrisch-analytische und mechanische) Arbeiten von betreffenden Forschungsgebiete abgelenkt wurde.

In der ursprünglichen Abhandlung, welcher die mitgetheilten Resultate ent- nen waren, hatte ich mich auf *geradlinige* Derivationen von Funktionen beschränkt, ie dem Derivationswege entlang (mit Ausnahme der unteren Grenze) als *endlich stetig* vorausgesetzt wurden.

In der letzten Zeit nun nahm ich die bezüglichen Untersuchungen von Neuem erweiterte in der *denkbar allgemeinsten* Weise den Begriff geradliniger — auf **krummliniger**-Derivationen *beliebiger* Funktionen, — und ertheilte in Folge n allen darauf basirenden Untersuchungen und ihren bisherigen Resultaten die ar grösste Allgemeinheit und Anwendbarkeit.

Die auf solche Art umgearbeitete und erweiterte Schrift lege ich hier dem ile meiner Fachgenossen vor.

Prag, am 6. Februar 1881.

Dr. Anton K. Grünwald.

Erster Theil.

Nro. I.

Der Verfasser hat im XII. Bande der Schlömilch'schen Zeitschrift für Ma
und Physik in seiner Abhandlung: „Über begrenzte Derivationen und deren Anwendu
neuen Begriff von *begrenzten* oder *bestimmten* Derivationen (Differentialquotienten) nt
biger Ordnungszahl aufgestellt und die fundamentalen Gesetze der Rechnung mit d
Derivationen entwickelt.

In dieser Abhandlung wird „der ξ^{te} über das *geradlinige* Argumentgebiet vo
$x = u$ bis zum Punkte $x = x$ genommene Differentialquotient" einer innerhalb dess
stetig vorausgesetzten Funktion $f(x)$, oder „das $(-\xi)^{te}$ über dasselbe Werthgebie
dehnte Integral von: $f(x) . dx^{-\xi}$" durch den Grenzwerth definirt, welchem der

1. $$F(u, x, \xi, \delta)_f \equiv \Sigma_{p=0}^{p=n} (-1)^p \, (\xi_p) \, . \, \frac{f(x - p\delta)}{\delta^{\xi}}$$

$$\equiv \frac{f(x) - (\xi_1) f(x - \delta) + (\xi_2) f(x - 2\delta) - (\xi_3) f(x - 3\delta) + \ldots + (-1)^n (\xi_n) f(x-}{\delta^{\xi}}$$

zustrebt, wenn die positive ganze Zahl n uneingeschränkt wächst und der Modul, d
Allgemeinen komplexen Grösse δ derartig der Null zustrebt, dass $n\delta = x - u$ wil
Grösse u und die davon unabhängige, als variabel aufgefasste Grösse x werden bi
die „untere" und die „obere" Grenze der Derivation genannt.

Der oben erwähnte Grenzwerth existirt, und zwar ist derselbe, wie aus je
handlung hervorgeht

2. $$lim_{\delta = 0} F(u, x, \xi, \delta)_f \equiv \frac{1}{\Gamma(-\xi + \nu)} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left\{ \int_{\vartheta = u}^{\vartheta = x} \frac{f(\vartheta) \, d\vartheta}{(x - \vartheta)^{\xi - \nu + 1}} \right\},$$

wo ν die *kleinste* positive ganze Zahl (mit Einschluss der Null) vorstellt, welche *gleh*
grösser ist als der *reelle* Theil von $(\xi + 1)$:

$$\text{pars real. } (\xi + 1) \leqq \nu.$$

Wenn nicht blos $f(x)$, sondern auch ihre abgeleiteten Funktionen bis zur ν^{ten} hinauf: $(), f'(x) \ldots f^{\nu}(x)$ längs der Geraden vom Punkte $x = u$ bis zum Punkte $x = x$ (mit ichluss dieser Grenzpunkte) endlich und stetig sind, kann der obige Grenzwerth und mit die ξ^{te} Derivation von $f(x)$ auch durch:

$$_{\nu=0} \cdot F(u, x, \xi, \vartheta)_f = \frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} + \frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi+1}}{\Gamma(-\xi+2)} + \frac{f''(u)\,(x-u)^{-\xi+2}}{\Gamma(-\xi+3)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{\nu-1}(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)} + \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{f^{\nu}(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-\nu+1}}$$

estellt werden (siehe Schlöm. J. Bd. XII. Seite 458).

Durch den Ausdruck unter 1) oder den damit aequivalenten unter 2) ist der Begriff ξ^{ten} Derivation (oder des $(-\xi)^{\text{ten}}$ Integrales) der Funktion $f(x)$ nur für *geradlinige* mentgebiete und bloss für solche Funktionen festgestellt, welche innerhalb derartiger ete endlich und stetig sind. Die Beschränkungen, obzwar für den ersten Eintritt in die Disciplin sehr zweckmässig, beeinträchtigen doch die Geschmeidigkeit des Calcüls und Fruchtbarkeit seiner Anwendungen. Wir wollen desshalb vor Allem zeigen, wie sich der iff der Derivationen auf krummlinige Wege der complexen Unabhängigen und auf stellenunstetige Funktionen ausdehnen lässt und welche Modifikationen hierbei die für geradDerivationen stetiger Funktionen geltenden Rechnungsgesetze erleiden.

Der Grenzwerth des Ausdruckes unter 1) lässt eine Erweiterung auf krummlinige der Variabeln x und auf stellenweise unstetige Funktionen *nicht* zu. Der Ausdruck im en Theile von 2) dagegen besitzt auch dann noch eine bestimmte Bedeutung, wenn wir elle des geradlinigen Integrationsweges von $\vartheta = u$ bis $\vartheta = x$ einen beliebigen krummen (c), und an Stelle der längs dem geraden Wege endlichen und stetigen Funktion $f(x)$ beliebige Funktion setzen, welche längs dem krummen Wege: (c) *stellenweise* auch *unstetig* kann. Der rechte Theil der Gleichung 2) ist somit vollkommen geeignet, der beabsichtigten Erweiterung des Begriffes der bestimmten Derivationen zu Grunde gelegt zu werden; Erweiterung, welche sich mit dem bisherigen beschränkteren Begriffe derselben in völliger einstimmung befindet.

Auf Grund dieser Erwägungen definiren wir *ganz allgemein* „den ξ^{ten} über den beliebigen Weg (c) des laufenden Punktes x vom Punkte $x = u$ bis zum Punkte $x = x$ erstreckten Differentialquotienten der Funktion $f(x)$:

$$\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} \equiv D_x^{\xi} f(x)_{(c)},$$

„das damit identische $(-\xi)^{\text{te}}$ über denselben Weg ausgedehnte Integral von $f(x)\,dx^{-\xi}$:

$$\int^{(-\xi)} f(x)\,(dx)^{-\xi}_{(c)}$$

diejenige Funktion von x, welche sich aus der gegebenen: $f(x)$ mittelst des Bildungsgesetzes:

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left\{ \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}_{(c)}} \right\}$$

ableiten lässt:

$$A) \ldots \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} \equiv D_x^\xi f(x)_{(c)} \equiv \int_{(c)}^{(-\xi)} f(x)\, dx^{-\xi} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left\{ \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\, dz}{(x-z)^{\xi-\nu}} \right.$$

wo ν die *kleinste* positive ganze Zahl, mit Einschluss der Null ist, welche gleich oder ist der reelle Theil von $(\xi+1)$: real $(\xi+1) \leqq \nu$.

Da $(x-z)^\xi$, wenn ξ gebrochen oder irrational ist, viel — ja unendlichdeu und sich diese Vieldeutigkeit auf die Derivation übertragen würde, so setzen wi allemal fest, dass in der allgemeinen Definitionsgleichung A) unter $(x-z)^\xi$ der werth" zu verstehen sei, nämlich jener Werth, welcher sich aus der Reihe:

$$(x-z)^\xi = 1 + \xi \log(x-z) + \frac{1}{2!}\xi^2 \log(x-z)^2 + \frac{1}{3!}\xi^3 \log(x-z)^3 + \ldots$$

unter der Voraussetzung ergibt, dass für $\log(x-z)$ der „Hauptwerth" dieses na Logarithmus genommen wird. Der letztere ist für $x-z = re^{\varphi i} = r(\cos\varphi + \sin\varphi$ $\log r + \varphi . i$, während der allgemeine Werth: $\log r + \varphi i + 2\varkappa\pi i$ sein würde; hier $\log r$ der *reelle* Werth des Modulus von $(x-z)$, und unter: $\varkappa$ eine *beliebige ga* zu verstehen.

Das im rechten Theile von A) vorkommende über den Weg (c) ausgedehnte

$$\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\, dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}} \quad [\text{pars real. } (\xi-\nu+1) \leqq 0]$$

besitzt nur dann einen *endlichen* Werth, die Derivation: $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$ nur dann einen *ten Sinn*, wenn für einen beliebigen auf dem Integrationswege liegenden Punkt: z, i dere aber für die Unstetigkeitsstellen:

3) $$lim_{h=0} . [f(z+h) . h] = 0$$

wird. Aus diesem Grunde können und werden in diesen Untersuchungen alle etwa menden Funktionen nur für *jenen Theil* der ihrer *Unabhängigen* zugewiesenen *Bild* Betracht gezogen werden, in welchem nur solche Unstetigkeitsstellen liegen, die dei gung 3) genügen; wobei wir insbesondere solche Stellen im Auge haben, an welc Funktionen entweder *potenziell* $-\infty$ von einem *niedrigeren* als dem 1. Grade, od rithmisch $-\infty$ werden.

Besitzt also eine Funktion von z in der z-Ebene Unstetigkeitsstellen $z = z_0$, der Bedingung 3) nicht entsprechen, so denken wir uns dieselben durch beliebig kl schlossene Linien aus der Ebene ausgeschieden; so dass in dem übrig gebliebenen der letzteren zwar *Derivationswege* vorkommen können, welche in beliebiger *endlich* an *derartigen* Stellen vorbeigehen, *keine* jedoch, welche *durch* sie *hindurchgehen*. Jed *lichen* Wege (c) der Unabhängigen z, welcher in der so veränderten, zur Funktion $f(z)$ gel z-Fläche verläuft, entspricht ein *endlicher* Werth des obigen Integrales und im Allg ein *bestimmter* Werth seines ν^{ten} nach dem variablen Endpunkte x genommenen Diffe quotienten, d. h. der begrenzten Derivation unter A). Der letztere muss aber nicht fü endlich sein, sondern kann unter Umständen bei Annäherung des Punktes x an

en nach einem *bestimmten* Gesetze ∞-gross werden; oder er kann, indem er zwar ch bleibt, nach einem bestimmten Gesetze hin- und herschwanken, um beim Eintreffen Punktes x an der betreffenden singulären Stelle *unbestimmbar* zu werden. Ein solcher t ist unter gewissen Bedingungen der Anfangspunkt u des Derivationsweges, wie wir r zeigen werden.

Alle in dieser Abhandlung in Betracht kommenden Funktionen werden als einwerthige odrome) Funktionen vorausgesetzt. Mehrwerthige Funktionen von z betrachten wir mit smann („Ausdehnungslehre" vom Jahre 1862, Nro. 348, Seite 223) als *eindeutige* Funkn von z und von anderen (mindestens von *einer*) *Nebenvariabeln* oder Parametern: ...., welche eine vorgeschriebene beschränkte oder unbeschränkte Mannigfaltigkeit **reter** Werthsysteme $(x_0, x_0' \ldots)$, $(x_1, x_1' \ldots)$, $(x_2, x_2' \ldots) \ldots$ annehmen können. Bei rationen oder allgemeiner bei Derivationen derartiger Funktionen längs gegebenen Wegen (c), man sich den betreffenden Weg vorher in Partialwege zerlegt und der Hauptvariablen z einem jeden dieser Partialwege ein bestimmtes spezielles Werthsystem der Parameter $(x,$ auf irgend eine (wo möglich anschauliche) Weise zugewiesen denken; wodurch dann innereines jeden derartigen Wegstückes das Änderungsgesetz der Funktion *eindeutig* bestimmt nd das Werthegebiet der mehrdeutigen Funktion längs dem Wege (c) den Charakter des hegebietes einer *eindeutigen* Funktion bekommt. Eine sehr geistreiche Zuweisungsode dieser Art ist das Riemann'sche Verfahren, nach welchem der Variablen z für *je ein hesystem* der Parameter: $(x, x' \ldots)$ auf bekannte Weise je *ein* Blatt über der z-Ebene)rt in Bezug auf die Funktion zugewiesen und so ein eindeutiges Entsprechen der te z der vielblättrigen Fläche mit den zugehörigen Funktionswerthen erzielt wird.

Hier, wo wir uns auf einwerthige Funktionen beschränken, weisen wir der Variablen z glich der Funktion $f(z)$ ein ebenes Blatt zu, nachdem wir aus demselben in der oben ebenen Weise beliebig kleine Stücke, welche die Unstetigkeitsstellen der 2. Art (d. h. welche der Bedingung 3) nicht genügen) enthalten, *herausgeschnitten*, und mittels eines es, welchen wir mit *uneingeschränkt grossem* (*endlichem*) Radius um den Nullpunkt n beschreiben, die unendlich fernen Punkte ausgeschieden haben. Die so erhaltene che machen wir, wenn nöthig, durch geeignete *Querschnitte*, im Sinne Riemann's, zu einer *ch zusammenhängenden*, und weisen dieselbe auch den von z unabhängigen Punkten x als Ort (Spielraum) zu. Die *innere* Seite der Kreisperipherie, die Ränder der durch tellenweisen Ausschnitte entstandenen Löcher, und die beiden Ufer der als unendlich ale Kanäle aufgefassten Querschnitte sind ihre Grenzen. Wir nennen sie „die der Funk$f(x)$, von welcher die ξ^{te}-Derivation genommen wird, **adjungirte** Fläche der Unabhänx", oder kurz die „x-Fläche der Funktion".

Das Integral im rechten Theile von *A*) behält in der *genannten* Fläche für *jeden* Punkte u nach dem Punkte x führenden Weg (c) denselben Werth, ist also von dem ren unabhängig; m. a. W. es ist eine reine Funktion der Grenzen. In Folge dessen ist die Derivation $\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(x)_{(c)}$ von dem Derivationswege (c) innerhalb der x-Fläche unabg, blos eine Funktion ihrer „oberen Grenze" x, ihrer „unteren Grenze" u und ihres

Index ξ. Doch wird hier nur die erstere Grösse (x) als die eigentliche unabhängige ... aufgefasst, die beiden andern (u, ξ) dagegen werden als Parameter der Derivation bet...

Der Grund, warum man nur Unstetigkeitsstellen der 2. Art, *nicht* aber jene de... welche der Bedingung 3) genügen, aus der, der Funktion $f(z)$ adjungirten, z-Fläche... schliessen braucht, liegt einfach darin, weil zwei zwischen denselben Grenzen gen... Integrale von der Form

$$\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}(c)} \quad \text{und} \quad \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}(c')}$$

auch dann noch gleich bleiben, wenn ihre Integrationswege (c) und (c') innerhalb der z... einen Flächenraum einschliessen, in welchem sich Unstetigkeitsstellen der Funktion f... der *1. Art* befinden.

Es liegt auf der Hand, dass die *Bezeichnung* der Derivationsvariabeln auf... krummlinigen Derivationen ohne allen Einfluss auf den Werth der Derivation ist, wel... selbe nur in der adjungirten Fläche den nämlichen Anfangs- u. Endwerth annimmt: d. h...

$$(4) \qquad \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{x=u}^{x=x} \equiv \frac{d^{\xi}}{dz^{\xi}} f(z)_{z=u}^{z=x}.$$

Die über eine beliebige Curve (c) ausgedehnte ξ^{te} Derivation von $f(x)$ läss... ähnlich wie die über eine Gerade erstreckte, unter gewissen Bedingungen *direkt* dur... einfaches, jedoch nach einer von x verschiedenen Unabhängigen (etwa z) genommenes I... darstellen. Es ist hierzu die Umformung des Integrales rechts in A) mittels ν-maliger... *weiser* Integration *längs der Curve* (c) erforderlich, um dann die unter A) angei... ν Differentiationen nach x anstandlos ausführen zu können; und es mögen zu diesem Ende... kurze Bemerkungen über die *theilweise* Integration *längs gegebenen Curven* hier voran...

Wir stellen uns das vom Punkte $z=u$ zum Punkte $z=x$ führende Curvenst... durch eine uneingeschränkt grosse Zahl von $(n-1)$ eingeschalteten Punkten: $u_1, u_2, ...$ in n uneingeschränkt kleine Bogenelemente: von u nach u_1, von u_1 nach $u_2, \ldots$ vo... nach $u_n \equiv x$ zerlegt vor, wobei wir die Schaltpunkte so annehmen, dass die längs (c)... vorhandenen Unstetigkeitsstellen je zwischen zwei benachbarten Punkten liegen. Da... ein beliebiges von diesen Elementen, etwa $u_{r-1}\,u_r$ $(r=1, 2, \ldots n)$ erstreckte In... der Identität:

$$f(z) \cdot \varphi'(z)\,dz \equiv \frac{d[f(z) \cdot \varphi(z)]}{dz} - f'(z)\,\varphi(z)\,dz$$

ist, da das Bogenelement mit einem uneingeschränkt kleinen Fehler als ein gerad... angesehen werden kann:

$$\int_{u_{r-1}}^{u_r} f(z) \cdot \varphi'(z)\,dz = [f(u_r) \cdot \varphi(u_r) - f(u_{r-1}) \cdot \varphi(u_{r-1})] - \int_{u_{r-1}}^{u_r} f'(z) \cdot \varphi(z)\,dz,$$

jedoch nur, wenn die Funktion $[f(z) \cdot \varphi(z)]$ längs dem betreffenden Elementarwege u... endlich und stetig ist. Wenn diese Bedingung längs sämmtlicher Elementarwege erfül... kann aus der obigen Gleichung durch Summirung die Formel:

$$\int_{z=u}^{z=x} f(z) \,.\, \varphi'(z)\, dz_{(c)} = [f(x)\,\varphi(x) - f(u)\,\varphi(u)] - \int_{z=u}^{z=x} f'(z)\,\varphi(z)\, dz_{(c)}$$

ie theilweise Integration längs der Curve (b) abgeleitet werden.

Dieselbe ist also nur dann brauchbar, wenn die Funktion: $f(z) \,.\, \varphi(z)$ längs (c) endlich stetig bleibt und die Funktion: $[f'(z+h) \,.\, \varphi(z+h) \,.\, h]$ mit h zugleich verschwindet, eine von z unabhängige uneingeschränkt kleine Grösse ist.

Durch ν-malige Anwendung dieses Satzes erhält man:

$$\cdot) \,.\, \varphi^{\nu}(z)\, dz_{(c)} = \Big/_{z=u}^{z=x} \{f(z) \,.\, \varphi^{\nu-1}(z) - f'(z)\,\varphi^{\nu-2}(z) + f''(z)\,\varphi^{\nu-3}(z) - \ldots + (-1)^{\nu-1} \,.\, f^{\nu-1}(z) \,.\, \varphi(z)\}$$

$$+ (-1)^{\nu} \int_{z=u}^{z=x} f^{\nu}(z) \,.\, \varphi(z)\, dz_{(c)},$$

die Funktionen:

$$f(z)\,\varphi^{\nu-1}(z),\ f'(z)\,\varphi^{\nu-2}(z),\ f''(z)\,\varphi^{\nu-3}(z) \ldots . f^{\nu-1}(z) \,.\, \varphi(z)$$

(c) endlich und stetig bleiben und die Funktion: $[f^{\nu}(z+h) \,.\, \varphi(z+h) \,.\, h]$ [ebenfalls (c)] mit h zugleich verschwindet. Die letztere Bedingung zieht die Endlichkeit des ales im *rechten* Theile, in Verbindung mit der ersteren: die Endlichkeit des Integrales und damit das Verschwinden der Funktion von z: $[f(z+h) \,.\, \varphi^{\nu}(z+h) \,.\, h]$ *längs* (c) ch mit dem Verschwinden von h, nach sich. Das Zeichen: $\Big/_{z=u}^{z=x}$ deutet an, dass man die enz der Werthe zu bilden habe, welche der rechts stehende Klammerausdruck beziehir $z=x$ und $z=u$ annimmt.

Wir setzen in 6):

$$\varphi(z) = \frac{(x-z)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)}, \quad \text{also} \quad \varphi'(z) = \frac{-(x-z)^{2\nu-\xi-2}}{\Gamma(-\xi+2\nu-1)},$$

$$\varphi''(z) = \frac{+(x-z)^{2\nu-\xi-3}}{\Gamma(-\xi+2\nu-2)}, \ldots . \varphi^{\nu}(z) = \frac{(-1)^{\nu}(x-z)^{\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)},$$

sem Falle sind die soeben angeführten Funktionen für alle endlichen x und z [wegen ars real $(\xi+1)$] endlich und stetig; die bei 6) angegebenen Bedingungen reduciren esshalb auf die Bedingungen: α) **dass** die Funktionen: $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z) \ldots . f^{\nu-1}(z)$ (c) endlich und stetig bleiben und β) **dass** die Funktion: $[f^{\nu}(z+h) \,.\, h]$ für jeden z längs (c) zugleich mit h verschwindet. Wir erhalten:

$$\int_{z=u}^{z=x} f(z) \,.\, \frac{(x-z)^{\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)}\, dz_{(c)} = \frac{f(u)\,(x-u)^{\nu-\xi}}{\Gamma(-\xi+\nu+1)} + \frac{f'(u)\,(x-u)^{\nu-\xi+1}}{\Gamma(-\xi+\nu+2)}$$

$$u)\,(x-u)^{\nu-\xi+2} \over \Gamma(-\xi+\nu+3)} + \ldots . + \frac{f^{\nu-1}(u)\,(x-u)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)} + \int_{z=u}^{z=x} \frac{f^{\nu}(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)}\, dz_{(c)}$$

raus durch ν-malige Differentiation nach x mit Rücksicht auf A):

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = \frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} + \frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi+1}}{\Gamma(-\xi+2)} + \frac{f''(u)\,(x-u)^{-\xi+2}}{\Gamma(-\xi+3)} +$$

(7)
$$\ldots + \frac{f^{\nu-1}(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)} + \frac{d^\nu}{dx^\nu}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)}\,.\,dz_{(c)}$$

Die ν im rechten Theile angezeigten Differentiationen nach x können anstatt dem Integrale vollzogen werden.

Wir haben successive:

$$\frac{d}{dx}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)}\,dz_{(c)} = \frac{f^\nu(x)\,(x-x)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)}$$
$$+\int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-2}}{\Gamma(-\xi+2\nu-1)}\,dz_{(c)} = \int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-2}}{\Gamma(-\xi+2\nu-1)}\,dz_{(c)},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)}\,.\,dz_{(c)} = \int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-3}}{\Gamma(-\xi+2\nu-2)}\,dz_{(c)},$$

. . . . . .

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{2\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+2\nu)}\,dz_{(c)} = \int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,(x-z)^{\nu-\xi-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,.\,dz_{(c)},$$

bekommen also schliesslich durch Einsetzung dieses Resultates in die Gleichung 7):

A') $$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = \frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} + \frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi+1}}{\Gamma(-\xi+2)} + \frac{f''(u)\,(x-u)^{-\xi+2}}{\Gamma(-\xi+3)} +$$
$$\ldots + \frac{f^{\nu-1}(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)} + \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f^\nu(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}},$$
$$(c)$$

wo ν die *kleinste* positive ganze Zahl, mit Einschluss der Null, bedeutet, welche *größer* als der reelle Theil von $(\xi+1)$.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Brauchbarkeit der Gleichung sind:

a) die Endlichkeit und Stetigkeit der Funktionen: $f(z), f'(z), f''(z) \ldots f^{\nu-1}(z)$ längs dem Derivationswege (c) vom Punkte $z=u$ bis zum Punkte $z=x$ für $\nu \gtreqless 1$. Für $\nu=1$, d. h. pars real. $(\xi) \leqq -1$ fällt diese Bedingung fort, weil sich der Werth der Derivation auf das einfache Integral:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+1}}$$

[siehe A)] reducirt;

b) $lim_{h=0} . f^\nu(z+h) . h = 0$ längs (c) von $z=u$ bis $z=x$.

Bei Geltung der Bedingung b) lässt sich die Bedingung unter *a)* durch die einfachere

a') „dass die Spezialwerthe der Funktionen: $f(z), f'(z), f''(z) \ldots f^{\nu-1}(z)$ an der unteren Grenze, d. h. für $z=u$ *nicht* ∞ oder unbestimmt werden dürfen (vorausgesetzt dass $\nu \gtreqless$

rsetzen. *Gilt* nämlich *b*), so muss $\int_{z=u}^{z=x} f^{\nu}(z)\,dz = f^{\nu-1}(z) - f^{\nu-1}(u)$ längs (*c*) endlich

stetig, also wenn $f^{\nu-1}(u)$ *endlich* ist, auch $f^{\nu-1}(z)$ für alle z längs (*c*) von $z=u$ bis endlich und stetig sein. Ist dies der Fall, so muss weiter auch $f^{\nu-2}(z)$ zugleich mit:

$$\int_{z=u}^{z=x} f^{\nu-1}(z)\,dz = f^{\nu-2}(z) - f^{\nu-2}(u)$$

(*c*) endlich und stetig sein, wenn $f^{\nu-2}(u)$ endlich ist; und so fort.

Etwas spezieller gilt die Formel *A'*) auch, wenn die $(\nu+1)$ Funktionen: $f(z)$, $f'(z)$, $\ldots f^{\nu-1}(z)$, $f^{\nu}(z)$ längs (*c*) endlich und stetig bleiben. Um die Anschauung zu unterstützen, wollen wir uns eine Fläche konstruiren, deren sämmtliche Punkte z den Bedingungen *a*) und *b*) [oder *a'*) und *b*)] genügen, und dieselbe „das *Geltungsgebiet der Formel A'*)" nennen. Zu diesem Ende scheiden wir, wenn $\nu \gtreqless 1$ ist, aus der, der Funktion $f(z)$ adjungirten, Fläche zunächst alle Punkte z aus, in welchen die Funktion $[f^{\nu}(z+h).h]$ *nicht* zugleich mit verschwindet, also für $h=0$ endlich aber von Null verschieden, oder ∞, oder unbestimmt wird; indem wir uneingeschränkt kleine die betreffenden Stellen einschliessende Flächentheile aus der z-Fläche herausschneiden. Wenn $\nu=0$ ist, fällt dies fort, weil in der, der Funktion $f(z)$ adjungirten z-Fläche ohnehin überall: $lim_{h=0}.[f(x+h).h]=0$ ist. Ist dies geschehen, so hat man, falls $\nu \gtreqless 1$ ist, nur noch solche uneingeschränkt kleine Flächentheile der Fläche herauszuschneiden, innerhalb welcher sich etwaige Unstetigkeitsstellen der Funktionen: $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)\ldots f^{\nu-1}(z)$ befinden, um das „*Geltungsgebiet der Formel A'*)" $\gtreqless 1$ zu erhalten. Das Geltungsgebiet der Formel *A'*) für $\nu=0$ ist *identisch* mit der Funktion $f(z)$ adjungirten z-Fläche. Das Gebiet, in welchem die $(\nu+1)$ Funktionen: $f'(z)$, $f''(z)\ldots f^{\nu-1}(z)$, $f^{\nu}(z)$ endlich und stetig sind, ist *ein Theil* des Geltungsgebietes der Formel *A'*), oder fällt ganz mit dem letzteren zusammen. Man erhält es, indem man aus dem Geltungsgebiete von *A'*) *alle* darin etwa noch vorhandenen Unstetigkeitsstellen (1. Art) der Funktion $f^{\nu}(z)$ auf obige Weise ausschliesst.

Die Derivation $\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}$ ist, als Funktion von x aufgefasst, *innerhalb* des Geltungsgebietes der Gleichung *A'*) für alle von ihrem (hier unbeweglich gedachten) Anfangspunkte: u verschiedenen Punkte x endlich und stetig; nur wird ihr Modulus (numerischer Werth) zugleich mit dem Modulus des Integrales im rechten Theile von *A'*), obzwar *endlich* bleibend, doch einem bestimmten Gesetze beliebig gross, sobald sich der variable Punkt x beliebig nahe solche uneingeschränkt kleine Ausschnitte der Fläche heranbewegt, durch welche Unstetigkeitsstellen der Funktion $f^{\nu}(z)$ von der 2. Art [nämlich jene, für welche $lim_{h=0}[f^{\nu}(z+h).h]$ = Null ist] aus der Fläche ausgeschlossen worden sind.

„Alle Unstetigkeitsstellen z der Funktion $f^{\nu}(z)$, für welche: $[f^{\nu}(z+h).h]$ **nicht zugleich** verschwindet, sind also auch **Unstetigkeitsstellen** der allgemein durch die Formel *A*) definirten Derivation." Die Formel *A'*) verräth uns so die Existenz und die Lage dieser Unstetigkeitsstellen der Derivation, obzwar sie an *diesen* Stellen nicht mehr

gilt, aus dem Gesetze, nach welchem sich, *ihr zufolge*, die Derivation in zwar endli uneingeschränkt kleiner Entfernung von derartigen Stellen ändert.

Nehmen wir jetzt an, der Punkt x bewege sich beliebig nahe an den Punk und falle schliesslich mit demselben zusammen.

Es sei das Verhalten der Derivation: $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$ unter dieser Vorausset jeden Werth von ξ zu ermitteln.

Sei zunächst $\xi = p \geqq 0$ eine ganze positive Zahl (mit Einschluss der Null nach A) wegen $\nu = p+1$

$$(8) \qquad \frac{d^p}{dx^p} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\Gamma(-p+p+1)} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} \left\{ \int_{z=u}^{z=x} f(z)\, dz_{(c)} \right\} = f^p(x) \left[\frac{d^0}{dx^0} f(x)_{(c)} \right]$$

identisch mit dem p^{ten} gewöhnlichen Differentialquotienten der Funktion $f(x)$ oberen Grenze x; die Derivation hängt in diesem Falle weder von dem Derivati noch von dem Anfangspunkte u desselben ab. Für $x = u$ wird

$$\Big/_{x=u} \frac{d^p}{dx^p} f(x)_{(c)} = f^p(u) \qquad (p = 0, +1, +2, +3 \ldots.)$$

Es sei nunmehr der reelle Theil von ξ kleiner als $-$, oder gleich -1 [I $\xi \leqq -1$], sonst aber ξ ganz beliebig. Hier ist $\nu = 0$,

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\, dz}{(x-z)^{\xi+1}},$$

die Derivation verschwindet also zugleich mit $x-u$:

$$\Big/_{x=u} \left\{ \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} \right\} = 0, \quad \text{pars real. } \xi \leqq -1.$$

Dasselbe ist auch für $-1 <$ pars real. $\xi < 0$, $\nu = 1$,

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = \frac{f(u)(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\xi+1)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f'(z)\,(dz)}{(x-z)^{-\xi}_{(c)}}$$

[siehe A')] der Fall, in dem rechter Hand sowohl das Integral, als auch das ausserh selben stehende Glied zugleich mit $x-u$ verschwinden:

$$\Big/_{x=u} \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = 0, \qquad (-1 < \text{pars real. } \xi < 0).$$

Doch setzt dies voraus, dass die Punkte x und u innerhalb des Geltungsgebi Formel A') für $\nu = 1$ liegen, o. m. a. W. dass in der Nähe des Punktes u die bei geführten Bedingungen a') und b) für $\nu = 1$ erfüllt sind. „Es muss daher $f(u)$ end $lim_{h=0} \cdot [f'(u+h)\, h] = 0$ sein."

Die obige Formel für die Derivation $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$ gilt auch noch, wenn de Theil von ξ verschwindet, ohne dass ξ selbst $= 0$ wird. Sie lehrt, dass die Derivatic diesen Umständen zwar endlich bleibt, jedoch nach einem bestimmten Gesetze hin

nkt, während sich der Punkt x dem Punkte u uneingeschränkt nähert, um schliesslich Zusammenfallen dieser Punkte unbestimmt zu werden.

Sei endlich $\nu - 2 <$ pars real. $\xi \leqq \nu - 1$, pars real. $(\xi + 1) \leqq \nu$, und $\nu \geqq 2$. Die l A') belehrt uns, dass die Derivation in diesem Falle innerhalb ihres Geltungsgebietes *ann* zugleich mit $x - u$ verschwinden kann, wenn

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{\nu-2}(u) = 0$$

jedem anderen Falle dagegen ∞ wird. Ganze positive Werthe des Index: $\xi = \nu - 1 = p$ en hier ausser Betracht, weil das Verhalten der Derivation für derartige Werthe des bereits oben erörtert wurde.

Das Geltungsgebiet der Gleichung A') ist offenbar zugleich jenes Gebiet, welches man renzpunkten u, x und den sie verbindenden Derivationswegen als „Ort" zuweisen muss, die Derivation $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$ rechnungsmässige verwendbare Werthe erhalten soll. Es soll lb in der Folge das „Brauchbarkeitsgebiet der Derivation $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$" genannt werden.

Nro. II.

Die für geradlinige Derivationen von Summen, von Differenzen, sowie von Producten Constanten mit einer Funktion geltenden Sätze (siehe Schlöm. J. XII. Bd. Seite 461) n, wie ein Blick auf die Gleichung A) lehrt, unverändert auch für krummlinige Deri- en bestehen; d. h. es ist auch für krumme Wege (c):

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}[\varphi(x) \pm \psi(x)_{(c)}] = \frac{d^\xi}{dx^\xi}\varphi(x)_{(c)} + \frac{d^\xi}{dx^\xi}\psi(x)_{(c)},$$

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots]_{(c)} = \frac{d^\xi}{dx^\xi}\varphi_1(x)_{(c)} + \frac{d^\xi}{dx^\xi}\varphi_2(x)_{(c)} + \frac{d^\xi}{dx^\xi}\varphi_3(x)_{(c)} + \ldots.$$

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}[C \cdot F(x)]_{(c)} = C \cdot \frac{d^\xi}{dx^\xi}F(x)_{(c)},$$

$x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)\ldots$, $\psi(x)$, $F(x)$ beliebige Funktionen bezeichnen, und C eine rliche Constante vorstellt.

Um zu ermitteln, welche Modifikationen der für *geradlinige* Derivationen von Pro- zweier Funktionen geltende Satz (siehe Schlöm. J. XII. Bd. Seite 466, unter III.) bei ein definirten krummlinigen Derivationen erleidet, *unterwerfen wir den Ausdruck:*

$$R(u, x, \xi, n) \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi}[f(x) \cdot \varphi(x)]_{(c)} - \varphi(x) \cdot \frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)} - (\xi_1)\varphi'(x)\frac{d^{\xi-1}}{dx^{\xi-1}}f(x)_{(c)} -$$

$$- (\xi_2)\varphi''(x) \cdot \frac{d^{\xi-2}}{dx^{\xi-2}}f(x)_{(c)} - \ldots - (\xi_n)\varphi^n(x) \cdot \frac{d^{\xi-n}}{dx^{\xi-n}}f(x)_{(c)},$$

chem *sämmtliche* Derivationen über den, von dem laufenden Punkte x beschriebenen n dem Punkte $x = u$ bis zum Punkte $x = x$ führenden Weg auszudehnen sind, *einer den Untersuchung.*

Wir nehmen vorläufig an, es sei der reelle Theil von ξ kleiner als —, höchstens gleich -1, also pars real. $(\xi+1)\leqq 0$, pars real. $(\xi-r+1)<0$ für $r=1, 2, 3, \ldots$ Für *jede* der unter 9) vorkommenden Derivationen ist dann der reelle Theil des um ν mehrten Index *kleiner* als Null; jede derselben ist nach der Definitionsgleichung *A*) ($\nu=0$) ganz allgemein durch ein *einfaches* bestimmtes Integral darstellbar. Es ist:

$$(10)\quad \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}}[f(x)\,.\,\varphi(x)]_{(c)} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,.\,\varphi(z)}{(x-z)^{\xi+1}}\,dz_{(c)}\,;\quad lim_{h=0}\,.\,[f(z+h)\,\varphi(z+h)\,.$$

$$\text{und}\quad \frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}}f(x)_{(c)} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\xi+r)}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-r+1}}\,;\quad lim_{h=0}\,[f(z+h)\,.\,h]=.$$

Wir multipliciren die letztere Gleichung mit $-(\xi_r)\,.\,\varphi^r(x)$, summiren dann über r von $r=0, 1, 2, 3 \ldots$ bis $r=n$, und addiren die so erhaltene Gleichung:

$$-\Sigma_{r=0}^{r=n}(\xi_r)\,\varphi^r(x)\,.\,\frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}}f(x)_{(c)} \equiv \frac{-1}{\Gamma(-\xi)}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+1}}\,.\,\Sigma_{r=0}^{r=n}\varphi^r(x)\,\frac{(z-x)^r}{r!}$$

zur ersten Gleichung unter (10) hinzu.

Dadurch entsteht mit Rücksicht auf (9) die Identität:

$$(11)\qquad R(u,x,\xi,n) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+1}}\left\{\varphi(z)-\Sigma_{r=0}^{r=n}\varphi^r(x)\,\frac{(z-x)^r}{r!}\right\}_{(c)}.$$

Der rechts unter dem krummlinigen Integrale auftretende Klammerausdruck strebt nun einem bestimmten Grenzwerthe: der Null zu, *sobald* wir die *endliche* positive ganze Zahl n *uneingeschränkt* wachsen lassen, wenn die Funktionen: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)\ldots\varphi^n(x)$ längs der Curve (c) vom Punkte $x=u$ bis zum Punkte $x=x$ endlich und stetig bleiben. Daher kann sich auch $R(u,x,\xi,n)$ nur unter der nämlichen Bedingung einem bestimmten Werthe, nämlich der *Null*, als Grenze nähern.

Auf Grund dieser Erwägung setzen wir für das Folgende fest, dass die Funktion $\varphi(x)$ und alle aufeinanderfolgenden Ableitungen derselben: $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)\ldots\varphi^n(x)$ endlich und stetig bleiben sollen, während der Punkt x die Curve (c) vom Punkte $x=u$ zum Punkte $x=x$ durchläuft.

Dies vorausgesetzt, lässt sich der oben erwähnte Klammerausdruck auf bestimmte Art durch ein einfaches Integral darstellen.

Man findet nämlich, wenn man die Identität:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left\{\varphi(z)-\Sigma_{r=0}^{r=n}\varphi^r(w)\,\frac{(z-w)^r}{r!}\right\} \equiv -\frac{1}{n!}\,\varphi^{n+1}(w)\,(z-w)^n\,dw \quad (n\gtrless 0)$$

in Bezug auf den von den Punkten z und x unabhängig veränderlichen Punkt w längs der Curve (c) vom Punkte $w=z$ bis zum Punkte $w=x$ integrirt:

$$\varphi(z)-\Sigma_{r=0}^{r=n}\frac{\varphi^r(x)\,(z-x)^r}{r!} \equiv \varphi(z)-\varphi(x)-\varphi'(x)\,(z-x)-\varphi''(x)\,\frac{(z-x)^2}{2!}-$$

$$\ldots-\varphi^n(x)\,\frac{(z-x)^n}{n!} \equiv -\int_{w=z}^{w=x}\varphi^{n+1}(w)\,\frac{(z-w)^n}{n!}\,dw_{(c)} \qquad (n\gtrless 0).$$

Indem wir nun dieses Integral statt des obigen Klammerausdruckes in die Gleichung
stituiren, nimmt die letztere die Gestalt:

$$R(u,x,\xi,n) \equiv \frac{-1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+1}} \left\{ \int_{w=z}^{w=x} \varphi^{n+1}(w) \frac{(z-w)^n}{n!}\, dw_{(c)} \right\}_{(c)}$$

$\{$pars real. $\xi \leqq -1$; $n \gtrless 0$; $lim_{h=0} . [f(z+h) . h] = 0$ längs : $(c)\}$

Isst man hier n uneingeschränkt wachsen, und geht zur Grenze über, so erhält
gen

$$lim_{n=\infty} \int_{w=z}^{w=x} \varphi^{n+1}(w) \frac{(z-w)^n}{n!}\, dw_{(c)} = 0:$$

$lim_{n=\infty} . R(u,x,\xi,n) = 0$, pars real. $\xi \leqq -1$; $lim_{h=0} . [f(z+h) . h] = 0$.

Von nun an lassen wir die Voraussetzung: pars real. $\xi \leqq -1$ fallen, und sehen ξ i
beliebige endliche Grösse an, deren reeller Theil zwischen zwei beliebigen auf-
folgenden ganzen Zahlen: $\mathfrak{n}-1$ und $\mathfrak{n}\ldots(\mathfrak{n}=0,1,2,\ldots)$ liegen mag, falls er nicht
grösseren von beiden zusammenfällt:

$\mathfrak{n}-1 <$ pars real. $\xi \leqq \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}=0,1,2,3\ldots.$

Durch eine Rechnung, welche völlig mit der auf Seite 464 unserer öfters citirten
ung [unter b)] geführten übereinstimmt, nur dass überall an Stelle des geradlinigen
onsweges der krummlinige, über die Curve (c) von $x=u$ bis $x=x$ gehende zu
st, erhalten wir

$$R(u,x,\xi+1,n) = \frac{\partial}{\partial x} R(u,x,\xi,n) + (\xi_n)\, \varphi^{n+1}(x) \,.\, \frac{d^{\xi-n}}{dx^{\xi-n}} f(x)_{(c)} \text{ *)}$$

Denken wir uns hier $n \gtrless \mathfrak{n}+1$; also pars real. $(\xi-n) < -1$. Dann ist nach
ig A) (wenn dort $\xi-n$ für ξ und zugleich $\nu=0$ gesetzt wird):

$$(\xi_n) \frac{d^{\xi-n}}{dx^{\xi-n}} f(x)_{(c)} = (\xi_n) \frac{1}{\Gamma(-\xi+n)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-n+1}_{(c)}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-n+1}_{(c)}},$$

können die obige Gleichung in der Form

$$(u,x,\xi+1,n) = \frac{\partial}{\partial x} R(u,x,\xi,n) + \frac{(-1)^n \,.\, \varphi^{n+1}(x)}{n!\,\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-n+1}_{(c)}}$$

$\{\mathfrak{n}-1 <$ pars real. $\xi < \mathfrak{n} < n\}$

hreiben. Jetzt erkennt man sofort, dass das zweite Glied im rechten Theile der letz-
eichung bei uneingeschränkt wachsendem n gegen die Null konvergirt, dass also ganz
n für jedes endliche ξ

*) *Anmerkung.* Bei der Ableitung der Gleichung (13) durch partielle Dffierentiation der Gleichung (9)
mmt nur der auch für krummlinige Derivationen geltende, sich sofort aus der Gleichung A) mittels
tion nach x ergebende *Satz:* „Eine beliebige Derivation wird nach ihrer variablen Obergrenze x
t (d. h. ihr Differentialquotient nach x wird gebildet), indem man ihren Index um eine Einheit
zur Anwendung. Man vergleiche diessbezüglich die nächste Nummer, unter E).

(14) $$lim_{n=\infty} . R(u, x, \xi + 1, n) = \frac{\partial}{\partial x} [lim_{n=\infty} . R(u, x, \xi, n)]$$

ist. Hat man für irgend ein ξ gefunden, dass $lim_{n=\infty} . R(u, x, \xi, n) = 0$ wird, so wi

$lim_{n=\infty} . R(u, x, \xi + 1, n) = \frac{\partial}{\partial x} [lim . R(u, x, \xi, n)] = \frac{\partial}{\partial x} (0) = 0$, d. h. $lim_{n=\infty} . R(u$

verschwindet auch noch, wenn man statt ξ: $\xi + 1$ setzt. Nun ist aber bewiesen word
$lim_{n=\infty} . R(u, x, \xi, n)$ für jedes ξ, dessen reeller Theil $\leqq -1$ ist, verschwindet, w
Funktion $f(z)$ für alle Punkte z der Curve (c) der Bedingung $lim_{h=0} . [f(z + h) .$
genügt; also verschwindet dieser Grenzwerth unter der nämlichen Bedingung auch für s
deren reeller Theil $\leqq 0$, daher auch für solche, deren reeller Theil $\leqq 1$, $\leqq 2 \ldots .$ is
er verschwindet für **jedes** ξ.

„Es ist also ganz allgemein

(15) $$lim_{n=\infty} . R(u, x, \xi, n) = 0$$

wenn die Funktionen: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x) \ldots .$ endlich und stetig bleiben
Funktion $[f(x + h) . h]$ mit h zugleich verschwindet, während der variable Punkt
Derivationsweg (c) vom Punkte $x = u$ bis zum Punkte $x = x$ durchläuft."

Wir wollen jetzt noch zeigen, dass die Gleichung (12) unter den bei der Gl
(15) angeführten Bedingungen nicht blos für solche ξ, deren reeller Theil $\leqq -1$,
für beliebige endliche ξ gilt, wenn nur die endliche positive ganze Zahl n hinreichen
nämlich grösser als der reelle Theil von ξ, angenommen wird. Wir brauchen nur zu
dass die Gleichung (12), wenn sie für irgend ein ξ stattfindet, auch noch bestehe
wenn ξ durch $\xi + 1$ ersetzt wird.

Wir schreiben die Gleichung (12), indem wir zur Abkürzung

a) $$\frac{-1}{n!\,\Gamma(-\xi)} \cdot \frac{f(z)}{(x-z)^{\xi+1}} \int_{w=z}^{w=x} \varphi^{n+1}(w)\,(z-w)^n\,dw_{(c)} \equiv \Phi(x, z)$$

setzen, in der Form

$$R(u, x, \xi, n) = \int_{x=u}^{z=x} \Phi(x, z)\,dz,$$

differentiiren sie partiell nach x, und zeigen, dass in der so entstehenden Gleichung:

b) $$\frac{\partial}{\partial x} R(u, x, \xi, n) = \Phi(x, x) + \int_{z=u}^{z=x} \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} \cdot dz$$

das erste Glied des rechten Theiles: $\Phi(x, x) = 0$ sein muss.

In der That, setzen wir in der Gleichung *a)*, welche die Funktion $\Phi(x, z)$
$z = x + \delta$, wo δ eine uneingeschränkt kleine Grösse und $x + \delta$ ein auf der Curve
gender, dem Punkte x uneingeschränkt naher Punkt sein soll, so erhalten wir:

$$\Phi(x, x+\delta) \equiv \frac{-1}{n!\,\Gamma(-\xi)} \cdot \frac{f(x+\delta)}{(-\delta)^{\xi+1}} \int_{w=x+\delta}^{w=x} \varphi^{n+1}(w)\,(x+\delta-w)^n\,dw_{(c)},$$

wo das rechtsstehende Integral wegen der uneingeschränkt grossen Nähe der Punkte x
mit einem uneingeschränkt *kleinen* Fehler als geradlinig angesehen und mittels der
tution: $w = x + \vartheta . \delta$, $dw = \delta \times d\vartheta$ in das Integral

$$\vartheta = 1$$
$$- \delta^{n+1} \int_{\vartheta = 0} \varphi^{n+1}(x + \vartheta \,.\, \delta)\,(1 - \vartheta)^n \, d\vartheta$$

ndelt werden kann. In der so auf die Form

$$(x, x + \delta) = - \frac{(-1)^{-\xi}}{n!\ \Gamma(-\xi)} \cdot [f(x + \delta) \,.\, \delta] \,.\, \delta^{n-\xi-1} \int_{\vartheta = 0}^{\vartheta = 1} \varphi^{n+1}(x + \vartheta \,.\, \delta)\,(1 - \vartheta)^n \,.\, d\vartheta$$

hten Gleichung verschwindet: $[f(x + \delta) \,.\, \delta]$, in Folge der *bestehenden* Bedingung: $_0 \cdot [f(x + h) \,.\, h] = 0$, mit δ zugleich; auch $\delta^{n-\xi-1}$ wird mit δ zugleich verschwin- wenn nur n *grösser* als der reelle Theil von $(\xi + 1)$ angenommen wird. Es ist also h mit Rücksicht auf die Endlichkeit der reciproken Gammafunktion: $\frac{1}{\Gamma(-\xi)}$ und tegrales:

$$\Phi(x, x) = lim_{\delta = 0} \,.\, \Phi(x,\ x + \delta) = 0,$$

nur, falls n hinreichend gross, und zwar:

$$n > \text{pars real. } (\xi + 1)$$

mmen wird.

Es ist also [siehe Gleichung *b*)]

$$\frac{\partial}{\partial x} R(u, x, \xi + 1, n) = \int_{z=u}^{z=x} \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} \,.\, dz_{(c)}, \quad n > \text{pars real. } (\xi + 1),$$

noch [siehe Gleichung *a*)]

$$\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} = \frac{-1}{n!\,\Gamma(-\xi - 1)} \cdot \frac{f(z)}{(x - z)^{\xi + 2}} \int_{w=z}^{w=z} \varphi^{n+1}(w)\,(z - w)^n \,.\, dw_{(c)}$$
$$- \frac{1}{n!\ \Gamma(-\xi)} \cdot \frac{f(z)}{(x - z)^{\xi + 1}} \,.\, \varphi^{n+1}(x)\,(z - x)^n$$

tzen ist.

Dies gibt:

$$- R(u, x, \xi, n) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-1}{n!\,\Gamma(-\xi - 1)} \displaystyle\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x - z)^{\xi + 2}} \left[\int_{w=z}^{w=x} \varphi^{n+1}(w)\,(z - w)^n \, dw_{(c)} \right]_{(c)} \\ \qquad - \dfrac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(-\xi)} \cdot \varphi^{n+1}(x) \cdot \displaystyle\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x - z)^{\xi - n + 1}} \end{array} \right\}_{(c)}$$

it Rücksicht auf (13α) für $n >$ pars real. $(\xi + 1)$:

$$(u, x, \xi + 1, n) = \frac{-1}{n!\,\Gamma(-\xi - 1)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x - z)^{\xi + 2}} \left\{ \int_{w=u}^{w=x} \varphi^{n+1}(w)\,(z - w)^n \, dw_{(c)} \right\}_{(c)}.$$

Dieselbe Gleichung erhält man aber auch, wenn man die Grösse ξ in der, für irgend ls *erwiesen* angenommenen Gleichung (12) durch $(\xi + 1)$ ersetzt.

Die Giltigkeit der Gleichung:

$$R(u, x, \xi, n) = \frac{-1}{n!\ \Gamma(-\xi)} \int_{z=n}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x - z)^{\xi + 1}} \left\{ \int_{w=z}^{w=x} \varphi^{n+1}(w)\,(z - w)^n \, dw_{(c)} \right\}_{(c)}$$

für beliebige endliche ξ, hinreichend grosse n: $n >$ pars real. (ξ) und $lim_{h=0} . [f(z+h)$ längs (c) ist damit bewiesen.

Fassen wir schliesslich alles zusammen, was wir bisher gefunden haben, so wir den nachstehenden bemerkenswerthen Satz:

C) „Die krummlinige über die Curve (c) vom Punkte $x = u$ bis zum Punkt ausgedehnte Derivation: $\frac{d^\xi}{dx^\xi}[f(x) . \varphi(x)]_{(c)}$ kann mittels der unendlichen Reihe

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}[f(x) . \varphi(x)]_{(c)} = \varphi(x) . \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} + (\xi_1)\, \varphi'(x) . \frac{d^{\xi-1}}{dx^{\xi-1}} f(x)_{(c)}$$

$$+ (\xi_2)\, \varphi''(x) . \frac{d^{\xi-2}}{dx^{\xi-2}} f(x)_{(c)} + \ldots + (\xi_r)\, \varphi^r(x) . \frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}} f(x)_{(c)} + \text{in infinitum}$$

berechnet werden, wenn für jeden Punkt z der Curve (c) (vom Punkte: $z = u$ s Punkte $z = x$)

$$lim_{h=0} . [f(z+h) . h] = 0,$$

und ausserdem die Funktionen: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi'''(x)$, $\varphi'''(x) \ldots$ längs dem Derivati endlich und stetig sind.

Bricht man die Rechnung *mit* dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede:

$$(\xi_n)\, \varphi^n(x) . \frac{d^{\xi-n}}{dx^{\xi-n}} f(x)_{(c)}$$

ab, und ist $n >$ pars real. ξ, so beträgt der **Rest** der Reihe:

$$R = \frac{-1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{\varrho . f(z)\, dz}{(x-z)^{\xi+1}_{(c)}}$$

worin ϱ das Integral:

$$\varrho = \int_{w=z}^{w=x} \varphi^{n+1}(w) \frac{(z-w)^n}{n!}\, dw_{(c)}$$

bedeutet."

Nro. III.

Der partielle Differentialquotient einer beliebigen krummlinigen Derivation na unteren Grenzpunkte („Anfangspunkte") u, falls der letztere als ein von dem oberer punkte („Endpunkte") x unabhängig veränderlicher Punkt aufgefasst wird, ergibt sic durch die bezügliche Differentiation aus der Definitionsgleichung *A)*:

$$D) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\} = \frac{-f(u)}{\Gamma(-\xi)(x-u)^{\xi+1}},$$

ganz so wie bei geradlinigen Derivationen.

Die p-malige Differentiation krummliniger Derivationen nach dem variabl punkte x erfolgt, wie bei geradlinigen, ganz allgemein nach dem Satze:

„Der p^{te} gewöhnliche Differentialquotient einer allgemein definirten krumm Derivation nach ihrem, als unabhängig variabel aufgefassten, Endpunkte (x) wird

e man einfach den Index der Derivation um den Index (p) des gewöhnlichen Differential-
nten vermehrt:

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\} = \frac{d^{\xi+p}}{dx^{\xi+p}} f(x)_{(c)}.$$

In der That, es ist einerseits, wenn man die allgemeine Definitionsgleichung *A*) nach x differentiirt:

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\} = \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \cdot \frac{d^{\nu+p}}{dx^{\nu+p}}\left\{\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}}_{(c)}\right\},$$

nderererseits, wenn man in *A*) $\xi+p$ statt ξ, und zugleich [wegen pars real. $(\xi+p+1)$ $-p]$ $\nu+p$ statt ν setzt:

$$\frac{d^{\xi+p}}{dx^{\xi+p}} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \frac{d^{\nu+p}}{dx^{\nu+p}}\left\{\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}}_{(c)}\right\},$$

e *etc.*

Wie bei geradlinigen Derivationen, ist auch bei *krummlinigen* die Reihenfolge *nicht* ;iltig, in welcher ein gewöhnlicher, etwa p^{ter}, und ein begrenzter, nicht gewöhnlicher, e ntialquotient nach einander von derselben Funktion genommen werden; durch eine schung der Derivationsfolge ändert sich nämlich der betreffende Ausdruck um eine *tvische* Funktion des variablen Endpunktes der begrenzten Derivation.

Um dies zu beweisen, setzen wir in der durch p-malige *theilweise* Integration längs irve (c) entstehenden Gleichung

$$\int_{z=u}^{z=x} \varphi^p(z)\,dz_{(c)} = \int_{z=u}^{z=x} \{f(z)\,\varphi^{p-1}(z) - f'(z)\,\varphi^{p-2}(z) + f''(z)\,\varphi^{p-3}(z) - \ldots + (-1)^{p-1} \cdot f^{(p-1)}(z)\,\varphi(z)\}$$

$$+ (-1)^p \int_{z=u}^{z=x} f^p(z) \cdot \varphi(z)\,dz_{(c)}$$

Nr. I. die Gleichung 6)], welche nur so lange brauchbar ist, als *längs* (c) sowohl $\cdot [f^p(z+h) \cdot \varphi(z+h) \cdot h] = 0$ ist als auch jede der p Funktionen:

$$f(z) \cdot \varphi^{p-1}(z),\ f'(z) \cdot \varphi^{p-2}(z),\ f''(z) \cdot \varphi^{p-3}(z), \ldots,\ f^{p-1}(z)\,\varphi(z)$$

und stetig bleibt, speziell:

$$\varphi(z) = \frac{(x-z)^{-\xi+\nu+p-1}}{\Gamma(-\xi+\nu+p)},\ \text{also}\ \varphi'(z) = -\frac{(x-z)^{-\xi+\nu+p-2}}{\Gamma(-\xi+\nu+p-1)},$$

$$\varphi''(z) = +\frac{(x-z)^{-\xi+\nu+p-3}}{\Gamma(-\xi+\nu+p-2)}, \ldots\ \varphi^p(z) = (-1)^p \frac{(x-z)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)},$$

lieselbe Bedeutung wie in der Gleichung *A*) hat. Die Giltigkeitsbedingungen lassen i diesem Falle wegen der Endlichkeit und Stetigkeit der Funktionen:

$$\varphi(z),\ \varphi'(z),\ \varphi''(z) \ldots\ \varphi^p(z)$$

reinfachen. Dieselben reduciren sich nämlich auf die nachstehenden Bestimmungen:

α) die Funktion $[f^p(z+h) \cdot h]$ muss längs (c), vom Punkte $z=u$ bis zum Punkte mit h zugleich verschwinden, und

β) die Funktionen $f(z),\ f'(z),\ f''(z) \ldots f^{p-1}(z)$ müssen längs der nämlichen Curve und stetig sein.

Dies vorausgesetzt, ist:

$$\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,.\,(x-z)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,dz_{(c)} = \int_{z=u}^{z=x} f^p(z)\,.\,\frac{(x-z)^{-\xi+\nu+p-1}}{\Gamma(-\xi+\nu+p)}\,dz_{(c)}$$

$$+\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu}}{\Gamma(-\xi+\nu+1)}+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu+1}}{\Gamma(-\xi+\nu+2)}+\ldots+\frac{f^{p-1}(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu+}}{\Gamma(-\xi+\nu+}$$

Wir differentiiren die vorliegende Gleichung p-mal nach der oberen Grenze wir im linken Theile die Differentiationen nur *anzeigen*, während wir sie an dem rechter Hand anstandslos vollziehen, weil dieses Integral selbst dann noch endlich *würde*, wenn wir die Funktion unter dem Integralzeichen $(p+1)$-mal nach x tiiren würden.

Wir erhalten mit Rücksicht auf die Ungleichheit: *pars real.* $(\xi+1)<\nu$ nach einfachen Reductionen:

$$\frac{d^p}{dx^p}\int_{z=u}^{z=x} f(x)\,.\,\frac{(x-z)^{-\xi+\nu+1}}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,.\,dz_{(c)} = \int_{z=u}^{z=x} f^p(z)\,\frac{(x-z)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,dz_{(c)}$$

$$+\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi-p+\nu}}{\Gamma(-\xi-p+\nu+1)}+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi-p+\nu+1}}{\Gamma(-\xi-p+\nu+2)}+\ldots+\frac{f^{p-1}(u)\,(x-u)^{-\xi+}}{\Gamma(-\xi+}$$

mithin, indem wir noch ν-mal nach x differentiiren, die Differentiationen aber *bei d gralen* nur *anzeigen*:

$$(17)\quad \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,\frac{d^{p+\nu}}{dx^{p+\nu}}\left\{\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}_{(c)}}\right\} = \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left\{\int_{z=u}^{z=x}\frac{f^p(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+}}\right.$$

$$+\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi-p}}{\Gamma(-\xi-p+1)}+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi-p+1}}{\Gamma(-\xi-p+2)}+\ldots+\frac{f^{p-1}(u)\,(x-u)^{-\xi-}}{\Gamma(-\xi)}$$

[Siehe die Bedingungen unter α), β).]

Es ist aber kraft der Definitionsgleichung A), wenn wir darin das *eine Ma* statt ξ, also zugleich $\nu+p$ statt ν; ein *anderes Mal* bloss $f^p(z)$ für $f(z)$ schreiben

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,\frac{d^{p+\nu}}{dx^{p+\nu}}\left\{\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}_{(c)}}\right\} = \frac{d^{\xi+p}}{dx^{\xi+p}}f(x)_{(c)} = \frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}\right\}$$

$$\text{und}\quad \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)}\,.\,\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left\{\int_{z=u}^{z=x}\frac{f^p(z)\,dz)}{(x-z)^{\xi-\nu+1}_{(c)}}\right\} \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi}\left\{\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right\}_{(c)},$$

folglich ist nach (17):

$$F)\quad \frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}\right\} = \frac{d^{\xi+p}}{dx^{\xi+p}}f(x)_{(c)} = \frac{d^\xi}{dx^\xi}\left\{\frac{d^p}{dx^p}f(x)\right\}_{(c)} + \frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi-}}{\Gamma(-\xi-p+1}$$

$$+\frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi-p+1}}{\Gamma(-\xi-p+2)}+\frac{f''(u)\,(x-u)^{-\xi-p+2}}{\Gamma(-\xi-p+3)}+\ldots+\frac{f^{p-1}(u)\,(x-u)^{-}}{\Gamma(-\xi)}$$

vorausgesetzt, dass 1. die Funktion: $[f^p(x+h)\,.\,h]$ mit h zugleich verschwindet, ud serdem 2. die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots f^{p-1}(x)$ endlich und stetig bleiben, il der variable Endpunkt x der obigen Derivationen den Derivationsweg (c) vom Punkt x bis zum Punkte $x=x$ durchläuft.

Die hier unter 2. angeführte Bedingung kann übrigens durch die einfachere ersetzt
n 2′. „dass die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ .... $f^{\varrho-1}(x)$ **im Anfangspunkte** des
ationsweges d. h. für $x = u$ endlich sein müssen". (Man vergleiche damit die in Betreff
edingungen der Gleichung A') in Nr. I. gemachten Bemerkungen!)

Wir stellen uns nunmehr die Aufgabe, von einer beliebigen ξ^{ten} krummlinigen Deri-
, welche bestimmten Sinn hat, deren Funktion $f(x)$, also längs dem Derivationswege (c)
nfangspunkte $x = u$ bis zum Endpunkte $x = x$ der Bedingung $lim_{h=0} . f(x+h) . h = 0$
t, eine beliebige η^{te} über den nämlichen Weg ausgedehnte Derivation nach der unab-
veränderlichen Obergrenze x zu nehmen.

Wir setzen die gegebene ξ^{te} Derivation als eine Funktion der oberen Grenze x und
arameter u (untere Grenze) und ξ (Index):

$$\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} \equiv F(x, u, \xi),$$

rfüllen die obige Bedingung dadurch, dass wir den Punkten x, u, sowie dem sie ver-
iden Derivationswege (c) die der Funktion $f(z)$ adjungirte einfach-zusammenhängende
he (siehe Nr. I.): „$\mathfrak{F}$" als Ort zuweisen; wodurch wir ausserdem noch die Unabhängig-
ler Derivation vom Wege (c) erzielen, ohne der Allgemeinheit der Betrachtungen
ch zu thun. Zugleich nehmen wir an, dass *keiner* der Indices: ξ, η eine positive ganze
mit Einschluss der Null) sei, weil die durch diese Bestimmung ausgeschlossenen Fälle
durch die Formeln unter E) und F) ihre Erledigung gefunden haben.

Es ist nämlich nach E):

$$\frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}} \left\{ \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} \right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)},$$

ξ beliebig, η jedoch eine ganze positive Zahl (mit Einschluss der Null) ist; und nach
enn dort η für ξ, und ξ für p geschrieben wird)

$$\left\{ \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} \right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)} - \frac{f(u)(x-u)^{-\xi-\eta}}{\Gamma(-\xi-\eta+1)} - \frac{f'(u)(x-u)^{-\xi-\eta+1}}{\Gamma(-\xi-\eta+2)}$$
$$- \frac{f''(u)(x-u)^{-\xi-\eta+2}}{\Gamma(-\xi-\eta+2)} - \ldots - \frac{f^{\xi-1}(u)(x-u)^{-\eta-1}}{\Gamma(-\eta)}$$

ξ ganz positiv; η *beliebig*; $lim_{h=0} . [f^{\xi}(x+h) . h] = 0$ längs (c);
$f(u), f'(u), f''(u) \ldots f^{\xi-1}u$: endliche Grössen.

Eine mit der Gleichung (19) gleichlautende Relation:

$$\frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}} \left\{ \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} \right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

et im letzteren Falle (ξ ganz positiv) nur dann, wenn $f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots$
$(u) = 0$, und $lim_{h=0} . f^{\xi}(x+h) . h = 0$ längs (c) ist.

Dies vorausgeschickt, sei bis auf Weiteres pars real. $\xi \leqq -1$, pars real. $\eta \leqq -1$;
hl, als auch η seien aber sonst beliebige (im Allgemeinen complexe) Grössen; ferner
die Differenz

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)} \equiv \Delta(x, u, \xi, \eta) \tag{21}$$

gesetzt.

Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem sich diese Differenz Δ zugleich ändert, denken wir uns den gemeinsammen Anfangspunkt u der hier vorkon Derivationen unabhängig von x, ξ, η beweglich; so zwar, dass derselbe den Derivation von seinem anfänglichen Ort an bis zur Obergrenze x durchlaufen kann, währ letztere und die Indices ξ, η ungeändert gelassen werden; und differentiiren die Differenz partiell nach u.

Es ist wegen

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\} \equiv \frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x, u, \xi)_{(c)} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_{w=u}^{w=x} \frac{F(w, u, \xi)}{(x-w)^{\eta+1}}\, dw_{(c}$$

[siehe A) in Nr. I., wenn daselbst η statt ξ, w statt z, $F(x, u, \xi)$ statt $f(x)$ geschrie wegen pars real. $\eta \leqq -1$: $\nu = 0$ gesetzt wird]

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x, u, \xi)_{(c)}\right\} = -\frac{1}{\Gamma(-\eta)} \cdot \frac{F(u, u, \xi)}{(x-u)^{\eta+1}}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_{w=u}^{w=x} (x-w)^{-\eta-1} \cdot \frac{\partial}{\partial u} F(w, u, \xi)\, .\, dw$$

oder wenn man berücksichtigt, dass *hier:*

$$F(w, u, \xi) \equiv \frac{d^\xi}{dw^\xi} f(w)_{(c)} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=w} \frac{f(z)\, dz}{(w-z)^{\xi+1}_{(c)}},$$

also

$$\frac{\partial}{\partial u} F(w, u, \xi) = -\frac{1}{\Gamma(-\xi)} \cdot \frac{f(u)}{(w-u)^{\xi+1}},$$

und $F(u, u, \xi) = 0$ (pars real. $\xi \leqq -1$!) ist:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x, u, \xi)_{(c)}\right\} = \frac{-f(u)}{\Gamma(-\xi)\,\Gamma(-\eta)} \int_{w=u}^{w=x} (w-u)^{-\xi-1} (x-w)^{-\eta-1}\, dw_{(}$$

Die Funktion: $(w-u)^{-\xi-1}(x-w)^{-\eta-1}$ rechts unter dem Integralzeic unter den bestehenden Voraussetzungen: pars real. $(\xi) \leqq -1$, pars real. $(\eta) \leqq -1$ endlichen Punkte w der, der Integrationsvariabeln w zugewiesenen, Bildebene *endli stetig*; das Integral behält also seinen Werth unverändert bei, wenn man an Stelle des k Weges (c) der Variablen w den *geradlinigen* direkt vom Punkte $w = u$ nach dem $w = x$ führenden Weg (g) treten lässt. In dem so *geradlinig* gemachten Integrale wir mittels der Substitution: $w = u + \vartheta(x-u)$, $dw = (x-u)\,.\,d\vartheta$ die neue Vari mithin statt des geradlinigen Weges (g) des Punktes w den ebenfalls geradlinige längs der reellen Zahlenlinie vom Punkte $\vartheta = 0$ bis zum Punkte $\vartheta = 1$ gehenden W Punktes ϑ ein, und bekommen so:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x, u, \xi)_{(c)}\right\} = -\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi-\eta-1}}{\Gamma(-\xi)\,.\,\Gamma(-\eta)} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=1} \vartheta^{(-\xi)-1}\,(1-\vartheta)^{(-\eta)-}$$

da bekanntlich (wegen pars real. $[-\xi)>0$, pars real. $(-\eta)>0$]

$$\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=1} \vartheta^{(-\xi)-1}(1-\vartheta)^{(-\eta)-1}\,.\,d\vartheta = \frac{\Gamma(-\xi)\,.\,\Gamma(-\eta)}{\Gamma[(-\xi)+(-\eta)]} \text{ ist:}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x,u,\xi)_{(c)}\right\} = -\frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi-\eta-1}}{\Gamma(-\xi-\eta)}.$$

Nun ist aber auch [siehe die Definitionsgleichung *A*) in Nr. I., wenn dort $\xi+\eta$ ξ geschrieben und $\nu=0$ gesetzt wird, weil hier pars real. $(\xi)\leqq -1$, pars real. -1, also um so mehr pars real. $(\xi+\eta+1)<0$ ist]

$$\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\Gamma(-\xi-\eta)}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+\eta+1}},$$

$$\alpha) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}\right\} = \frac{-f(u)\,(x-u)^{-\xi-\eta-1}}{\Gamma(-\xi-\eta)};$$

n erhalten wir, wenn wir die letztere Gleichung von der Gleichung (22) subtrahiren

$$\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x,u,\xi)_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}\right\} \equiv \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}\right\}$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial u}\,\Delta(x,u,\xi,\eta) = 0,$$

„Die Differenz

$$\Delta(x,u,\xi,\eta) \equiv \frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x,u,\xi)_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

n dem unteren Grenzpunkte (Anfangspunkte) u der in ihr vorkommenden Derivationen unabhängig."

Sie behält also ihren Werth auch dann noch *unverändert* bei, wenn man den Anfangs- u längs dem urspünglichen Derivationswege (c) bis zur schliesslichen *Coïncidenz* mit beren Grenzpunkte x desselben *verschiebt*, **ohne** den letzteren und die beiden Indices ξ, η dern. Wenn aber u mit x zusammenfällt, wird

$$F(x,u,\xi) = F(x,x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+1}} = 0 \quad (\text{pars real. } \xi \leqq -1)$$

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta} F(x,u,\xi)_{(c)} = 0 \quad (\text{pars real}) \ \eta \leqq -1), \text{ und}$$

$$\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\Gamma(-\xi-\eta)}\int_{z=x}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+\eta+1}} = 0, \quad (\text{pars real. } (\xi+\eta) < -1);$$

n ist: $\Delta(x,x,\xi,\eta)=0$, und ist auch für jeden von dem Endpunkte x verschiedenen u des Weges (c), also auch für den Anfangspunkt u der Derivationen in seiner *ünlichen* Lage:

$$\Delta(x,u,\xi,\eta) \equiv \frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)} = 0,$$

$$25\alpha) \qquad \frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}.$$

Diese Gleichung ist jedoch nach dem Obigen zunächst nur für: pars real. ξ pars real. $\eta \leqq -1$ und für alle *innerhalb* der, der Funktion $f(x)$ adjungirten, verlaufenden Derivationswege (c) (kurz *innerhalb* des Brauchbarkeitsgebietes der De $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$) erwiesen.

Gesetzt, eine Gleichung von der Form (25α) bestehe unter gewissen Bedingu irgend ein η; so ist leicht nachzuweisen, dass sie unter den nämlichen Bedingungen gesetzt, dass dieselben von der Grösse η *unabhängig* sind) auch für den um p E grösseren Werth: $\eta + p$ gelten muss. Denn, differentiirt man die für irgend ein η al angenommene Gleichung:

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

p-mal nach der variablen oberen Grenze x der darin vorkommenden Derivation wendet dabei den Satz unter E) an, so ergibt sich sogleich:

$$\frac{d^{\eta+p}}{dx^{\eta+p}}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+(\eta+p)}}{dx^{\xi+(\eta+p)}} f(x)_{(c)}$$

eine Gleichung, die aus der vorangehenden auch dadurch erhalten wird, dass man η die Stelle von η setzt.

Wendet man dies auf die Gleichung (25α) an, so erkennt man, dass diesel blos für solche η, deren reeller Theil $\leqq -1$ ist, sondern überhaupt für jedes *en* gelten muss, sofern die weiteren Bedingungen nicht aufhören zu bestehen. Daher d

„Von einer beliebigen ξ^{ten} Derivation irgend einer Funktion $f(x)$, welche sic *halb* der adjungirten x-Fläche der genannten Funktion von einem konstanten Punkte einer willkürlichen Curve (c) bis zu dem unabhängig variablen Punkte x erstreck falls der reelle Theil ihres Index gleich oder kleiner ist als die *negative Einheit*, ein bige η^{te} gleichbestimmte (gleichbegrenzte) Derivation nach der oberen Grenze x gen indem man einfach den Index ξ der ersteren um den Index η der letzteren vermehr

Wir **lassen** von jetzt an die Voraussetzung pars real. $\xi \leqq -1$ **fallen**, und $n \leqq$ pars real. $(\xi) < n+1$, $n+2 = \nu$, wo ν eine der Zahlen 1, 2, 3 . . . vorstellt Bezug auf ξ dieselbe Bedeutung hat, wie die Zahl ν in den Gleichungen A) und A Index η sei eine beliebige *endliche* Grösse.

Nach dem soeben bewiesenen Satze hat man, weil hier pars real. $(\xi - \nu) <$

$$\frac{d^{\eta+\nu}}{dx^{\eta+\nu}}\left\{\frac{d^{\xi-\nu}}{dx^{\xi-\nu}} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{(\xi-\nu)+(\eta+\nu)}}{dx^{(\xi-\nu)+(\eta+\nu)}} f(x)_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

oder [siehe (18)]

$$\frac{d^{\eta+\nu}}{dx^{\eta+\nu}} F(x, u, \xi-\nu)_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}.$$

Der linke Theil dieser Gleichung unterscheidet sich von dem Ausdrucke:

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\nu}{dx^\nu} F(x, u, \xi-\nu)\right\}_{(c)} = \frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\nu}{dx^\nu}\frac{d^{\xi-\nu}}{dx^{\xi-\nu}} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x\right.$$

m eine algebraïsche Funktion von x, die aber hier, wo ganze positive Werthe des ξ ausgeschlossen sind, *entweder* verschwindet, oder ∞, oder unbestimmt wird, wie ch gezeigt werden soll.

Vertauscht man in der Gleichung F): ξ mit η, p mit ν, *setzt* an die Stelle der Funk- (x) die Funktion: $F(x, u, \xi - \nu)$, also auch statt

$$\equiv \frac{d^r}{dx^r} f(x) : \frac{d^r}{dx^r} F(x, u, \xi - \nu) \equiv \frac{d^r}{dx^r}\left\{\frac{d^{\xi-\nu}}{dx^{\xi-\nu}} f(x)_{(c)}\right\} = \frac{d^{\xi-\nu+r}}{dx^{\xi-\nu+r}} f(x)_{(c)}$$
$$= F(x, u, \xi - \nu + r)$$

z positiv mit Einschluss der Null), und **schreibt** in Folge dessen *statt*

$$(u) \equiv \Big/_{x=u} f^r(x) \ (r = 0, 1, 2, \ldots, p-1) : \Big/_{x=u} F(x, u, \xi - \nu + r) \equiv F(u, u, \xi - \nu + r)$$

$= 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$), so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} F(x, u, \xi - \nu)_{(c)} = \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left\{\frac{d^{\xi-\nu}}{dx^{\xi-\nu}} f(x)_{(c)}\right\} = \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} :$$

$$\frac{d^{\eta+\nu}}{dx^{\eta+\nu}} F(x, u, \xi - \nu)_{(c)} = \frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} + \frac{(x-u)^{-\eta-\nu}}{\Gamma(-\eta-\nu+1)} \cdot F(u, u, \xi - \nu)$$
$$\frac{(x-u)^{-\eta-\nu+1}}{\Gamma(-\eta-\nu+2)} \cdot F(u, u, \xi - \nu + 1) + \frac{(x-u)^{-\eta-\nu+2}}{\Gamma(-\eta-\nu+3)} \cdot F(u, u, \xi - \nu + 2)$$
$$+ \ldots + \frac{(x-u)^{-\eta-1}}{\Gamma(-\eta)} \cdot F(u, u, \xi - 1).$$

Die gefundene Gleichung gilt aber nicht bedingungslos, sondern besteht nur unter en Bedingungen, die sich durch entsprechende Transformation der bei F) unter 1) 2′) benen Bedingungen ergeben.

Dieselben lassen sich, wenn man berücksichtigt, dass dort [d. h. in den bei F) unter angeführten Bedingungen] statt der Funktion $f^p(x) = \frac{d^p}{dx^p} f(x)$ die Funktion

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} F(x, u, \xi - \nu) = \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = F(x, u, \xi),$$

statt $[f^p(x+h) \,.\, h] : [F(x+h, u, \xi) \,.\, h]$ gesetzt werden muss, in nachstehender Weise ren:

a) „Die Funktion $[F(x+h, u, \xi) \,.\, h]$ muss längs der Curve (c) von $x = u$ an bis x mit h zugleich verschwinden."

b) „Die Grössen: $F(u, u, \xi - \nu)$, $F(u, u, \xi - \nu + 1)$, $F(u, u, \xi - \nu + 2) \ldots$ $\xi - 1$) (d. h. die Werthe, welche die Derivationen:

$$\frac{d^{\xi-\nu}}{dx^{\xi-\nu}} f(x)_{(c)}, \quad \frac{d^{\xi-\nu+1}}{dx^{\xi-\nu+1}} f(x)_{(c)}, \quad \frac{d^{\xi-\nu+2}}{dx^{\xi-\nu+2}} f(x)_{(c)}, \ldots, \frac{d^{\xi-1}}{dx^{\xi-1}} f(x)_{(c)}$$

en, wenn die obere Grenze x derselben mit ihrer unteren Grenze u zusammenfällt) *endlich* sein.

Substituirt man nun den soeben gefundenen Werth des linken Theiles der Gleichung (26) letztere, so ergibt sich:

$$(27)\quad \frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}}f(x)_{(c)} - \frac{(x-u)^{-\eta-\nu}}{\Gamma(-\eta-\nu+1)}\cdot F(u,u,\xi-\nu)$$

$$-\frac{(x-u)^{-\eta-\nu+1}}{\Gamma(-\eta-\nu+2)}\cdot F(u,u,\xi-\nu+1) - \frac{(x-u)^{-\eta-\nu+2}}{\Gamma(-\eta-\nu+3)}\cdot F(u,u,\xi-\nu+2)$$

$$\ldots - \frac{(x-u)^{-\eta-1}}{\Gamma(-\eta)}\cdot F(u,u,\xi-1).$$

[Siehe die Bedingungen unter *a*) und *b*)].

Nun wissen wir aber (siehe Nr. I. gegen Ende), dass eine von $x=u$ bis längs (c) erstreckte, *nicht gewöhnliche*, ξ^{te} Derivation einer Funktion: $f(x)$ innerha Brauchbarkeitsgebietes entweder Null, oder ∞, oder unbestimmt wird, wenn die obere (e der unteren u gleich wird. Sie wird $=0$ für $x=u$:

erstens, wenn der reelle Theil ihres Index kleiner als Null: pars real. $\xi<0$;

zweitens, wenn der reelle Theil ihres Index grösser als oder gleich Null, und $f(u)=f'(u)=f''(u)=\ldots.f^{\mathfrak{n}}(u)=0$ ist; wo $\mathfrak{n}=\nu-2$ die *grösste* positive gan (mit Einschluss der 0) bezeichnet, welche noch *kleiner* als der reelle Theil von ξ, o höchstens gleich ist: $\mathfrak{n}\leqq$ pars real. $(\xi)<\mathfrak{n}+1$.

Tritt der letztere Fall ein, so wird nicht blos die ξ^{te} Derivation $=0$, sonde die $(\xi-1)^{\text{te}}$, $(\xi-2)^{\text{te}}$, $(\xi-3)^{\text{te}}$ ...., weil dann die hierzu erforderlichen Bedingunge falls erfüllt sind.

In allen anderen Fällen (die Werthe $\xi=0,1,2,3\ldots.$ ausgeschlossen!) wird Derivation beim Zusammenfallen ihrer Grenzen *unendlich* oder *unbestimmt*; das letzteri sondere findet statt, wenn pars real. $\xi=0$, d. h. wenn ξ *rein imaginär* ist.

Nehmen wir hier $\xi-1$ für ξ, also $\mathfrak{n}-1$ für $\mathfrak{n}$ und $\nu-1$ für ν, so ha den Hülfssatz:

„Die Derivation $F(x,u,\xi-1)$, und mit ihr die Derivationen $F(x,u,$ $F(x,u,\xi-3)\ldots.F(x,u,\xi-\nu)\ldots.$, verschwinden für $x=u$:

1. wenn der reelle Theil von ξ kleiner ist als 1: pars real. $\xi<1$;

2. wenn pars real. $\xi\gtreqless 1$ und zugleich $f(u)=f'(u)=f''(u)=\ldots.=f^{\mathfrak{n}-1}$ ist; vorausgesetzt, dass man hat: $\mathfrak{n}\leqq$ pars real. $\xi<\mathfrak{n}+1$, $\mathfrak{n}=\nu-2=1,2,3,4\ldots$

In allen anderen Fällen wird die Derivation $F(x,u,\xi-1)$ entweder ∞ od stimmt; letzteres für pars real. $\xi=1$.*)

Mittels des soeben aufgestellten Hülfsatzes erkennen wir sofort aus der Gl unter (27), dass die Differenz

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}}f(x)_{(c)}$$

nur unter den, im Hülfssatze unter 1. und 2. angeführten Bedingungen verschwindet aber ∞ oder unbestimmt wird.

---

*) Es ist jedoch wohl zu beachten, dass positive ganze Werthe von ξ: $\xi=1,2,3\ldots$ dab Betracht kommen.

Es sei 1. pars real. $\xi < 1$. In diesem Falle ist die Bedingung *b*) offenbar befriedigt, nach dem Hülfssatze $F(u, u, \xi - 1) = F(u, u, \xi - 2) = F(u, u, \xi - 3) = \ldots$. $u, u, \xi - \nu) = 0$ wird. Aber auch die Bedingung *a*) ist erfüllt, sowohl wenn $-1 \leqq$ pars < 0, als auch wenn $0 \leqq$ pars real. $\xi < 1$. Denn für $-1 \leqq$ pars real. $\xi < 0$, $\nu = 1$ Derivation

$$F(x, u, \xi) \equiv \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} = \frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\xi+1)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f'(z)\,dz}{(x-z)^{\xi}}$$

A')] innerhalb ihres Brauchbarkeitsgebietes von $x = u$ bis $x = x$ *endlich*, mithin ist mehr $lim_{h=0} . F(x+h, u, \xi) . h = 0$. Für $0 \leqq$ pars real. $\xi < 1$ dagegen ist $\nu = 2$, rivation

$$F(x, u, \xi) \equiv \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} = \frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} + \frac{f'(u)\,(x-u)^{-\xi+1}}{\Gamma(-\xi+2)}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(-\xi+2)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f''(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-1}}$$

erhalb ihres *Brauchbarkeitsgebietes* nur wenn $x = u$ wird unendlich, jedoch ∞ von *niedrigeren als dem 1. Grade*, sonst endlich; mithin ist auch hier $lim_{h=0} . F(x+h,$ $h = 0$, selbst dann, wenn $x = u$ wird. Das heisst:

„Wenn $-1 \leqq$ pars real. $\xi < 1$ ist, so ist die Differenz

$$\frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}} \left\{ \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} \right\}_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

lb des Brauchbarkeitsgebietes der Derivation: $\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}$ gleich Null."

Es sei 2. pars real. $\xi \gtrless 1$, $\mathfrak{n} \leqq$ pars real. $\xi < \mathfrak{n} + 1$, $\mathfrak{n} = \nu - 2 = 1, 2, 3, 4 \ldots$ igleich: $f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{\mathfrak{n}-1}(u) = 0$.

Auch in diesem Falle ist sowohl die Bedingung *a*), als auch die Bedingung *b*) erfüllt. dingung *b*) ist erfüllt, weil nach dem Hülfssatze $F(u, u, \xi - 1) = F(u, u, \xi - 2)$ $u, \xi - 3) = \ldots = F(u, u, \xi - \nu) = 0$ ist; die Bedingung *a*) dagegen, weil nach *A'*) $f(u) = 0$, $f'(u) = 0$, $f''(u) = 0, \ldots f^{\mathfrak{n}-1}(u) \equiv f^{\nu-3}(u) = 0$:

$$; u, \xi) \equiv \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} = \frac{f^{\nu-2}(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu-2}}{\Gamma(-\xi+\nu-1)} + \frac{f^{\nu-1}(u)\,(x-u)^{-\xi+\nu-1}}{\Gamma(-\xi+\nu)}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f^{\nu}(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}_{(c)}}$$

raus sofort erhellt, dass die Derivation $F(x, u, \xi)$ innerhalb ihres Brauchbarkeitsge- nit Ausnahme der Stelle $x = u$, *bestimmte endliche* Werthe hat, während sie für $x = u$ der Ungleichheit: $0 \leqq$ pars real. $(\xi - \nu + 2) < 1$ *entweder* ∞ von einem *niedrigern* 1. *Grade*, oder unbestimmt — endlich wird, je nach dem $0 <$ pars real. $(\xi - \nu$ 1, oder pars real. $(\xi - \nu + 2) = 0$, d. h. pars real. $\xi = \nu - 2 = \mathfrak{n}$ ist. Also:

„Wenn der reelle Theil von $\xi \geqq 1$ ist und $\mathfrak{n} \gtrless 1$ die *grösste* positive ganze Zahl net, welche gleich oder kleiner ist als derselbe: $\mathfrak{n} \leqq$ pars real. $\xi < \mathfrak{n} + 1$, so ist erenz:

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}}f(x)_{(c)}$$

unter der Voraussetzung, dass weder ξ noch η verschwindet oder ganz positiv ist, n
gleich Null, wenn die Derivation $\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}$ in ihrem Brauchbarkeitsgebiete genomn
und $f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{n-1}(u) = 0$ ist; in allen andern Fällen ist
oder unbestimmt."

Fassen wir alles zusammen, was wir bisher gefunden haben, so haben
wichtigen Satz:

G) „Von einer, *nicht* gewöhnlichen, ξ^{ten}, längs einer Curve (c) vom Punkt
bis zum unabhängig variablen Punkte $x = x$ erstreckten Derivation einer beliebigen I
$f(x)$ kann eine η^{te}, ebenfalls *nicht* gewöhnliche, gleichbestimmte Derivation dadu
nommen werden, dass man den Index ξ der ersteren um den Index η der letzteren v
wenn nur der Derivationsweg (c) im Brauchbarkeitsgebiete der Derivation $\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x$
und, im Falle der reelle Theil des Index ξ *grösser als 1 sein sollte*, ausserdem noch

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{n-1}(u) = 0$$

ist, wo n die *grösste* positive ganze Zahl bezeichnet, welche *gleich* oder kleiner ist
reelle Theil von ξ. In allen *anderen* Fällen ist die Differenz

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} - \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}}f(x)_{(c)}$$

unendlich gross oder unbestimmt." *)

Die Brauchbarkeitsflächen von zwei (oder mehr) *nicht gewöhnlichen* Deri
einer und derselben Funktion von x: $f(x)$ sind Theile der ihr adjungirten x-Fläch
ihnen *gemeinsame* Flächengebiet ist also ebenfalls der letzteren Fläche *incident*, und s
gemeinsame Brauchbarkeitsgebiet" jener Derivationen der Funktion $f(x)$ genannt

Sei nun „$\mathfrak{G}$" das *gemeinsame* Brauchbarkeitsgebiet zweier *nicht* gewöhnlich
vationen der Funktion $f(x)$, etwa das einer ξ^{ten} und einer η^{ten} Derivation; sei ferner
beliebige, *in dieser* Fläche „$\mathfrak{G}$" von einem konstanten Punkte $x = u$ nach dem un

---

Anmerkung. Das sogen. „Brauchbarkeitsgebiet" der ξ^{ten} Derivation einer Funktion $f(x$
„Geltungsgebiet" der Gleichung A') (siehe Nr. I., gegen Ende). Es wird für $\nu \geqq 1$ aus der adjungirten
der Funktion $f(x)$ erhalten, in dem man aus derselben **alle** in ihr etwa noch vorkommenden Uns
stellen der Funktionen: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{\nu-1}(x) \equiv f^{n+1}(x)$, und ausserdem *mindestens* noch die
Unstetigkeitsstellen 2. Art, welche die Funktion $f^\nu(x) \equiv f^{n+2}(x)$ in ihr besitzt, [d. h. diejenigen Unst
stellen x, für welche $lim_{h=0}[f^{n+2}(x+h) \cdot h]$ von Null verschieden ist] durch das *Herausschneiden*
aber uneingeschränkt kleiner, sie *einschliessender Flächenstückchen* entfernt. Für $\nu = 0$ fällt es mit
girten x-Fläche zusammen. Aus der Brauchbarkeitsfläche kann man leicht eine „der ξ^{ten} Derivation
Funktion der variablen oberen Grenze x) adjungirte x-Fläche" erhalten. Es genügt zu diesem Ende,
Derivation auch für $x = u$ einen *bestimmten endlichen* Werth hat, die besagte Fläche durch geeign
schnitte (im Sinne *Riemann's*) zu einer einfach-zusammenhängenden zu machen. Ist dagegen die ξ^{te}
für $x = u$ unendlich oder unbestimmt, so schneide man vorher ein, den Punkt u einschliessendes
aber *uneingeschränkt* kleines Flächentheilchen heraus und mache dann die Fläche einfach-zusamme

en Punkte $x = x$ gezogene Curve; so ist nach dem Theoreme G): 1. wenn die reellen *beider* Indices: (ξ, η) kleiner als 1 sind, sowohl:

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)},$$

h:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)},$$

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^\xi}{dx^\xi}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)}.$$

Sind dagegen 2. beide reelle Theile pars real. ξ und pars real. η, oder ist wenigstens on ihnen $\geqq 1$, und hat man

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{m-1}(u) = 0,$$

' die grösste positive ganze Zahl bezeichnet, welche *gleich* oder *kleiner* ist als der e der beiden reellen Theile, so ist wieder in Folge des Theoremes G) nicht nur

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

auch:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)},$$

:

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left\{\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)} = \frac{d^\xi}{dx^\xi}\left\{\frac{d^\eta}{dx^\eta} f(x)_{(c)}\right\}_{(c)},$$

n. Das heisst:

G') „Zwei oder mehrere, *nicht* gewöhnliche, gleichbestimmte Derivationen können nderung des Resultates in *beliebiger* Reihenfolge *hintereinander* von derselben Funk- c) genommen werden, wenn der allen gemeinsame vom Punkte $x = u$ bis zum unab- variablen Punkte $x = x$ führende Derivationsweg (c) in dem gemeinsamen Brauch- gebiete der obigen *einzeln für sich* von der Funktion $f(x)$ gebildeten Derivationen edoch muss, falls auch nur **einer** der reellen Index-Theile jener Derivationen $\geqq 1$ lte, ausserdem noch

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{m-1}(u) = 0$$

o „m" die *grösste positive ganze* Zahl bezeichnet, welche *gleich* oder *kleiner* ist als *sste* unter den reellen Indextheilen."

Aus diesem Satze fliesst noch ein spezieller Satz, welcher angemerkt zu werden .

Nach der Formel A') in Nr. I. ist eine ξ^{te} Derivation: $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$ für $n \leqq$ pars $\xi < n+1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots.)$ innerhalb ihres Brauchbarkeitsgebietes nur dann längs *nzen* Wege (c) von $x = u$ bis $x = x$ mit *Einschluss* der Grenzen **endlich**, wenn

$$f(u) = 0, \quad f'(u) = 0, \quad f''(u) = 0 \ldots . f^{\nu-2}(u) \equiv f^n(u) = 0$$

d also:

$$\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}, \quad \frac{d^{\xi'}}{dx^{\xi'}} f(x)_{(c)}, \quad \frac{d^{\xi''}}{dx^{\xi''}} f(x)_{(c)} \ldots$$

eine Anzahl gleichbestimmter Derivationen der Funktion $f(x)$, deren Derivation innerhalb ihres *gemeinsamen* Brauchbarkeitsgebietes liegt, und unter welchen *m eine* einen Index mit positivem oder verschwindendem reellen Theile besitzt, so wel von $x = u$ bis $x = x$ (mit Einschluss der Grenzen) *endlich* sein, wenn $f(u) = f'(u) = f$ $\ldots = f^{m-1}(u) = f^{m}(u) = 0$ ist und m (wie im Theoreme G') die *grösste positive* ga bedeutet, welche *gleich* oder *kleiner* ist, als der *grösste* unter den reellen Indextheil

$$\text{pars real. } \xi, \quad \text{pars real. } \xi', \quad \text{pars real. } \xi'' \ldots$$

Daraus ergibt sich sofort, dass, *wenn* die Derivationen, von welchen im Satz Rede ist, *einzeln für sich* an der Funktion $f(x)$ angebracht, Funktionen erzeugen, $x = u$ bis $x = x$ (*inclusive* der Grenzen) längs dem Wege (c) *endlich* sind, die angeführte Bedingung

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{m-1}(u) = 0$$

jedenfalls erfüllt sein wird.

Es gilt also der gewiss bemerkenswerthe Satz:

G'') „Zwei oder mehrere *nicht* gewöhnliche gleichbestimmte Derivationen *kön schadet* des Resultates in *beliebiger* Reihenfolge hintereinander von derselben Funk genommen werden, *wenn* sie, *einzeln* für sich an der genannten Funktion $f(x)$ ar Funktionen erzeugen, welche längs dem gemeinsamen Derivationswege vom Anfa $x = u$ bis zum variablen Endpunkte $x = x$ (inclusive der Grenzen) *endlich* sind."

Zweiter Theil.

Nro. IV.

In der Theorie der *bestimmten* Derivationen wird eine beliebige ξ^{te} Derivation irgend unktion $f(x)$, welche innerhalb der dieser adjungirten z-Fläche längs einer beliebigen c) von einem bestimmten Anfangspunkte $z = u$ bis zu einem beliebigen Endpunkte ausgedehnt wird, wesentlich als eine Funktion der unabhängig variabel gedachten Grenze x angesehen, während die untere Grenze u nnd der Index ξ als Parameter n behandelt werden.

Jetzt wollen wir den Standpunkt unserer Auffassung ändern, und die ganz allgemein Derivation:

$$\frac{d^{\xi}}{dz^{\xi}} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^{\xi}}{dz^{\xi}} f(z)_{z=u}^{z=x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi-\nu+1}_{(c)}}$$

$\left\{ \begin{array}{c} \nu\text{: die kleinste positive ganze Zahl, welche gleich oder grösser ist als} \\ \text{der reelle Theil von } (\xi+1) \text{ (die Null eingeschlossen)} \end{array} \right\}$

Abhängigkeit von dem Index ξ, d. h. als eine Funktion von ξ betrachten, wobei u als endliche von einander und von ξ unabhängige Parameter gelten sollen. Die Funk- r) wird als eine von dem Index ξ *unabhängige* Funktion von z vorausgesetzt.

Wir schlagen vor, die so als eine Funktion ihres unabhängig variablen Index ξ auf- Derivation **„eine Index-Funktion"** das Werthegebiet der Funktion $f(z)$ innerhalb ljungirten z-Fläche: „die Basis" derselben, endlich die Grenzen $z = u$ und $z = x$ ch ihren „Anfangs-" und „Endpunkt" zu nennen.

Die Entwickelung der „Indexfunktionen" nach Potenzen ihres Arguments (ξ), und dium der *Eigenschaften* und des *Zusammenhanges* der bei dieser Entwickelung auf- n Koëfficienten bilden den Gegenstand der folgenden Blätter.

a) Wir stellen uns vor Allem die Aufgabe, „die Indexfunktion: $\frac{d^{\xi}}{dz^{\xi}} f(z)_{z=u}^{z=x}$ in nkbar einfachsten Falle, nämlich unter der Voraussetzung, dass der reelle Theil ex $\xi \leqq -1$ sei, nach ganzen positiven Potenzen desselben zu entwickeln."

Unter der hier gemachten Voraussetzung ist [wegen pars real $(\xi+1) \gtrless ($ innerhalb der, der Funktion $f(z)$ adjungirten z-Fläche

$$(2) \qquad \frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{z=u}^{z=x} \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} \equiv \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+1}_{(c)}}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{(x-z)^{\xi+1}} . dz_{(c)} + \frac{f(x)\,(x-u)^{-\xi}}{-\xi \,.\, \Gamma(-\xi)} \qquad \text{ode}$$

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} = f(x) \,.\, \frac{(x-u)^{-\xi}}{-\xi\,\Gamma(-\xi)} + \xi \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \,.\, \frac{(x-z)^{-\xi}}{-\xi\,\Gamma(-\xi)} \,.\, d_z$$

die Indexfunktion im linken Theile, welche hier für beliebige Punkte u, x der ad z-Fläche und beliebige, dieselben innerhalb der genannten Fläche verbindende endlich ist, kann also sofort in eine nach den positiven ganzen Potenzen von ξ fo tende Reihe entwickelt werden, wenn der Ausdruck $\frac{(x-z)^{-\xi}}{-\xi\,\Gamma(-\xi)}$ längs dem gan Punkte z beschriebenen Wege (c) auf solche Art entwickelt werden kann, und die dessen im rechten Theile der obigen Gleichung bei den aufeinanderfolgenden Potenz auftretenden Entwickelungskoëfficienten *endliche* Grössen sind.

Der ausgezeichnete Mathematiker *Weierstrass* hat im 51. Bande des Cre Journales in seiner Abhandlung: „Über analytische Fakultäten", unseres Wissens zu Male, bewiesen, dass der, durch die Gleichung

$$(3) \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} \equiv lim_{n=\infty} \,.\, (-1)^n \binom{-z}{n} n^{-z+1}$$

$$\equiv lim_{n=\infty} \frac{z\,(z+1)\,(z+2)\,\ldots\,(z+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n\,.\,n^{z-1}}$$

allgemein definirte, Reciprokwerth der Gammafunktion $\Gamma(z)$ für jedes endliche z end stetig ist, und in eine stets konvergirende Reihe von der Form:

$$(4) \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} = K_0 \,.\, z + K_1 \,.\, z^2 + K_2 \,.\, z^3 + K_3 \,.\, z^4 + \ldots + K_r \,.\, z^{r+1} + \ldots \text{ in infin}$$

entwickelt werden kann.

Hierin ist, wie man leicht auf Grund der Definitionsgleichung (3) (unter B der Newton'schen Relationen zwischen den Summen der Wurzelpotenzen und den Koëf einer algebraischen Gleichung) successive findet:

$$(4\alpha) \qquad K_0 \equiv 1;\; K_1 \equiv lim_{n=\infty} \,.\, \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - log\,.\,n\right] = 0{\cdot}57721$$

$$-2\,K_2 = S_2 - K_1 \,.\, K_1\,,$$

$$+3\,K_3 = S_3 - K_1 \,.\, S_2 + K_2 \,.\, K_1\,,$$

$$-4\,K_4 = S_4 - K_1 \,.\, S_3 + K_2 \,.\, S_2 - K_3 \,.\, K_1\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und allgemein für $r \gtrless 2$:

$$(-1)^{r-1} \,.\, r\,K_r = S_r - K_1 \,.\, S_{r-1} + K_2 \,.\, S_{r-2} - \ldots + (-1)^{r-2} \,.\, K_{r-2} \,.\, S_2 + (-1)^{r-1} \,.\, K$$

$$(4\beta) \qquad S_r \equiv lim_{n=\infty} \,.\, \left[\frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^r}\right].$$

Es ist also:

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi)} = 1 - K_1 \cdot \xi + K_2 \cdot \xi^2 - K_3 \cdot \xi^3 + \ldots + (-1)^r K_r \cdot \xi^r + \ldots$$

$$(x-z)^{-\xi} = 1 - \xi \log(x-z) + \xi^2 \frac{[\log(x-z)]^2}{2!} - \xi^3 \cdot \frac{[\log(x-z)]^3}{3!} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \cdot \xi^r \cdot \frac{[\log(x-z)]^r}{r!} + \ldots$$

$$\frac{(x-z)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi)} = 1 - [\log(x-z) + K_1] \cdot \xi + \left[\frac{\overline{\log(x-z)}^2}{2!} + K_1 \cdot \log(x-z) + K_2\right] \cdot \xi^2$$

$$- \left[\frac{\overline{\log(x-z)}^3}{3!} + K_1 \cdot \frac{\overline{\log(x-z)}^2}{2!} + K_2 \cdot \log(x-z) + K_3\right] \cdot \xi^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \left[\frac{\overline{\log(x-z)}^r}{r!} + K_1 \cdot \frac{\overline{\log(x-z)}^{r-1}}{(r-1)!} + K_2 \cdot \frac{\log(x-z)^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + K_{r-1} \cdot \log(x-z) + K_r\right] \cdot \xi^r + \ldots$$

$$\frac{(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi)} = f(x) - [\log(x-u) + K_1] f(x) \cdot \xi$$

$$+ \left[\frac{\overline{\log(x-u)}^2}{2!} + K_1 \log(x-u) + K_2\right] f(x) \cdot \xi^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \left[\frac{\overline{\log(x-u)}^r}{r!} + K_1 \cdot \frac{\overline{\log(x-u)}^{r-1}}{(r-1)!} + K_2 \cdot \frac{\overline{\log(x-u)}^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + K_{r-1} \log(x-u) + K_r\right] f(x) \cdot \xi^r + \ldots$$

$$\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \cdot \frac{(x-z)^{-\xi}}{(-\xi)\,\Gamma(-\xi)} \cdot dz =$$

$$= J_0 \cdot \xi - [J_1 + K_1 \cdot J_0] \cdot \xi^2 + \left[\frac{J_2}{2!} + K_1 \cdot J_1 + K_2 \cdot J_0\right] \xi^3 - \ldots.$$

$$(-1)^{r-1} \left[\frac{J_{r-1}}{(r-1)!} + K_1 \cdot \frac{J_{r-2}}{(r-2)!} + K_2 \cdot \frac{J_{r-3}}{(r-3)!} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + K_{r-2} \cdot J_1 + K_{r-1} \cdot J_0\right] \cdot \xi^r + \ldots,$$

Kürze wegen

$$J_p \equiv \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z) - f(x)}{z-x} \cdot [\log(x-z)]^p \cdot dz_{(c)} \quad [p = 0, 1, 2, 3 \ldots (r-1) \ldots]$$

wurde; folglich ist mit Rücksicht auf (2):

$$(5)\quad \frac{d^{\xi}}{dz^{\xi}} f(z)_{(c)} = f(x) + \{-[log\,(x-u) + K_1]\,.\,f(x) + J_0\}\,.\,\xi$$

$$+\left\{\left[+\frac{\overline{log\,(x-u)}^{2}}{2!} + K_1\,log\,(x-u) + K_2\right].f(x) - [J_1 + K_1\,.\,J_0]\right\}.\,\xi^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^r \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\overline{log\,(x-u)}^{r}}{r!} + K_1 \cdot \dfrac{\overline{log\,(x-u)}^{r-1}}{(r-1)!} + K_2 \cdot \dfrac{\overline{log\,(x-u)}^{r-2}}{(r-2)!}\right. \\ \qquad \ldots, + K_{r-1}\,.\,log\,(x-u) + K_r\Big]\,. \\ -\left[\dfrac{J_{r-1}}{(r-1)!} + K_1 \cdot \dfrac{J_{r-2}}{(r-2)!} + K_2 \cdot \dfrac{J_{r-3}}{(r-3)!} + \ldots\right. \\ \qquad \ldots + K_{r-2}\,.\,J_1 + K_{r-1} \end{array}\right.$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder, wenn man noch der besseren Übersicht wegen

$$(6)\quad \frac{\overline{log\,(x-z)}^{r}}{r!} + K_1 \cdot \frac{\overline{log\,(x-z)}^{r-1}}{(r-1)!} + K_2 \cdot \frac{\overline{log\,(x-z)}^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots$$

$$\ldots + K_{r-1}\,log\,(x-z) + K_r \equiv \psi(\ldots$$

setzt:

$$\frac{d^{\xi}}{dz^{\xi}} f(z)_{(c)} = f(x) + \left[-\psi(x-u,1)\,.\,f(x) + \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,.\,dz_{(c)}\right].\,\xi$$

$$+\left[+\psi(x-u,2)\,.\,f(x) - \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,.\,\psi(x-z,1)\,.\,dz_{(c)}\right]$$

$$+\left[-\psi(x-u,3)\,.\,f(x) + \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,.\,\psi(x-z,2)\,.\,dz_{(c)}\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^r\left[\psi(x-u,r)\,.\,f(x) - \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,.\,\psi(x-z,r-1)\,.\,dz_{(c)}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung gilt, wenn pars real. $(\xi) \leqq -1$ ist, und der Derivation[s] seiner ganzen Ausdehnung nach in der, der Funktion $f(z)$ adjungirten z-Fläche (dem [r]barkeitsgebiete der Derivation im vorliegenden Falle) enthalten ist; die unendliche [R]jedoch nur dann zur wirklichen Berechnung der ξ^{ten} Derivation brauchbar, wenn [d]wickelungskoëfficienten endlich —, mithin wenn [siehe Gleichung (5)] sämmtliche Inte[g]für $p = 0, 1, 2, 3 \ldots$ — *endliche* Grössen sind und $(x-u)$ nicht verschwindet. Das

$$J_p = \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,.\,log^{p}\,.\,(x-z)\,dz_{(c)}$$

· nur dann endlich, wenn der Ausdruck unter dem Integralzeichen für jeden Punkt z ges (c) von $z = u$ bis $z = x$ der Bedingung:

$$lim_{h=0} \cdot \left[\frac{f(z+h) - f(x)}{z+h-x} \, log^p (x - z - h) \, . \, h \right]_{(c)} = 0$$

Solange z von x ***verschieden*** ist, ist diese Bedingung erfüllt, wenn $f(x)$ endlich ist, ler Punkt z der adjungirten z-Fläche, also auch jeder Punkt z der Curve (c) der ng $lim_{h=0} \cdot [f(z+h) \, . \, h] = 0$ genügt. Ist jedoch $z = x$, so liefert die obige Bedin- sserdem noch die Spezial-Bedingung:

$$lim_{h=0} \cdot [f(x+h) - f(x)] \, log^p (-h)] = 0 \quad (p = 0, 1, 2, 3 \ldots),$$

ıur dann befriedigt wird, wenn die Differenz $[f[x+h) - f(x)]$ zugleich mit h ent- otenziell-unendlich klein (d. h. so wie $X \, . \, h^s$, wenn X endlich und pars real. $s > 0$ · noch rascher (etwa wie $X \, . \, e^{-\frac{1}{h}}$) unendlich klein wird. Da sich bei uneingeschränkt rdendem h:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \equiv \frac{f(\overline{x+h} - h) - f(\overline{x+h})}{(\overline{x+h} - h) - (x+h)}$$

o wie $f'(x+h)$, mithin $[f(x+h) - f(x)]$ gerade so wie $f'(x+h) \, . \, h$ ändert, so obige Spezialbedingung auch in der Form

$$lim_{h=0} \cdot f'(x+h) \, . \, h \, . \, log^p (h) = lim_{h=0} \cdot \left[f'(x+h) \, . \, \frac{log^p (h)}{h^{-1}} \right]$$

$$= 0 \cdot \left[f'(x+h) \, . \, \frac{-p \, log^{p-1} (h)}{h^{-1}} \right] = lim_{h=0} \cdot \left[f'(x+h) \, . \, \frac{+p(p-1) \, log^{p-2} (h)}{h^{-1}} \right] = \ldots$$

$$\ldots = lim_{h=0} \cdot (-1)^p \, . \, p! \, f'(x+h) \, . \, h = 0 \text{ d. h. } lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \, . \, h] = 0$$

lt werden.

7α) „Die unendliche Reihe im rechten Theile der Gleichung (7) konvergirt also für . $(\xi) \leqq -1$ gegen die Index-Funktion:

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$$

Grenzwerth, wenn der Weg (c) von dem laufenden Derivationspunkte z (oder x, ler Bezeichnung) ***innerhalb*** der adjungirten z-Fläche der Funktion $f(z)$ beschrieben l in dem Endpunkte x desselben $lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \, . \, h] = 0$ und $f(x)$ endlich ist.“ spezieller ist dies natürlich auch der Fall, wenn sowohl $f(x)$ als auch $f'(x)$ im e x des Weges (c) endlich sind, weil dann die Bedingung: $lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \, . \, h] = 0$ erfüllt ist.

) Die im rechten Theile der Gleichung 7) als Koëfficienten der aufeinanderfolgenden von ξ auftretenden Grössen können und sollen hier als Funktionen des unabhängig gedachten Endpunktes x aufgefasst werden, die ausserdem noch von dem Anfangs- des Weges (c) und von der ***Form*** der ***Funktion*** $f(x)$ abhängen, aus welcher ***letzteren*** st eigenthümlicher *Bildungs-* oder besser **Ableitungsgesetze** hervorgehen.

iese **Ableitungsgesetze** sind hier, wenn wir sie statt an der Funktion $f(x)$, wie oëfficientenausdrücken der Gleichung (7) an einer ganz beliebigen Funktion $F(x)$, durch die Ausdrücke

$$(8)\qquad -\psi(x-u,\,1)\,.\,F(x)+\int_{z=u}^{z=x}\frac{F(z)-F(x)}{z-x}\,dz_{(c)},$$

$$+\psi(x-u,\,2)\,.\,F(x)-\int_{z=u}^{z=x}\frac{F(z)-F(x)}{z-x}\,.\,\psi(x-z,\,1)\,dz_{(c)},$$

$$-\psi(x-u,\,3)\,.\,F(x)+\int_{z=u}^{z=x}\frac{F(z)-F(x)}{z-x}\,.\,\psi(x-z,\,2)\,dz_{(c)},$$

. . . . . .

$$(-1)^r\,[\psi(x-u,\,r)\,.\,F(x)-\int_{z=u}^{z=x}\frac{F(z)-F(x)}{z-x}\,.\,\psi(x-z,\,r-1)\,dz_{(c}$$

. . . . . .

gegeben.

Denken wir uns den Weg (c) durch uneingeschränkt viele, etwa $n-1$ zwischen x eingeschaltete Punkte: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ldots u_{n-1}$ in n uneingeschränkt kleine Elementarwege $u_1u_2,\ u_2u_3\ldots u_{n-2}\ u_{n-1},\ u_{n-1}\ u_n\equiv u_{n-1}\ x\ [u_n\equiv x]$ so zerlegt, dass keiner der Schnitte mit einer Unstetigkeitsstelle der Funktion $F(x)$ zusammenfällt, wobei wir zugleich die u und $u_n\equiv x$, wenn sie zufällig Unstetigkeitspunkte der Funktion $F(x)$ sein sollten, in Curve (c) uneingeschränkt wenig verschieben: so können wir in bekannter Weise die vorkommenden bestimmten Integrale und mit ihnen die Ausdrücke unter (8) selbst als *Grenzwerthe* von Ausdrücken darstellen, die *lineare* und *homogene* Funktionen der Werthe

$$F(u),\ F(u_1),\ F(u_2),\ F(u_3)\ldots F(u_{n-1}),\ F(u_n)\equiv F(x)$$

sind, welche die Funktion $F(x)$ längs dem, von dem laufenden Punkte x beschriebenen $(c)\equiv u\,u_1\,u_2\,u_3\ldots u_{n-1}\,x$ annimmt; und zwar solche *lineare* Funktionen, deren *Koëfficienten* von der *Form der Funktion* $F(x)$ ganz *unabhängig* sind.

Wir nennen nun eine jede Funktion von x, welche mittels eines Grenzaus von der Gestalt:

$$lim_{n=\infty}\,.\,[\chi_0\,.\,F(u)+\chi_1\,.\,F(u_1)+\chi_2\,.\,F(u_2)+\ldots+\chi_{n-1}\,.\,F(u_{n-1})+\chi_n\,.\,F(u_n)],$$

dessen Koëfficienten $\chi_r(r=0,\,1,\,2,\ldots n-1,\,n)$ von der *Form* der Funktion $F(x)$ und sind, von dieser letzteren abgeleitet werden kann, eine *„lineare, von der Funktion F dem Wege $(c)\equiv u_1\,u_2\ldots u_{n-1}\,x$ genommene Funktionaloperation"*; vorausgesetzt, obige Klammerausdruck mit uneingeschränkt wachsendem n einer *bestimmten* Funkti als Grenze zustrebt.

Wir bezeichnen dieselbe, indem wir der Funktion $F(x)$ einen, das betreffe leitungsgesetz symbolisirenden Buchstaben, etwa O („Operation") vor- und das We (c) rechts unten beisetzen, wobei wir uns jedoch in solchen Fällen, wo der Weg angedeutet zu werden braucht, mit der blossen Bezeichnung der Grenzen $x=u$, $x=$ wie bei bestimmten Integralen begnügen.

Eine *lineare*, längs dem Wege (c) erstreckte Funktionaloperation O wird son den obigen Voraussetzungen durch eine Gleichung von der Form

$$(9)\qquad O\,F(x)_{(c)}\equiv O\,F(x)_{x=u}^{x=x}\equiv lim_{n=\infty}\,.\,[\chi_0\,.\,F(u)+\chi_1\,.\,F(u_1)+\chi_2\,.\,F(u_2)+\ldots+\chi_{n-1}\,.\,F(u_{n-1})+\chi_n\,.\,F(u_n)]$$

. Ihre Natur wird durch die Beschaffenheit der von der Funktionsform F unabhängigen enten χ bestimmt.

Eine solche lineare Funktionaloperation ist unter andern z. B. auch die geradlinige ion $\frac{d^\xi}{dx^\xi} F(x)_{x=u}^{x=x}$, welche für

$$: u + r\delta\ (r = 1, 2, \ldots n),\ \delta = \frac{x-u}{n};\ \chi_0 = (-1)^n (\xi_n)\ \delta^{-\xi},\ \chi_1 = (-1)^{n-1} (\xi_{n-1})\ \delta^{-\xi},$$

$$\chi_2 = (-1)^{n-2} (\xi_{n-2})\ \delta^{-\xi} \ldots \chi_{n-1} = -(\xi_1)\ \delta^{-\xi},\ \chi_n = \delta^{-\xi}$$

n wird.

ie unter (8) angeführten Ausdrücke sind nach dem Obigen ebenfalls lineare Funktionalonen der Funktion $F(x)$, welche sich längs der Curve (c) vom Punkte $x = u$ bis zu riablen Endpunkte $x = x$ erstrecken. Wir bezeichnen ihre Bildungsgesetze der Reihe eziehlich durch die Buchstaben L_1 oder L, L_2, $L_3, \ldots L_r \ldots$, und *schlagen insbesondere* e erste derselben „L" die „Logiirung" (als Ableitungsgesetz) und das Resultat, welches n wird, wenn man das Bildungsgesetz L an der Funktion $F(x)$ anbringt, d. h. die Funktionaloperation $LF(x)_{(c)} \equiv LF(x)_{x=u}^{x=x}$ „*das* **Logial** *der Funktion* $F(x)$ *längs* (c)" nen.

Das Motiv zu dieser Benennung liegt in der Analogie, welche, wie wir in der Folge werden, zwischen der Index-Funktion: $\frac{d^\xi}{dx^\xi} F(x)_{(c)}$ und der Funktionaloperation $_{(c)}$ *einerseits*, der Exponentialgrösse $a^\xi = 1 + log\ .\ a\ .\ \xi + (log\ .\ a)^2\ .\ \frac{\xi^2}{2!} + \ldots$ und garithmus $log\ a$ *anderseits* besteht.

Das „Logial" der Funktion $F(x)$ längs (c): $L\,F'(x)_{(c)}$ und die übrigen Funktionalonen: $L_2\,F(x)_{(c)}$, $L_3\,F(x)_{(c)} \ldots L_r\,F(x)_{(c)} \ldots$ sind hiernach durch die Gleichungen:

$$x)_{(c)} \equiv L\,F(x)_{x=u}^{x=x} \equiv -\psi(x-u, 1)\ .\ F(x) + \int_{z=u}^{z=x} \frac{F(z)-F(x)}{z-x}\, dz_{(c)} \qquad (I)$$

$$x)_{(c)} \equiv L_2\,F(x)_{x=u}^{x=x} \equiv +\psi(x-u, 2)\ .\ F(x) - \int_{z=u}^{z=x} \frac{F(x)-F(x)}{z-x}\ .\ \psi(x-z, 1)\, dz_{(c)}$$

$$x)_{(c)} \equiv L_3\,F(x)_{x=u}^{x=x} \equiv -\psi(x-u, 3)\ .\ F(x) + \int_{z=u}^{z=x} \frac{F(z)-F(x)}{z-x}\ .\ \psi(x-z, 2)\, dz_{(c)}$$

. . . . . .

$$x)_{(c)} \equiv L_r\,F(x)_{x=u}^{x=x} \equiv (-1)^r \left[\psi(x-u, r)\ .\ F(x) - \int_{z=u}^{z=x} \frac{F(z)-F(x)}{z-x}\ .\ \psi(x-z, r-1)\, dz_{(c)}\right]$$

. . . . . .

$$- z, r) \equiv \frac{[log\,(x-z)]^r}{r!} + K_1\ .\ \frac{[log\,(x-z)]^{r-1}}{(r-1)!} + K_2\ .\ \frac{[log\,(x-z)]^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots$$

$$\ldots + K_{r-1}\, log\,(x-z) + K_r\Big]$$

2, 3, . . .) allgemein definirt.

Bedenkt man, dass für pars real. $\xi \leqq -1$ die der Funktion $f(z)$ adjungirte zugleich das *Endlichkeitsgebiet* der Index-Funktion (Derivation): $\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)}$ ist, *Endlichkeit* der letzteren eine *selbstverständliche* Bedingung für die Möglichkeit bil selbe in eine **konvergente** Reihe zu entwickeln, so hat man mit Rücksicht auf di eingeführte Symbolik den Satz:

„Die *Indexfunktion*:

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$$

kann für pars real. $\xi \leqq -1$ in eine konvergente, auch den Index-Potenzen fortsch Reihe von der Form:

$$(10) \qquad \frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots$$
$$\ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^r + \ldots$$

entwickelt werden, wenn, unter der selbstverständlichen Voraussetzung *ihrer Endlich* Endpunkte x: $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \cdot h] = 0$ ist.

c) Es sei *jetzt* $-1 <$ pars real. $\xi < 0$, pars real. $(\xi + 1) < 1$; so ist die Index $\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)}$ als Derivation mit variablem Index nach der Formel *A'*) in Nr. I. i ihres Brauchbarkeitsgebietes, welches auch hier (wie früher für pars real. $\xi \leqq -1$) ihr „*Endlichkeitsgebiet*" ist:

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = \frac{f(u)\,(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\xi+1)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f'(z)\,dz}{(x-z)^\xi}$$

Dieselbe kann mittels theilweiser Integration auf die nämliche Form wie Gleichung (2) für pars real. $\xi \leqq -1$

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+1}_{(c)}} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)-f(x)}{(x-z)^{\xi+1}}\, dz_{(c)} + \frac{f(x)\,(x-}{(-\xi)\,.\,\Gamma(-}$$

gebracht, und dann ganz so wie früher in eine nach den Potenzen von ξ fortsch Reihe entwickelt werden.

1α) „Die Reihenentwickelung unter (10) gilt also auch für

$$-1 < \text{pars real. } \xi < 0$$

wenn im Endpunkte x: $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot f'(x+h) \cdot h = 0$ ist; die Endlichkeit eine *konvergente* Reihe zu entwickelnden) Indexfunktion als *selbstverständlich* vorausges

*) Wir machen darauf aufmerksam, dass innerhalb des Brauchbarkeits- und zugleich Endlichkeit der Indexfunktion, also auch längs dem Wege (*c*) von $z = u$ bis $z = x$: $f(z)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot f'(z+$ ist; dass also *hier* die für eine konvergente Reihenentwickelung nothwendige Endlichkeit der Indexfunk Endlichkeit von $f(x)$ und das Verschwinden von $lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \cdot h]$ involvirt. Die auf den Enc bezüglichen Bedingungen, welche in diesem Falle nach dem Gesagten eigentlich überflüssig sind, sind Rücksicht auf den vorigen Fall (pars real. $\xi \leqq -1$) und die spätere allgemeine Fassung des Entwic theoremes in der obigen Form beibehalten worden.

d) Nehmen wir schliesslich an, der reelle Theil des Index ξ sei $\gtrless 0$, und zwar sei ...e zwischen den ganzen Zahlen n und $n+1$ enthalten, falls er nicht mit der kleineren ...en n zusammenfällt:

$$n \leqq \text{pars real. } \xi < n+1, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$
$$\text{pars real. } (\xi+1) < n+2, \quad \nu = n+2$$

...lieselbe Bedeutung hat wie in Nr. I. Gleichung *A'*).

Von einer konvergenten Reihenentwickelung kann, wie früher, nur die Rede sein, ...nd *insolange* als die Indexfunktion: $\frac{d^{\xi}}{dz^{\xi}} f(z)_{(c)}$ endlich ist. Das Endlichkeitsgebiet ...en fällt aber jetzt im Allgemeinen *nicht* mit dem Brauchbarkeitsgebiete zusammen, ...n wird aus demselben erst durch die Ausschliessung eines uneingeschränkt kleinen, ...nstanten Anfangspunkt u der Indexfunktion enthaltenden Flächentheilchens erhalten.

Nur, wenn

$$f(u) = 0,\ f'(u) = 0,\ f''(u) = 0, \ldots, f^{\nu-2}(u) \equiv f^{n}(u) = 0$$

würde das Endlichkeitsgebiet mit dem Brauchbarkeitsgebiete der Indexfunktion zu... fallen.

Wir setzen mit Rücksicht auf diese Umstände voraus, dass der Weg (c) der Index... ganz in der Brauchbarkeitsfläche, sein Endpunkt x jedoch nur in der Endlichkeits... derselben liegt. In Folge dieser Bestimmungen liegt im Allgemeinen ein uneingeschränkt... Partialweg von (c) in dem von der Endlichkeitsfläche ausgeschlossenen Stückchen der ...barkeitsfläche, während der ganze übrige Weg in die Endlichkeitsfläche hineinfällt; ...nn $f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{n}(u) = 0$ ist; liegt der Weg (c) seiner ganzen ...nung nach von $z = u$ bis $z = x$ in der Endlichkeitsfläche; die Indexfunktion (Deri... aber wird in dem einen wie im anderen Falle eine bestimmte *endliche* Grösse sein.

Sei η eine beliebige endliche, im Allgemeinen complexe Grösse, deren reeller Theil ...ist als $\nu - 1 = n+1$; so kann die Indexfunktion: $\frac{d^{\eta-\nu}}{dz^{\eta-\nu}} f(z)_{(c)}$ wegen: pars real. < -1 nach der Gleichung (10) in eine konvergente Reihe entwickelt werden, ...nach den Potenzen ihres Index $(\eta - \nu)$ fortschreitet. In dieser Reihe:

$$f(z)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot (\eta-\nu) + L_2 f(x)_{(c)} \cdot (\eta-\nu)^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot (\eta-\nu)^r + \ldots$$

...wir uns die Grössen: $(\eta - \nu)^r$ $(r = 1, 2, 3 \ldots)$ nach Potenzen von η entwickelt, und ...der nach den letzteren geordnet. Wir erhalten so eine Gleichung von der Form:

$$\frac{d^{\eta-\nu}}{dz^{\eta-\nu}} f(z)_{(c)} = X_{0,\nu} + X_{1,\nu} \cdot \eta + X_{2,\nu} \cdot \eta^2 + \ldots + X_{r,\nu} \cdot \eta^r + \ldots,$$

...er wir noch die Bedeutung und den Werth der Koëfficienten $X_{r,\nu}$ $(r = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ ...mmen haben.

Gelingt es, dieselben für irgend welche η zu bestimmen, so werden *sie*, weil von η ...*gig*, für alle hier zulässigen η bestimmt sein. Nun lassen sie sich aber sehr leicht ...ie η ermitteln, deren reeller Theil kleiner ist als Null.

Es ist nämlich, weil das Brauchbarkeitsgebiet der Indexfunktion $\frac{d^\xi}{dz^\xi}$.(

welchem der Weg (c) liegt, ein Theil des Brauchbarkeitsgebietes der Derivation $\frac{d^\eta}{dz^\eta}$

für pars real. $\eta < 0$ ist, nach dem Theoreme G) in Nr. III:

$$\frac{d^{\eta-\nu}}{dz^{\eta-\nu}} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^{\eta-\nu}}{dx^{\eta-\nu}} f(x)_{(c)} = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} \left[\frac{d^\eta}{dx^\eta} f(x)_{(c)} \right]_{(c)};$$

ferner ist nach den Sätzen unter (10) und (10α), wenn dort für $\xi : \eta$ geschrieben

$$\frac{d^\eta}{dz^\eta} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^\eta}{dx^\eta} f(x)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot \eta + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \eta^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot$$

mithin:

$$\frac{d^{\eta-\nu}}{dz^{\eta-\nu}} f(z)_{(c)} = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [f(x)]_{(c)} + \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [Lf(x)_{(c)}]_{(c)} \cdot \eta + \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [L_2 f(x)_{(c)}]_{(c)}$$

$$\ldots + \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [L_r f(x)_{(c)}]_{(c)} \cdot \eta^r + \ldots$$

Vergleichen wir dies mit der auch für pars real. $\eta < 0$ geltenden Entwick

$$\frac{d^{\eta-\nu}}{dz^{\eta-\nu}} f(z)_{(c)} = X_{0,\nu} + X_{1,\nu} \cdot \eta + X_{2,\nu} \cdot \eta^2 + \ldots + X_{r,\nu} \cdot \eta^r + \ldots$$

so ergibt sich:

$$(11\alpha)\ X_{0,\nu} = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x)_{(c)};\ X_{1,\nu} = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [Lf(x)_{(c)}]_{(c)};\ X_{2,\nu} = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [L_2 f($$

$$\ldots X_{r,\nu} = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [L_r f(x)_{(c)}]_{(c)} \ldots\ (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

und diese Werthe gelten, obschon nur unter der Voraussetzung pars real. $\eta < 0$ für *alle* η, deren reeller Theil kleiner ist als $\nu - 1 = \mathfrak{n} + 1$.

Wir setzen jetzt in (11) $\eta = \xi$, was zulässig ist, weil $\mathfrak{n} \gtreqless$ pars real. $\xi <$ substituiren zugleich die soeben gewonnenen Werthe der Koëfficienten $X_{0,\nu}, X_{1,\nu}, \ldots$ differentiiren die so erhaltene Gleichung:

$$\frac{d^{\xi-\nu}}{dz^{\xi-\nu}} f(z)_{(c)} = \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} f(x)_{(c)} + \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [Lf(x)_{(c)}]_{(c)} \cdot \xi + \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [L_2 f(x)_{(c)}]_{(c)} \cdot$$

$$\ldots + \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [L_r f(x)_{(c)}]_{(c)} \cdot \xi^r + \ldots$$

$$= \frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}} [f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_r f(x)_c \cdot \xi^r + \ldots$$

ν-mal nach dem Endpunkte x, und beachten dabei, dass nach dem Theoreme unt Nr. III. der ν^{te} *gewöhnliche* Differentialquotient einer beliebigen bestimmten Derivat Indexfunktion) nach ihrem Endpunkte x einfach dadurch gebildet wird, dass man d der letzteren um den Index ν des ersteren vermehrt.

Wir bekommen auf diese Art den Satz:

„Die Indexfunktion: $\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)}$ kann für $\mathfrak{n} \leqq$ pars real. $(\xi) < \mathfrak{n}+1$, $\mathfrak{n}=0, 1,$

, insolange als sie *endlich* bleibt, in eine konvergente Reihe von der Form

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^r + \ldots$$

elt werden."

Obzwar in diesem Satze die unter (10) für pars real. $\xi \leqq -1$ auftretende Bedingung, m Endpunkte x: $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \cdot h] = 0$ sein muss", nicht an- erscheint, so ist sie doch auch hier erfüllt, weil der Endpunkt x im Endlichkeits- der Indexfunktion $\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)}$ liegen muss, und in demselben unter Anderem sowohl: auch $f'(x)$ für pars real. $\xi \geqq 0$ *endlich* sind.

Fassen wir schliesslich alles bisher Gefundene zusammen, so haben wir den ebenso n als wichtigen Satz:

(12) „Jede **endliche** Indexfunktion:

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{z=u}^{z=x}$$

ch in eine *konvergente* nach den positiven ganzen Potenzen ihres Index fortschrei- eihe von der Form:

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^r + \ldots$$

eln, wenn in dem Endpunkte x ihres Weges (c): $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \cdot h] = 0$ somehr also auch, wenn (etwas spezieller) sowohl $f(x)$ als auch $f'(x)$ endliche sind."

Nro. V.

Das Logial: $Lf(x)_{(c)}$ kann durch einen sehr einfachen und bemerkenswerthen Grenz- x dargestellt werden, wenn der Weg (c) *geradlinig* und die Funktion $f(x)$ längs en von $x=u$ bis $x=x$ *endlich und stetig* ist. Auch die übrigen linearen Funktional- nen $L_2 f(x)_{(c)}$, $L_3 f(x)_{(c)} \ldots$ sind in diesem Falle durch Grenzausdrücke darstellbar, l dieselben nicht so einfach wie der ersterwähnte.

Bekanntlich nähert sich der Ausdruck:

$$\delta^{-\xi} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\xi}{p} f(u + \overline{n-p}\,\delta) =$$

$$\frac{(u+n\delta) - \binom{\xi}{1} f(u + \overline{n-1}\,\delta) + \binom{\xi}{2} f(u + \overline{n-2}\,\delta) - \ldots + (-1)^n \binom{\xi}{n} f(u)}{\delta^\xi}$$

in welchem n eine *endliche*, wenn auch *beliebig* grosse, positive ganze Zahl und δ dessen $\delta = \frac{x-u}{n}$ eine ebenfalls *endliche* aber *beliebig* kleine (im Allgemeinen ... Zahl ist, einer bestimmten Funktion von x, u und ξ, nämlich der ξ^{ten} *geradlinigen* ... bis $x = x$ erstreckten Derivation

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{x=u}^{x=x} \equiv \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(g)}$$

als Grenze, wenn n uneingeschränkt wächst und die Funktion $f(x)$ dem geradlinigen ... entlang von $x = u$ bis $x = x$ *endlich und stetig* bleibt.

Nehmen wir an, der reelle Theil des Index ξ sei negativ (falls ξ nicht se... schwindet), die obige Derivation also eine unter den jetzigen Umständen von $x = u$ l... endliche Funktion ihrer oberen Grenze x; so können wir die letztere nach den ... von ξ in eine Reihe von der Form:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(g)} = f(x) + Lf(x)_{(g)} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(g)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_r f(x)_{(g)} \cdot \xi^r + \ldots \tag{13}$$

entwickeln.

Aber auch der oben angeführte endliche Ausdruck

$$\delta^{-\xi} \Sigma_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{\xi}{p} f(u + \overline{n-p}\,\delta)$$

lässt sich in eine unendliche nach den positiven ganzen Potenzen von ξ fortschreiten... entwickeln, deren Koëfficienten sich mit uneingeschränkt wachsendem n den gleich... (d. h. zu *denselben* Potenzen von ξ gehörenden) Koëfficienten der Reihe unter (13) als... uneingeschränkt nähern müssen, weil sich der genannte Ausdruck der Derivation ... Theile von Gleichung (13) uneingeschränkt als seiner Grenze nähert.

Wir bezeichnen in der Folge die Summe der Kombinationen ohne Wiederho... Klasse p, welche aus einer unbegrenzten Reihe von Elementen:

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots\ w_{n-1},\ w_n,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \ldots \text{ in infinitum}$$

gebildet werden können, von denen nur n Elemente:

$$w_1,\ w_2,\ w_3\ \ldots\ w_{n-1},\ w_n$$

im Allgemeinen von Null verschieden, alle übrigen aber *sämmtlich* gleich Null sind ...

$$C_p\,[w_1, w_n]$$

so dass

$$C_1(w_1, w_n) \equiv w_1 + w_2 + w_3 + \ldots w_{n-1} + w_n$$
$$C_2(w_1, w_n) \equiv w_1 w_2 + w_1 w_3 \ldots + w_1 w_n + w_2 w_3 + \ldots + w_{n-1} w_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n(w_1, w_n) \equiv w_1 w_2 w_3 \ldots w_{n-1} w_n$$

und

$$C_p(w_1, w_n) = 0 \text{ für } p > n$$

ist. Dies gesetzt, ist zunächst

$$^{p}\binom{\xi}{p} = -\frac{\xi}{p}\cdot\left(1-\frac{\xi}{1}\right)\left(1-\frac{\xi}{2}\right)\left(1-\frac{\xi}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{\xi}{p-1}\right)$$

$$= -\frac{\xi}{p}\left[1 - C_1\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\xi + C_2\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\xi^2 + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + (-1)^{p-1} C_{p-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\xi^{p-1}\right]$$

$$= -\frac{\xi}{p} + \Sigma_{r=2}^{r=p}\frac{(-1)^r}{p} C_{r-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\xi^r$$

1:

$$^{r}(-1)^p\binom{\xi}{p} f(u+\overline{n-p}\,\delta) = f(u+n\delta) - f(u+\overline{n-1}\,\delta)\cdot\xi$$

$$+ \Sigma_{n=2}^{p=n}(-1)^p\binom{\xi}{p} f(u+\overline{n-p}\,\delta)$$

$$(+n\delta) - f(u+\overline{n-1}\,\delta)\cdot\xi - \xi\cdot\Sigma_{p=2}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}$$

$$+ \Sigma_{p=2}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}\ \Sigma_{r=2}^{r=p}(-1)^r C_{r-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\xi^r =$$

$$+n\delta) - \xi\cdot\Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}$$

$$+ \Sigma_{r=2}^{r=n}\Sigma_{p=2}^{p=n}(-1)^r\xi^r C_{r-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}$$

$$+n\delta) - \xi\ \Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}$$

$$+ \Sigma_{r=2}^{r=n}(-1)^r\xi^r\ \Sigma_{p=2}^{p=n} C_{r-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}$$

il $C_{r-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right)$ für $r>p$ verschwindet:

$$-1)^p\binom{\xi}{p} f(u+\overline{n-p}\,\delta) =$$

$$+n\delta) - \xi\ \Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} + \xi^2\ \Sigma_{p=2}^{p=n} C_1\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}$$

$$^{p=n}_{p=3} C_2\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n\xi^n\cdot\Sigma_{p=n}^{p=n} C_{n-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right)\cdot\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}.$$

Multiplicirt man diese ohne Einschränkung giltige Gleichung mit der ebenfalls allgiltigen:

$$^{\xi} = \left(\frac{x-u}{n}\right)^{-\xi} = 1 - \xi\,log.\frac{x-u}{n} + \frac{\xi^2}{2!}\left(log.\frac{x-u}{n}\right)^2 - \frac{\xi^3}{3!}\left(log.\frac{x-u}{n}\right)^3 + \cdots$$

net hierauf rechter Hand nach den aufsteigenden Potenzen von ξ, so erhält man:

$$(14)\qquad \delta^{-\xi}\, \Sigma_{p=0}^{p=n}\, (-1)^p \binom{\xi}{p} f(u+\overline{n-p}\,\delta) =$$

$$= f(x) + \left[\left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right).f(x) - \Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p}\right].\,\xi$$

$$+\left[\frac{1}{2!}\left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right)^2.f(x) - \left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right)\Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} + \Sigma_{p=2}^{p=n} C_1\left(1,\frac{1}{p-1}\right).\frac{f(u+\overline{n-p}\ldots}{p}\ldots\right.$$

$$+\left[\frac{1}{3!}\left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right)^3.f(x) - \frac{1}{2!}\left(log\,\frac{n}{x-u}\right)^2.\,\Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} + \left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right).\,\Sigma_{p=2}^{p=n} C_1\left(1,\frac{1}{p-1}\right).\,\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} - \Sigma_{p=3}^{p=n} C_2\left(1,\frac{1}{p-1}\right).\frac{f(u+\overline{n-p}\ldots}{p}\ldots\right.$$

$$+\;.$$

$$+\left[\frac{1}{r!}\left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right)^r.f(x) - \frac{1}{(r-1)!}\left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right)^{r-1}.\,\Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} + \frac{1}{(r-2)!}\left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right)^{r-2}.\,\Sigma_{p=2}^{p=n} C_1\left(1,\frac{1}{p-1}\right).\,\frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} - \ldots \ldots + (-1)^r\,\Sigma_{p=r}^{p=n} C_{r-1}\left(1,\frac{1}{p-1}\right).\,\frac{f(u+\overline{n-p}\,.\ldots}{p}\ldots\right.$$

$$+\;.$$

Lässt man nun in dieser allgemein giltigen Gleichung die *endliche* posit… Zahl n uneingeschränkt wachsen, mithin den Modulus (numerischen Werth) der im Al… complexen *endlichen* Grösse $\delta = \frac{x-u}{n}$ uneingeschränkt gegen die Null hin abne… konvergirt der linke Theil dieser Gleichung uneingeschränkt gegen den linken … Gleichung (13); in Folge dessen muss aber auch der Koëfficient von ξ^r im *recht…* der Gleichung (14) für $r = 1, 2, 3 \ldots r \ldots$ dem *Koëfficienten* von ξ^r im *rechten* … *Gleichung (13) als seinem Grenzwerthe uneingeschränkt zustreben.*

„Es ist also, wenn die unabhängige Variable x der linearen Funktionalop… $L\,f\,(x)_{x=u}^{x=x}$ (des „Logials"), $L_2\,f\,(x)_{x=u}^{x=x}, \ldots L_r\,f\,(x)_{x=u}^{x=x} \ldots$ die vom Anfangspunk… an bis zum Endpunkte $x = x$ gehende Gerade (g) durchläuft, und die Funktion f(… Wege entlang *endlich und stetig* bleibt:

$$\text{I. } a)\quad L\,f\,(x)_{(g)} \equiv L\,f\,(x)_{x=u}^{x=x} = lim_{n=\infty}\,.\left[\left(log\,.\,\frac{n}{x-u}\right).f(x) - \Sigma_{p=1}^{p=n}\frac{f(u+\overline{n-}\ldots}{p}\ldots\right.$$

$$= lim_{n=\infty}\,.\left[f(x)\,.\,log\frac{n}{x-u} - \frac{f(u+\overline{n-1}\,\delta)}{1} - \frac{f(u+\overline{n-2}\,\delta)}{2} - \frac{f(u+\overline{n-3}\,\delta)}{3} - \ldots - \ldots\right.$$

$$L_r f(x)_{(g)} \equiv L_r f(x)_{x=u}^{x=x} =$$

$$= lim_{n=\infty} \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{1}{r!}\left(log \cdot \frac{n}{x-u}\right)^r f(x) - \frac{1}{(r-1)!}\left(log \cdot \frac{n}{x-u}\right)^{r-1} \cdot \Sigma_{p=1}^{p=n} \frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} \\ + \frac{1}{(r-2)!}\left(log \cdot \frac{n}{x-u}\right)^{r-2} \cdot \Sigma\, C_1\left(1, \frac{1}{p-1}\right) \cdot \frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} - \ldots \\ \ldots + (-1)^r\, \Sigma_{p=r}^{p=n}\, C_{r-1}\left(1, \frac{1}{p-1}\right) \cdot \frac{f(u+\overline{n-p}\,\delta)}{p} \end{array} \right];$$

$= 2, 3, 4 \ldots r \ldots$, $\delta = \frac{x-u}{n}$ ist, und das Symbol $C_\nu\left(1, \frac{1}{p-1}\right)$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots$ $\ldots p-1)$ die Summe der Kombinationen *ohne* Wiederholung zur Klasse ν bezeichnet, überhaupt aus den Elementen $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{p-1}\right)$ gebildet werden können."

Speziell ist z. B. für $f(x) =$ Constans $= 1$:

$$\left.\begin{matrix} x \\ u \end{matrix}\right\} = lim_{n=\infty} \cdot \left[log \cdot \frac{n}{x-u} - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n}\right]$$

$$_{(g)} = -log\,(x-u) - K_1, \quad K_1 \equiv lim_{n=\infty} \cdot \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - log\, n\right] \equiv$$

$$\equiv 0{\cdot}5772156 \ldots$$

rth, welcher genau mit demjenigen übereinstimmt, der sich aus der ersten Formel . ergibt, wenn *dort* $F(z) = 1$, $F(x) = 1$, $-\psi(x-u, 1) \equiv -[log\,(x-u) + K_1]$ wird.

Aus dem Satze unter (12) in Nro. IV. geht hervor, „dass der Weg (c) *innerhalb* der ten x-Fläche der Funktion $f(x)$ durch einen beliebigen anderen Weg (c') zwischen n Grenzpunkten $x = u$ und $x = x$ ersetzt werden kann, ohne dass die Werthe des : $Lf(x)_{(c)}$ und der übrigen linearen Funktionaloperationen: $L_r f(x)_{(c)}$ $(r = 2, 3, 4, \ldots)$ eine Anderung erleiden, wenn nur im Endpunkte x: $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot [f'(x$ $] = 0$ ist.

Da nämlich für alle ξ, deren reeller Theil $\leqq -1$ ist, die Endlichkeits-Fläche der ξ^{ten} onen der Funktion $f(x)$ mit ihrer adjungirten x-Fläche zusammenfällt, und unter den Voraussetzungen die Gleichungen

$$\frac{\partial^\xi}{\partial x^\xi} f(x)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^r + \ldots$$

$$\frac{\partial^\xi}{\partial x^\xi} f(x)_{(c')} = f(x) + Lf(x)_{(c')} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(c')} \cdot \xi^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c')} \cdot \xi^r + \ldots$$

12) in Nr. IV.]

$$\frac{\partial^\xi}{\partial x^\xi} f(x)_{(c)} = \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c')}$$

t, so müssen die zu denselben Potenzen von ξ gehörigen Koëfficienten der vorste- Reihen einander gleich sein.

„Es ist also in der That:

(15) $$Lf(x)_{(c)} = Lf(x)_{(c')}$$
$$L_r f(x)_{(c)} = L_r f(x)_{(c')} \quad (r = 2, 3, 4 \ldots)$$

wenn die Wege (c), (c') zwischen *denselben* Grenzpunkten $x = u$ und $x = x$ *inne* adjungirten x-Fläche der Funktion $f(x)$ liegen, und in ihrem gemeinsamen Endpunk *endlich* und $lim_{h=0} . [f'(x+h) . h] = 0$ ist." —

In dem „Logial": $LF(x)_{(c)} \equiv LF(x)_{x=u}^{x=x}$ und den übrigen Funktionalop $L_r F(x)_{(c)} = L_r F(x)_{x=u}^{x=x}$ $(r = 2, 3, 4 \ldots)$ wurde bisher die unabhängige Variable, Curve (c) vom Punkte u an bis zum Punkte x durchläuft (der „Laufpunkt" jener F operationen) mit *demselben* Buchstaben x, wie der unabhängig variable Endpunkt x b Es ist aber klar, dass die Werthe der obigen Funktionaloperationen nur von den abhängen, welche die Funktion $F(x)$ längs der Curve (c) vom Punkte u bis zum annimmt; wobei es gleichgiltig ist, ob wir die Funktion als eine Funktion des Lauf wie oben, oder als eine Funktion eines anderen Laufpunktes, etwa z, auffassen, beide, x sowohl als auch z, *dieselbe* Curve (c) von *demselben* Anfangspunkte u bi *selben* Endpunkte x durchlaufen.

In Folge dessen ist eine beliebige der obigen Funktionaloperationen, genor der Funktion $F(x)$ und längs (c) vom Punkte $x = u$ bis zum Punkte $x = x$ erstre *tisch* mit der *nämlichen* Funktionaloperation der Funktion $F(z)$, erstreckt vom Punk längs (c) bis zum Punkte $z = x$:

(16) $$\left.\begin{matrix} LF(x)_{(c)} \\ = LF(x)_{x=u}^{x=x} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} LF(z)_{(c)} \\ = LF(z)_{z=u}^{z=x} \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} L_r F(x)_{(c)} \\ = L_r F(x)_{x=u}^{x=x} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} L_r F(z)_{(c)} \\ = L_r F(z)_{z=u}^{z=x} \end{matrix}\right.$$

Alle linearen Funktionaloperationen, folglich auch die Operationen: Lf $L_r f(x)_{(c)}$ $(r = 2, 3, 4 \ldots)$, besitzen, wie sich aus ihrer allgemeinen Definitionsglei in Nr. IV. sofort ergibt, die in den nachstehenden Sätzen ausgesprochenen Eigensc

α) „Jede lineare Funktionaloperation einer Summe von zwei oder mehr Fu der Unabhängigen ist gleich der Summe der gleichnamigen Funktionaloperationen zelnen Summanden."

β) „Jede lineare Funktionaloperation einer Differenz zweier Funktionen i der Differenz der gleichnamigen Operationen von Minuend und Subtrahend."

γ) „Jede lineare Funktionaloperation eines Produktes aus einer Konstante Funktion der Unabhängigen ist gleich dem Produkte aus der Konstanten in die glei Operation der Funktion."

Für die spezielle lineare Funktionaloperation, welche wir „das Logial" ist hiernach:

II. $$L[\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots]_{(c)} = L\varphi_1(x)_{(c)} + L\varphi_2(x)_{(c)} + L\varphi_3(x)_{(c)} + \ldots$$

II.α) $$L[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]_{(c)} = L\varphi_1(x)_{(c)} - L\varphi_2(x)_{(c)}$$

III. $$L[C . \varphi(x)]_{(c)} = C . L\varphi(x)_{(c)}.$$

Diesen Zerlegungstheoremen der „Logiale", welche nach dem Obigen keine *spe* Eigenschaften derselben ausdrücken, da sie **allen** *linearen* Funktionaloperationen ge

chliesst sich noch ein bemerkenswerthes, den „Logialen“ allein eigenthümliches
ngstheorem an, welches sowohl *direkt*, als auch *indirekt* aus dem korrespondirenden
igstheoreme der begrenzten Derivationen *C)* in Nr. II.:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}[f(x).\varphi(x)]_{(c)} = \varphi(x).\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)} + \Sigma_{r=1}^{r=\infty}\binom{\xi}{r}\varphi^r(x).\frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}}f(x)_{(c)}$$

et werden kann; wobei zu beachten ist, dass nach dem angeführten Satze für jeden
der Curve (c) vom Punkte $z=u$ bis zum Punkte $z=x$:

$$lim_{h=0}.[f(z+h).h]=0$$

serdem **jede** der Funktionen: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)\ldots$ längs dem Derivations-
endlich und stetig sein muss.

In Folge der ersteren Bedingung $[lim_{h=0}.[f(z+h).h]=0$ längs $(c)]$ sind die in
ezogenen Satze vorkommenden begrenzten Derivationen:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}, \quad \frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}}f(x)_{(c)} \quad (r=1,2,3\ldots)$$

Grössen, *sobald* der reelle Theil von ξ gleich oder *kleiner* ist als: -1. Sie sind
ıter dieser Voraussetzung nach dem Satze (12) in Nr. IV. nach den positiven ganzen
von ξ entwickelbar, wenn man nur noch annimmt, dass im Endpunkte x des Weges (c):
llich und $lim_{h=0}.[f'(x+h).h]=0$ ist.

Für solche ξ, deren reeller Theil zwischen (-1) und 0 liegt, muss $f(z)$ längs (c)
u bis $z=x$ endlich und längs demselben Wege: $lim_{h=0}.[f'(z+h).h]=0$ o. m. a.
muss $f(z)$ längs (c) von $z=u$ bis $z=x$ *endlich* **und** *stetig* sein, wenn die obigen
ımen endlich sein sollen. Da aber die letzteren Bedingungen alle früher (für pars
-1) angeführten auf die Funktion $f(z)$ bezüglichen Bedingungen in sich schliessen,
ɣen sie *für sich* vollständig zur Entwickelbarkeit jener Derivationen nach den posi-
ızen Potenzen von ξ, sobald der *reelle* Theil von ξ *negativ* ist.

Nehmen wir nun auf Grund dieser Erwägungen an, der *reelle Theil* des sonst ganz
n Index ξ sei *negativ*, *falls* dieser selbst *nicht* verschwindet; die Funktion $f(z)$ sei
vom Punkte $z=u$ bis zum Punkte $z=x$ (inclusive) *endlich* **und** *stetig*. Dann ist
te Theil und in Folge dessen auch der linke Theil der Gleichung (16) nach positiven
'otenzen von ξ entwickelbar.

Berücksichtigt man, dass nach den Sätzen (12) in Nr. IV. und *G)* in Nr. III.:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)}.\xi + L_2 f(x)_{(c)}.\xi^2 + \ldots$$

$$f(x)_{(c)} = \frac{d^\xi}{dx^\xi}\left[\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}f(x)_{(c)}\right] =$$

$$= \frac{d^{-r}}{dx^{-r}}f(x)_{(c)} + L\left[\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}f(x)_{(c)}\right]_{(c)}.\xi + L_2\left[\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}f(x)_{(c)}\right]_{(c)}.\xi^2 + \ldots$$

$$\binom{\xi}{r} = \frac{(-1)^{r-1}}{r}.\xi + \frac{(-1)^{r-2}}{r}C_1\left(1,\frac{1}{r-1}\right).\xi^2 + \ldots$$

at man:

$\alpha)$ $\varphi(x) \cdot \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = \varphi(x) \cdot f(x) + \varphi(x) \cdot Lf(x)_{(c)} \cdot \xi +$ Glieder mit $\xi^2, \xi^3,$

$\binom{\xi}{r} \cdot \varphi^r(x) \cdot \frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}} f(x)_{(c)} = \frac{(-1)^{r-1}}{r} \cdot \varphi^r(x) \cdot \frac{d^{-r}}{dx^{-r}} f(x)_{(c)} \cdot \xi +$ Glieder mit

$\beta)$ $\Sigma_{r=1}^{r=\infty} \binom{\xi}{r} \varphi^r(x) \cdot \frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}} f(x)_{(c)} = \left[\Sigma_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \cdot \frac{\varphi^r(x)}{r} \cdot \frac{d^{-r}}{dx^{-r}} f(x)_{(c)}\right.$

$+$ Glieder mit ξ^2, ξ^3, etc.

folglich, wenn die Gleichungen unter $\alpha)$ und $\beta)$ addirt werden:

(16a) $\varphi(x) \cdot \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} + \Sigma_{r=1}^{r=\infty} \binom{\xi}{r} \varphi^r(x) \cdot \frac{d^{\xi-r}}{dx^{\xi-r}} f(x)_{(c)} =$

$= \varphi(x) \cdot f(x) + \left[\varphi(x) \cdot Lf(x)_{(c)} + \Sigma_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \cdot \frac{\varphi^r(x)}{r} \cdot \frac{d^{-r}}{dx^{-r}} f(x\right.$

$+$ Glieder mit ξ^2, ξ^3 etc.

Da aber andererseits der linke Theil der Gleichung (16) nach dem Sat (12) in Nr. IV.:

(16b) $\frac{d^\xi}{dx^\xi} [f(x) \cdot \varphi(x)]_{(c)} = f(x) \cdot \varphi(x) + L[f(x) \cdot \varphi(x)]_{(c)} \cdot \xi$

$+$ Glieder mit ξ^2, ξ^3 etc.

ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichung (16) die Gleichheit der Reihen lungen unter (16a) und (16b) und mit dieser die Gleichheit der zu denselben Poten gehörigen Koëfficienten.

Es ist also schliesslich, wenn wir die in den obigen Reihen bei den ersten von ξ stehenden Koëfficienten einander gleich setzen:

(17) $L[f(x) \cdot \varphi(x)]_{(c)} = \varphi(x) \cdot Lf(x)_{(c)} + \Sigma_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \cdot \frac{\varphi^r(x)}{r} \cdot \frac{d^{-r}}{dx^{-r}} f(x)$

falls die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x) \ldots$ längs der Curve (c) von $x = u$ bis zum Punkte $x = x$ *endlich* **und** *stetig* sind.

Erwägt man nun, dass sich genau dieselben Entwickelungen, welche wir Grund der Annahme, dass pars real. $\xi < 0$ und $f(x)$ längs (c) von $x = u$ bis $x =$ **und** *stetig* sei, gemacht haben, auch für pars real. $\xi \leqq -1$ ausführen lassen, o $f(x)$ längs dem ganzen Wege (c) endlich und stetig zu sein braucht, wenn nur lim_h $+ h) \cdot h]$ längs (c) von $z = u$ bis $z = x$ verschwindet und im Endpunkte x des V $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot [f'(x + h) \cdot h] = 0$ (d. h. $f(x)$ in einem uneingeschränkt den Endpunkt x *einschliessenden*, Flächenstückchen *endlich* **und** *stetig*) ist: so erke dass die Gleichung (17) auch dann noch gilt, wenn die Funktion $f(z)$ längs (c) ste so unstetig wird, dass $lim_{h=0} \cdot f(z + h) \cdot h$ verschwindet, ohne jedoch im Endpunk des Weges (c) unstetig zu werden, und wenn ausserdem jede der Funktionen $\varphi(x$ $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x) \ldots$ längs (c) von $x = u$ bis $x = x$ *endlich* **und** *stetig* bleibt.

Wir haben hiernach folgendes Zerlegungstheorem der „Logialrechnung“:

„Es ist:

$$L[\varphi(x) \cdot f(x)]_{(c)} = \varphi(x) L f(x)_{(c)} + \Sigma_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \cdot \frac{\varphi^r(x)}{r} \cdot \frac{d^{-r}}{dx^{-r}} f(x)_{(c)}$$

$$x) L f(x)_{(c)} + \frac{\varphi'(x)}{1} \int [f(x)\, dx]_{(c)} - \frac{\varphi''(x)}{2} \cdot \overset{(+2)}{\int} [f(x)\, \overline{dx}^2]_{(c)} + \frac{\varphi'''(x)}{3} \overset{(+3)}{\int} [f(x)\, \overline{dx}^3]_{(c)}$$

$$+ \ldots + (-1)^{r-1} \cdot \frac{\varphi^r(x)}{r} \overset{(+r)}{\int} [f(x)\, \overline{dx}^r]_{(c)} + \text{in infinitum}$$

ie Funktionen: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x) \ldots \varphi^r(x) \ldots$ dem Logiirungswege (c) entlang fangspunkte $x = u$ bis zum unabhängig variablen Endpunkte $x = x$ *endlich und stetig* $im_{h=0} \cdot [f(x+h) \cdot h]$ längs demselben verschwindet, und ausserdem noch im End- x: $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot [f'(x+h) \cdot h]$ gleich Null ist.

Spezieller gilt diese Gleichung, wenn die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x), \ldots$. dem Wege (c) entlang von $x = u$ bis $x = x$ *endlich* **und** *stetig* sind."

Der vorstehende Satz lässt sich *direkt* aus der Definitionsgleichung der Logiale:

$$L F(x)_{(c)} \equiv -[log(x-u) + K_1] \cdot F(x) + \int_{z=u}^{z=x} \frac{F(z) - F(x)}{z-x}\, dz_{(c)}$$

lie erste Gleichung unter I. in Nr. IV.) herleiten, in dem man das im rechten Theile ntität

$$[f(x) \cdot \varphi(x)]_{(c)} \equiv -[log(x-u) + K_1] f(x) \cdot \varphi(x) + \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,\varphi(z) - f(x)\,\varphi(x)}{z-x}\, dz_{(c)}$$

e Integral in die Form:

$$\int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,\varphi(z) - f(x)\,\varphi(x)}{z-x}\, dz_{(c)} = \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)\,[\varphi(z) - \varphi(x)]}{z-x}\, dz_{(c)}$$

$$+ \varphi(x) \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z) - f(x)}{z-x}\, dz_{(c)} =$$

$$= \int_{z=u}^{z=x} \frac{f(z)}{z-x} [\varphi'(x)(z-x) + \frac{\varphi''(x)}{2!}(z-x)^2 + \frac{\varphi'''(x)}{3!}(z-x)^r + \ldots$$

$$+ \frac{\varphi^r(x)}{r!}(z-x)^r + \ldots]\, dz_{(c)} + \varphi(x) L f(x)_{(c)} + [log(x-u) + K_1] f(x)\, \varphi(x)$$

ınd dadurch der Gleichung (18) die Gestalt:

$$L[f(x) \cdot \varphi(x)]_{(c)} = \varphi(x) L f(x)_{(c)} + \int_{z=u}^{z=x} f(z) \cdot \Sigma_{r=1}^{r=\infty} \frac{\varphi^r(x)}{r!} [z-x)^{r-1} \cdot dz_{(c)}$$

)bei die oben vorgenommene *Reihenentwickelung*

$$\varphi(z) - \varphi(x) = \varphi'(x)(z-x) + \frac{\varphi''(x)}{2!}(z-x)^2 + \ldots.$$

Endlichkeit und *Stetigkeit* der Funktionen:

$$\varphi(z),\ \varphi'(z),\ \varphi''(z), \ldots, \varphi^r(z), \ldots$$

m Integrationswege (c) von $z = u$ bis $z = x$ *steht* und *fällt*.

Das zweite Glied im rechten Theile der so gewonnenen Gleichung (18α), n

$$\int_{z=u}^{z=x} f(z)\ \Sigma_{r=1}^{r=\infty} \frac{\varphi^r(x)}{r!}(z-x)^{r-1}\,.\,dz_{(c)} = \Sigma_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1}\,.\,\frac{\varphi^r(x)}{r!}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{-}}$$

verwandelt sich, wenn man bedenkt, dass:

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{-r+1}} = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{-r+1}} = \frac{d^{-r}}{dx^{-r}}f(x)_{(c)}$$

ist, in

$$\Sigma_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1}\,.\,\frac{\varphi^r(x)}{r}\,.\,\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}f(x)_{(c)},$$

und die Gleichung (18α) geht dadurch über in

$$L[\varphi(x).f(x)]_{(c)} = \varphi(x).Lf(x)_{(c)} + \Sigma_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1}\,.\,\frac{\varphi^r(x)}{r}\,.\,\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}f(x)$$

d. h. in die Gleichung des Theoremes unter IV.

Diese Gleichung ist, obschon hier bei ihrer Ableitung nur die Annahme werden musste, dass die Funktionen: $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)\ldots$ längs (c) *endlich und st* dennoch nur dann brauchbar, wenn und insolange als die in ihr vorkommenden $Lf(x)_{(c)}$ und $L[\varphi(x).f(x)]_{(c)}$ *bestimmte endliche* Grössen sind. Damit das erste bestimmt-endlich sei, muss bekanntlich $lim_{h=0}.[f(z+h).h]$ längs (c) von $z=u$ s gleich Null und im Endpunkte x des Weges (c): $f(x)$ endlich und $lim_{h=0}.[f'(x+$ sein. Die entsprechenden Bedingungen für die Endlichkeit des andern Logials sind, e nachgewiesen werden kann [wegen der Endlichkeit und Stetigkeit der Funktionen $\varphi(z$ längs (c)] jedesmal erfüllt, sobald die bereits angeführten befriedigt sind. Die letzte daher in Verbindung mit den die Funktionen $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)\ldots$ betreffenden Be die nothwendigen Brauchbarkeitsbedingungen der obigen Gleichung; sie sind, wie m mit den im Satze unter IV. namhaft gemachten *identisch.* —

Setzt man in dem Theoreme IV. speziell $f(x)=1$ und berücksichtig $L(1)_{(c)} = -log(x-u) - K_1$, — ferner, dass

$$\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}(1)_{(c)} = \int_{x=u}^{x=x}(dx) = x-u$$

$$\frac{d^{-2}}{dx^{-2}}(1)_{(c)} = \int_{x=u}^{x=x}dx\int_{x=u}^{x=x}dx = \frac{1}{2}(x-u)^2$$

$$\frac{d^{-3}}{dx^{-3}}(1)_{(c)} = \int_{x=u}^{x=x}dx\int_{x=u}^{x=x}dx\int_{x=u}^{x=x}dx = \frac{1}{2.3}(x-u)^3$$

. . . . . .

$$\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}(1)_{(c)} = \int^{(+r)}(dx^r)_{x=u}^{x=x} = \frac{1}{r!}x-u)^r$$

ist, so erhält man:

$$\varphi(x)_{x=u}^{x=x} = -\varphi(x)\,[K_1 + log\,(x-u)] + \frac{\varphi'(x)}{1}\cdot\frac{(x-u)}{1!} - \frac{\varphi''(x)}{2}\cdot\frac{(x-u)^2}{2!}$$

$$+\frac{\varphi'''(x)}{3}\cdot\frac{(x-u)^3}{3!} - \ldots + (-1)^{r-1}\cdot\frac{\varphi^r(x)}{r}\cdot\frac{(x-u)^r}{r!} + \ldots$$

Funktion: $\varphi(x)$, die nebst ihren Ableitungen: $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$, $\ldots$, $\varphi^r(x)\ldots$.
nem *beliebigen* vom Punkte $x=u$ zum Punkte $x=x$ führenden Wege (c) endlich
ig ist.

Wenn $\varphi(x)$ eine ganze rationale Funktion vom p^{ten} Grade ist, so gehen die unend-
eihen in den rechten Theilen der Gleichungen IV. und IV. *a*) in *endliche, respektive*
Gliedern

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{\varphi^p(x)}{p}\int^{(+p)}[f(x)\,\overline{dx}^p]_{(c)} \quad \text{und} \quad (-1)^{p-1}\cdot\frac{\varphi^p(x)}{p}\cdot\frac{(x-u)^p}{p!}$$

ıde Reihen über.

Nro. VI.

ı) Die partielle Differentiation des Logial's: $LF(x)_{(c)}$ und der linearen Funktional-
en: $L_r F(x)_{(c)}$ nach ihrer unteren Grenze u führt zu sehr einfachen Resultaten.
irt man nämlich ihre Definitionsgleichungen unter I. in Nro. IV. unter der Voraus-
dass die Funktion $F(x)$ von u unabhängig sei, partiell nach der letzteren Grösse,
cksichtigt, dass wegen

$$-u, r) \equiv \frac{\overline{log\,(x-u)}^r}{r!} + K_1\cdot\frac{\overline{log\,(x-u)}^{r-1}}{(r-1)!} + K_2\cdot\frac{\overline{log\,(x-u)}^{r-2}}{(r-2)!} + \ldots$$

$$\ldots + K_{r-1}\,log\,(x-u) + K_r$$

$$-u, 1) \equiv log\,(x-u) + K_1:$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\psi(x-u, r) = -\frac{\psi(x-u,\ r-1)}{x-u}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\,\psi(x-u, 1) = -\frac{1}{x-u}$$

hält man augenblicklich:

$$\frac{\partial}{\partial u}\,[LF(x)_{(c)}] \equiv \frac{\partial}{\partial u}\,[LF(x)_{x=u}^{x=x}] = \frac{F(u)}{x-u}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\,[L_r F(x)_{(c)}] \equiv \frac{\partial}{\partial u}\,[L_r F(x)_{x=u}^{x=x}] = (-1)^{r-1}\cdot\frac{\psi(x-u,\ r-1)}{x-u}\cdot F(u)$$

$$(r = 2, 3, 4\ldots.)$$

ommt in der Funktion $F(x)$ ein Parameter, etwa u', vor, von welchem die Grenzen
n Funktionaloperationen *unabhängig* sind, so ist offenbar, wenn $F(x, u')$ statt $F(x)$
en wird:

$$-[LF(x, u')_{(c)}] = L\left[\frac{\partial F(x, u')}{\partial u'}\right]_{(c)}, \quad \frac{\partial}{\partial u'}\,[L_r F(x, u')_{(c)}] = L_r\left[\frac{\partial F(x, u')}{\partial u'}\right]_{(c)}$$

$$(r = 2, 3, 4\ldots)$$

längt dagegen u' von u ab, u. zw. ist $u' = u$, so kann der partielle Differential-
rgend einer der betrachteten Funktionaloperationen der Funktion $F(x, u)$ nach ihrer

unteren Grenze gebildet werden, indem man zwei Differentialquotienten nach u bil
einen so, als ob die Funktion $F(x, u)$ *von u unabhängig wäre*, den *andern so, al*
untere Grenze eine von u verschiedene und unabhängige Grösse wäre, und indem m
die so erhaltenen einseitigen Differentialquotienten addirt:

V. *a*) $$\frac{\partial}{\partial u}\,[L\,F(x,u)_{x=u}^{x=x}] = \frac{F(u,u)}{x-u} + L\left[\frac{\partial\,F(x,u)}{\partial u}\right]_{x=u}^{x=x}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\,[L_r F(x,u)_{x=u}^{x=x}] = (-1)^{r-1}\,\frac{\psi(x-u,\ r-1)}{x-u}\,.\,F(u,u) + L_r\left[\frac{\partial\,F(x,u)}{\partial u}\right]_x^x$$

Die Gleichungen unter (19) und (20) sind jedoch nur dann brauchbar, wen
ihren rechten Theilen vorkommenden Funktionaloperationen bestimmte endliche Grös

---

b) „Der gewöhnliche p^{te} Differentialquotient des Logials: $Lf(x)_{(c)} \equiv Lf(x)_{x_0}^x$
der unabhängig-variablen oberen Grenze x unterscheidet sich von dem gleichbes
Logiale des p^{ten} Differentialquotienten der Funktion $f(x)$ nur um einen bezüglich de
Grenze x *algebraischen* Ausdruck, so lange als beide bestimmte endliche Grössen si

Dieser Satz kann sowohl direkt durch Differentiation der *Definitionsglei*
der Logiale, als auch auf Grund des Theoremes *F*) in Nr. III. bewiesen werden. Wi
hier den letzteren Weg.

Das Theorem *F*) liefert uns die Gleichung:

(20) $$\frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi}\,f(x)_{(c)}\right] = \frac{d^\xi}{dx^\xi}\left[\frac{d^p}{dx^p}\,f(x)\right]_{(c)} + \Sigma_{m=1}^{m=p}\,\frac{f^{p-m}(u)\,.\,(x-u)^{-\xi-m}}{\Gamma(-\xi-m+1)}$$

und lehrt zugleich, dass dieselbe nur dann benützt werden darf, wenn die Funktione
$f'(x), f''(x), \ldots f^{p-1}(x)$ längs (c) vom Anfangspunkte $x=u$ bis zum unabhängig v
Endpunkte $x=x$ *endlich und stetig* bleiben, während $f^p(x+h)\,.\,h$ längs (c) mit h
verschwindet.

Nehmen wir an, es sei pars real. $\xi \leqq -1$, sonst aber sei ξ ganz beliebig
ist die Derivation: $\frac{d^\xi}{dx^\xi}\,f(x)_{(c)}$ nach Potenzen von ξ entwickelbar, weil $f(x)$ längs (c)
und $lim_{h=0}\,.\,[f'(x+h)\,.\,h] = 0$ ist.

Die Derivation: $\frac{d^\xi}{dx^\xi}\left[\frac{d^p}{dx^p}\,f(x)\right]_{(c)}$ ist jedenfalls endlich, weil die Fu
$\frac{d^p}{dx^p}\,f(x) \equiv f^p(x)$ längs (c) der Bedingung: $lim_{h=0}\,.\,[f^p(x+h)\,.\,h] = 0$ genügt;
daher (in brauchbarer Weise) nach Potenzen von ξ entwickelbar sein, wenn man noch a
dass im *Endpunkte* x des Weges (c): $f^p(x)$ endlich und $lim_{h=0}\,.\,[f^{p+1}(x+h)\,.\,h]$
[siehe den Satz unter (12) in Nr. IV.]. Indem wir nun diese Annahme machen, kön
die beiden Theile der Gleichung (20) anstandslos nach positiven ganzen Potenzen vor
wickeln. Wenn wir sodann die beiderseits zu *gleichen* Potenzen von ξ gehörigen Koëff
einander gleich setzen, erhalten wir eine Reihe von Gleichungen, welche die p^{ten} Diffe
quotienten der Funktionaloperationen

$$Lf(x)_{(c)}, \quad L_r f(x)_{(c)} \quad (\text{für } r = 2, 3, 4 \ldots .)$$

ıgsweise durch die Funktionaloperationen

$$L[f^p(x)]_{(c)}, \quad L_r[f^p(x)]_{(c)}$$

Bezug auf den Endpunkt x des Weges (c), algebraïsch-logarithmische Ausdrücke ın.

Es ist nämlich — *einerseits*

$$\frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right] = \frac{d^p}{dx^p} f(x) + \frac{d^p}{dx^p}[Lf(x)_{(c)}] \cdot \xi + \frac{d^p}{dx^p}[L_2 f(x)_{(c)}] \cdot \xi^2$$

$$+ \frac{d^p}{dx^p}[L_3 f(x)_{(c)}] \cdot \xi^3 + \ldots . + \frac{d^p}{dx^p}[L_r f(x)_{(c)}] \cdot \xi^r + \ldots . ;$$

rerseits:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}\left[\frac{d^p}{dx^p} f(x)\right]_{(c)} = \frac{d^p}{dx^p} f(x) + L\left[\frac{d^p}{dx^p} f(x)\right]_{(c)} \cdot \xi^1 + L_2\left[\frac{d^p}{dx^p} f(x)\right]_{(c)} \cdot \xi^2$$

$$+ L_3\left[\frac{d^p}{dx^p} f(x)\right]_{(c)} \cdot \xi^3 + \ldots . + L_r\left[\frac{d^p}{dx^p} f(x)\right]_{(c)} \cdot \xi^r + \ldots . ,$$

gen:

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi - m + 1)} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} (\xi - 1)(\xi - 2) \ldots (\xi - m + 1)$$

$$\frac{(x-u)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi - m + 1)} = -\xi(\xi - 1)(\xi - 2) \ldots (\xi - m + 1) \cdot \frac{(x-u)^{-\xi}}{(-\xi)\Gamma(-\xi)}$$

$^m \cdot (m-1)!\, \xi\left[1 - C_1\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot \xi + C_2\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot \xi^2 + \ldots\right.$

$$\ldots + (-1)^{r-1} C_{r-1}\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot \xi^{r-1} + \ldots\Big]$$

$\psi(x-u, 1) \cdot \xi + \psi(x-u, 2) \cdot \xi^2 - \ldots + (-1)^{r-1} \cdot \psi(x-u, r-1) \cdot \xi^{r-1} + \ldots\Big]$

$^m \cdot (m-1)!\, \xi$

$)^{m+1} (m-1)!\left[\psi(x-u, 1) + C_1\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right)\right] \cdot \xi^2$

. . . . . .

$)^{m+r-1} \cdot (m-1)!\left[\psi(x-u, r-1) + C_1\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot \psi(x-u, r-2)\right.$

$$+ C_2\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot \psi(x-u, r-3) + \ldots + C^{r-2}\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot \psi(x-u, 1)$$

$$\left. + C_{r-1}\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right)\right] \cdot \xi^r$$

. . . . . .

h der Entwickelung von $\frac{(x-u)^{-\xi}}{(-\xi)\Gamma(-\xi)}$, und der Bedeutung der Symbole $\frac{1}{m-1}\Big)$ als Kombinationssummen der Elemente $\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{m-1}\right)$ siehe die n IV. und V.!]

$$\beta) \quad \Sigma_{m=1}^{m=p} f^{p-m}(u) \cdot \frac{(x-u)^{-\xi-m}}{\Gamma(-\xi-m+1)} =$$

$$= [\Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, f^{p-m}(u) \cdot (x-u)^{-m}] \cdot \xi$$

$$- \Big[\psi(x-u,1) \cdot \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, f^{p-m}(u)(x-u)^{-m}$$

$$+ \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, C_1\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) f^{p-m}(u)(x-u)^{-m}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{r-1} \Big[\psi(x-u, r-1) \cdot \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, f^{p-m}(u)(x-u)^{-m}$$

$$+ \psi(x-u, r-2) \cdot \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, C_1\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot f^{p-m}(u) \cdot (x-u)^{-m}$$

$$+ \psi(x-u, r-3) \cdot \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, C_2\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot f^{p-m}(u) \cdot (x-u)^{-m}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \psi(x-u, 1) \cdot \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, C_{r-2}\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot f^{p-m}(u) \cdot (x-u)^{-m}$$

$$+ \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, C_{r-1}\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) \cdot f^{p-m}(u)(x-u)^{-m}$$

$+$ etc.

Addirt man die Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$, so erhält man den rechten Theil der chung (20) nach den positiven ganzen Potenzen von ξ entwickelt. Vergleicht man nun Entwickelung mit jener des linken Theiles der Gleichung (20) unter (20a), so entsteht die Gleichsetzung der gleichnamigen Koëfficienten beider der nachstehende Satz:

VI. „Es ist:

$$a) \quad \frac{d^p}{dx^p}[Lf(x)_{(c)}] = L\left[\frac{d^p}{dx^p} f(x)\right]_{(c)} + \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, f^{p-m}(u) \cdot (x-u$$

$$= Lf^p(x)_{(c)} + \frac{f^{p-1}(u)}{u-x} + \frac{1!\, f^{p-2}(u)}{(u-x)^2} + \frac{2!\, f^{p-3}(u)}{(u-x)^3} + \ldots + \frac{(p-2)!\, f'(u)}{(u-x)^{p-1}} + \frac{(p-1)!}{(u-}$$

und

$$\frac{d^p}{dx^p}[L_r f(x)_{(c)}] = L_r[f^p(x)]_{(c)} + \varphi(x-u, p, 1) \cdot \psi(x-u, r-1) + \varphi(x-u, p, 2)\, \psi(x-u,$$

$$b) \quad + \varphi(x-u, p, 3) \cdot \psi(x-u, r-3) + \ldots$$

$$\ldots + \varphi(x-u, p, r-1) \cdot \psi(x-u, 1) + \varphi(x-u, p, r)$$

für: $r = 2, 3, 4 \ldots$, $\varphi(x-u, p, 1) \equiv \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, f^{p-m}(u)(x-u)^{-m}$

$$\varphi(x-u, p, r) \equiv (-1)^{r-1} \Sigma_{m=1}^{m=p} (-1)^m (m-1)!\, C_{r-1}\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{m-1}\right) f^{p-m}(u) \cdot (x-$$

$$\psi(x-u, r-1) \equiv \frac{[log(x-u)]^{r-1}}{(r-1)!} + K_1 \cdot \frac{[log(x-u)]^{r-2}}{(r-2)!} + K_2 \cdot \frac{[log(x-u)]^{r-3}}{(r-3)!} +$$

$$\ldots + K_{r-2} \cdot log(x-u) + K_{r-1}.$$

Die Gleichungen unter $a)$ und $b)$ sind nur brauchbar, wenn die Funktionen $f'(x), f''(x) \ldots f^{p-1}(x)$ längs dem Wege (c) vom Anfangspunkte: u bis zum unabhängig ablen Endpunkte: x endlich und stetig sind, $lim_{h=0} \cdot [f^p(x+h) \cdot h]$ längs (c) verschw und ausserdem im Endpunkte x des Weges: $f^p(x)$ endlich und $lim_{h=0} \cdot [f^{p+1}(x+h) \cdot h$

Sie gelten also, etwas spezieller, auch, wenn die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$,$f''(x)$, $\ldots f^{p-1}(x)$,) längs (c) ***endlich* und *stetig*** bleiben."

VI.α) Wenn $f(u)=f'(u)=f''(u)=\ldots=f^{p-1}(u)=0$ ist, $lim_{h=0}.[f^p(x+h).h]=0$; (c), und ausserdem im *Endpunkte* x des Weges (c): $f^p(x)$ endlich und

$$lim_{h=0}.[f^{p+1}(x+h).h]=0$$

so ist:

$$\frac{d^p}{dx^p}[Lf(x)_{(c)}]=L\left[\frac{d^p}{dx^p}f(x)\right]_{(c)}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}[L_rf(x)_{(c)}]=L_r\left[\frac{d^p}{dx^p}f(x)\right]_{(c)}\ (r=2,3,4\ldots),$$

es ist in diesem Falle gleichgiltig, ob man von dem längs (c) von $x=u$ bis $x=x$ eckten Logial der Funktion: $f(x)$ den p^{ten} (gewöhnlichen) Differentialquotienten, oder nan umgekehrt das gleichbestimmte Logial von dem p^{ten} Differentialquotienten der- n nimmt."

---

c) Wir wollen nunmehr zeigen, wie sich ein beliebiger ξ^{ter} über die Curve (c) von u bis $x=x$ ausgedehnter Differentialquotient von einem gleichbestimmten Logiale einer bigen Funktion $f(x)$ bilden lässt.

Es seien ξ und η zwei, von einander unabhängig veränderliche, im allgemeinen com- Grössen; die erstere ξ sei beliebig, der reelle Theil der letzteren η dagegen, welche ebenfalls ganz beliebig sein soll, sei *kleiner* als: -1; der Derivationsweg (c) des ξ^{ten} rentialquotienten der beliebigen Funktion $f(x)$ liege seiner ganzen Ausdehnung nach in Brauchbarkeitsgebiete dieser Derivation, also *mit* dem letzteren in der adjungirten iche der Funktion (Siehe Nr. I.); endlich sei, falls der reelle Theil von ξ *positiv* oder h Null sein sollte, „n" die *grösste positive ganze Zahl* (mit *Einschluss* der Null), welche h oder *kleiner* ist, d. h. es sei: $n\leqq$ pars real. $\xi<n+1$, $n+1\leqq$ pars real. $(\xi+1)$ $+2$, $n+2=\nu$, wo ν dieselbe Bedeutung hat, wie in den Gleichungen $A)$ $A')$ in Nr. I.

Unter diesen Voraussetzungen besteht kraft der Theoreme unter $G)$ und $G')$ in III. die Gleichung:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi}\left[\frac{d^\eta}{dx^\eta}f(x)_{(c)}\right]_{(c)}=\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi}f(x)_{(c)}\right]_{(c)}=\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}}f(x)_{(c)},$$

, im Falle pars real. $\xi\gtrless 1$ sein sollte, ausserdem noch:

$$f(u)=f'(u)=f''(u)=\ldots=f^{n-1}(u)=0$$

Da pars real. $(\xi+\eta)<$ pars real. $(\xi-1)$ ist, so bleibt die Derivation $\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}}f(x)_{(c)}$, unktion ihres unabhängig variablen Endpunktes x von $x=u$ bis $x=x$ endlich, *wenn real.* $\xi<1$ [also pars real. $(\xi+\eta)<0$] ist. *Ist aber pars real.* $\xi\gtrless 1$, so hat man $A')$ in Nro. I., wenn dort $\xi+\eta$ statt ξ, und zugleich [wegen pars real. $(\xi+\eta+1)$ ars real. $\xi<n+1$, $n+1=\nu-1$] $n+1=\nu-1$ statt ν geschrieben wird:

$$\frac{+\eta}{+\eta}f(x)_{(c)}=\frac{f^n(u)(x-u)^{-\xi-\eta+n}}{\Gamma(-\xi-\eta+n+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\xi-\eta+n+1)}\int_{z=u}^{z=x}\frac{f^{n+1}(z)\,dz}{(x-z)^{\xi+\eta-n}}$$

weil, soll die Gleichung (21) für pars real. $\xi \gtreqless 1$ überhaupt gelten,

$$f(u) = 0,\ f'(u) = 0,\ f''(u) = 0, \ldots f^{n-1}(u) = 0$$

sein muss.

Die Derivation: $\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$ ist also auch in diesem Falle, wie in dem v

wegen pars real. $(\xi+\eta) <$ pars real. $(\xi-1) < n$ (unter den obwaltenden Umständ Funktion ihrer oberen Grenze x von $x = u$ bis $x = x$ längs (c) ***endlich*** **und** ***stetig***; si daher nach dem Satze unter (12) in Nro. IV. anstandslos in eine nach den positiven Potenzen von $(\xi+\eta)$, mithin auch in eine nach den Potenzen von η fortschreitende entwickelt werden, welche insolange brauchbar ist, als im Endpunkte x des Weges $(c$ endlich und $lim_{h=0} . [f'(x+h) . h] = 0$ ist. Daraus folgt aber sofort, dass auch die andern in der Gleichung (21) vorkommenden Derivationen:

$$\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}}\left[\frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = \frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}}\left[\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)}$$

unter den obigen Voraussetzungen nach positiven ganzen Potenzen von η ent werden können.

Man hat aber auf Grund des Satzes unter (12) in Nro. IV.:

$$\frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}} f(x)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} . \eta + L_2 f(x)_{(c)} . \eta^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c)} . \eta^r + \ldots$$

$$(22\alpha) \qquad \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}}\left[\frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} + \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} [Lf(x)_{(c)}]_{(c)} . \eta + \ldots$$

$$\ldots + \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} [L_r f(x)_{(c)}]_{(c)} . \eta^r + \ldots$$

für die eine —

$$(22\beta) \qquad \frac{d^{\eta}}{dx^{\eta}}\left[\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = \frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)} + L\left[\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} . \eta + \ldots$$

$$\ldots + L_r\left[\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} . \eta^r + \ldots$$

für die andere der beiden Derivationen. Man erhält somit schliesslich, in dem man gleichen Potenzen von η gehörigen Koëfficienten einander gleichsetzt:

VII. „ $$\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} [Lf(x)_{(c)}]_{(c)} = L\left[\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)}$$

und

$$\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} [L_r f(x)_{(c)}]_{(c)} = L_r\left[\frac{d^{\xi}}{dx^{\xi}} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} \quad (r = 2, 3, 4, 5 \ldots)$$

wenn der Weg (c) in dem Brauchbarkeitsgebiete der ξ^{ten} Derivation von $f(x)$ liegt, im punkte desselben „x“: $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} . [f'(x+h) . h] = 0$ und, im Falle par $\xi \gtreqless 1$ sein sollte, ***ausserdem*** noch:

$$f(u) = 0,\ f'(u) = 0,\ f''(u) = 0, \ldots f^{n-1}(u) = 0$$

ist, wo n die ***grösste*** positive ganze Zahl bezeichnet, welche gleich oder kleiner ist a reelle Theil von ξ.“

Dieses Theorem lässt sich mit Rücksicht auf den Begriff der „Brauchbarkeitsgebiete“ zter Derivationen [siehe Nr. I. bei A') und gegen Ende, sowie die bei dem Theoreme G) III. stehende Anmerkung!] in nachstehender Weise formuliren:

VII. „Die Reihenfolge, in welcher eine längs der Curve (c) vom Punkte $x = u$ bis unabhängig veränderlichen Punkte $x = x$ zu erstreckende Logiirung, und eine *gleich-ıte* (nicht gewöhnliche) ξ-malige Derivirung *nacheinander* von einer und derselben ɔn: $f(x)$ genommen werden, ist für das Resultat gleichgiltig:

1. für pars real. $\xi \leqq -1$, wenn $lim_{h=0} . [f(x+h) . h]$ längs (c) verschwindet, und ı im Endpunkte x dieses Weges: $f(x)$ *endlich* und $lim_{h=0} . [f'(x+h) . h] = 0$ ist;
2. für pars real. $(\xi) < 0$, wenn die Funktion $f(x)$ längs (c) *endlich* **und** *stetig* ist;
3. für $0 \leqq$ pars real. $\xi < 1$, wenn die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ längs (c) *endlich etig* sind; endlich
4. für $\mathfrak{n} \leqq$ pars real. $\xi < \mathfrak{n}+1$ $(\mathfrak{n} = 1, 2, 3 \ldots)$, wenn $f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots$ $^{\mathfrak{n}-1}(u) = 0$ und die Funktionen $f^{\mathfrak{n}}(x)$ und $f^{\mathfrak{n}+1}(x)$ längs (c) *endlich* **und** *stetig* sind.

---

d) Stellen die Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ... irgend welche lineare Funktionaloperationen vor, *hintereinander* von einer beliebigen Funktion $f(x)$ bezüglich der Unabhängigen x en —, und von welchen *jede einzelne* über *denselben* Weg (c) von $x = u$ bis $x = x$ hnt wird, wobei die Obergrenze „x“ die Rolle der unabhängigen Variabeln, die Unter- „u“ die einer Constanten spielt: so bezeichnen wir die dadurch entstehende Funktion

$$\ldots \mathfrak{C}\,[\mathfrak{B}\,[\mathfrak{A} f(x)_{(c)}]_{(c)}]_{(c)} \equiv \ldots \mathfrak{C}\,[\mathfrak{B}\,[\mathfrak{A} f(x)]_{x=u}^{x=x}]_{x=u}^{x=x}]_{x=u}^{x=x}$$

rch:

$$\ldots \mathfrak{C}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,[f(x)]_{(c)} \equiv \ldots \mathfrak{C}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,[f(x)]_{x=u}^{x=x},$$

ir einfach die Operationszeichen: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ... in der *nämlichen* Ordnung, in welcher urch bezeichneten Funktionaloperationen von der Funktion $f(x)$ genommen werden, nd von der, in Klammern eingeschlossenen, Funktion von der Rechten gegen die ufeinanderfolgen lassen, und den allen gemeinsamen Weg (oder die gemeinsamen $x = u$, $x = x$) rechter Hand in bekannter Weise andeuten. Sind die aufeinander- n Funktionaloperationen *identisch*, — in welchem Falle wir sie sprechender Weise asselbe Zeichen, z. B. „$\mathfrak{C}$“, darstellen: so nennen wir die Funktion, welche entsteht, e lineare Funktionaloperation „$\mathfrak{C}$“ zwei-, drei-, r-mal hintereinander von der Funk- demselben Wege (c) entlang genommen wird, wobei die *Obergrenze* „x“ als *unabhängig* die Untergrenze „u“ als konstant gilt, „die zweite-, dritte- ... r^{te} Funktionaloperation ıens $\mathfrak{C}$“ und stellen sie kurz durch:

$$\mathfrak{C}^r f(x)_{(c)} \equiv \mathfrak{C}^r f(x)_{x=u}^{x=x}$$

lass

$$\mathfrak{C}^r f(x)_{(c)} \equiv \mathfrak{C}_{(r\text{-mal})}\,\mathfrak{C}_{(r-1\text{-mal})} \ldots \mathfrak{C}_{(2\text{-mal})}\,\mathfrak{C}_{(1\text{-mal})} \cdot f(x)_{(c)}$$

Dies festgesetzt, schreiten wir zur Enthüllung der merkwürdigen Beziehung, in welcher ren Funktionaloperationen

$$Lf(x)_{(c)},\ L_2 f(x)_{(c)},\ L_3 f(x)_{(c)} \ldots . L_r f(x)_{(c)} \ldots .$$

(die Koëfficienten in der Entwickelung einer beliebigen *endlichen* Derivation nach de tiven ganzen Potenzen ihres Index) zu einander stehen.

Es seien ξ, η zwei von einander unabhängige endliche Grössen, welche di dingungen:

$$\text{pars real. } \xi \leqq -1, \quad \text{pars real. } \eta \leqq -1$$

genügen, *sonst* aber *ganz beliebig* sind.

Unter dieser Voraussetzung fällt das Brauchbarkeits- und zugleich Endli Gebiet der Derivation $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$ mit der, der Funktion $f(x)$ adjungirten x-Fläche zus $lim_{h=0} . [f(x+h) . h]$ ist längs einem jeden, *innerhalb* dieser Fläche, von dem Laufp beschriebenen Wege (c) gleich Null; die Derivationen

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}, \quad \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

als Funktionen ihres variablen Endpunktes x aufgefasst, sind (wegen pars real. ξ pars real. $(\xi+\eta) < -2 < -1$) längs (c) von $x=u$ bis $x=x$ *endliche* **und** *stetige* G und die Gleichung (21) oder

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)}$$

gilt für *jeden* Weg (c), welcher von dem Laufpunkte x der darin vorkommenden Deriv *innerhalb* der adjungirten x-Fläche der Funktion $f(x)$, von einem festen Anfangspunkt bis zu dem unabhängig variablen Endpunkt $x=x$ beschrieben wird.

Wie früher, ist auch jetzt die Derivation: $\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)$ in eine nach den P von $(\xi+\eta)$ fortlaufende—, mithin auch in eine nach den aufsteigenden Dimensio Potenzenprodukte von ξ und η geordnete Reihe entwickelbar; dasselbe muss also a die ihr nach (21) *gleiche* Derivation: $\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)}$ der Fall sein; wenn nur e dem Satze unter (12) in Nr. IV. zur Brauchbarkeit jener Entwickelung nothwendige gung: „dass im Endpunkte x des Weges (c) $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} . [f'(x+h)$ sei" erfüllt ist.

Nehmen wir dies an, so können wir nach dem Gesagten beide Theile der G (21), sowohl den linken-:

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)},$$

als auch den rechten Theil:

$$\frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)$$

einwurfsfrei nach den aufsteigenden Dimensionen der Potenzenprodukte von ξ und wickeln. Thun wir dies, und setzen wir dann die zu *denselben* Potenzenprodukten v

gen Koëfficienten beider Entwickelungen *einander gleich*, so erhalten wir eine Schar leichungen, aus welchen sich der, zwischen den linearen Funktionaloperationen:

$$Lf(x)_{(c)},\ L_2 f(x)_{(c)},\ L_3 f(x)_{(c)} \ldots : L_r f(x)_{(c)} \ldots .$$

ıende Zusammenhang mit Leichtigkeit ergibt.

Wir setzen in dem rechten Theile der auch hier giltigen Gleichung

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} + L\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} \cdot \eta + L_2 \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} \cdot \eta^2$$
$$+ L_3 \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} \cdot \eta^3 + \ldots + L_r \frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} \cdot \eta^r + \ldots .$$

s erste Glied seinen Werth nach Gleichung (12) in Nr. IV.:

$$\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^r + \ldots ,$$

ehmen von dieser Gleichung der Reihe nach die linearen Funktionaloperationen $L, L_2, \ldots L_r \ldots$ nach dem unabhängig variablen Endpunkte x des Weges (c), ausgedehnt über ben Weg von $x = u$ bis $x = x$; wobei wir ξ als eine Konstante behandeln und die in unter $\alpha)$ und $\gamma)$ angeführten Eigenschaften der linearen Funktionaloperationen in Anng bringen.

Die *so* erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{}{\xi} f(x)_{(c)} = Lf(x)_{(c)} + LLf(x)_{(c)} \cdot \xi + LL_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + LL_{r-1} f(x)_{(c)} \cdot \xi^{r-1} + \ldots$$

$$\frac{}{\xi} f(x)_{(c)} = L_2 f(x)_{(c)} + L_2 Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_2 L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_2 L_{r-2} f(x)_{(c)} \cdot \xi^{r-2} + \ldots$$

$$\frac{}{\xi} f(x)_{(c)} = L_3 f(x)_{(c)} + L_3 Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_3 L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots + L_3 L_{r-3} f(x)_{(c)} \cdot \xi^{r-3} + \ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{}{\xi} f(x)_{(c)} = L_r f(x)_{(c)} + L_r Lf(x)_{(c)} \cdot \xi + L_r L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 + \ldots$$

. . . . . ,

. . . . . .

liciren wir der Reihe nach respektive mit $\eta, \eta^2, \eta^3, \ldots \eta^r \ldots$, *addiren* sie zu der nglichen Gleichung für $\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}$ hinzu, *ordnen* dann die rechts von Gleichheits- ı stehenden Glieder nach den aufsteigenden Dimensionen der Potenzprodukte von ξ und beachten endlich, dass der linke Theil der auf diese Weise gewonnenen Gleichung 22β) der Derivation:

$$\frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)}$$

ist.

Dies führt uns zu der Gleichung:

$$(24\alpha)\qquad \frac{d^\eta}{dx^\eta}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} =$$

$$= f(x) + \left.\begin{matrix} Lf(x)_{(c)} \cdot \xi \\ + Lf(x)_{(c)} \cdot \eta \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 \\ + LLf(x)_{(c)} \cdot \xi\eta \\ + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \eta^2 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} L_3 f(x)_{(c)} \cdot \xi^3 \\ + LL_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2\eta \\ + L_2 Lf(x)_{(c)} \cdot \xi\eta^2 \\ + L_3 f(x)_{(c)} \cdot \eta^3 \end{matrix}\right\} + \ldots$$

$$\ldots + \left.\begin{matrix} L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^r \\ + LL_{r-1} f(x)_{(c)} \cdot \xi^{r-1}\eta \\ + L_2 L_{r-2} f(x)_{(c)} \cdot \xi^{r-2}\eta^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ + L_{r-1} Lf(x)_{(c)} \cdot \xi\eta^{r-1} \\ + L_r f(x)_{(c)} \cdot \eta^r \end{matrix}\right\} + \text{etc.} \ldots,$$

welcher wir sofort, wenn wir in der Gleichung (12) der Nummer IV. $\xi + \eta$ für ξ sch die Gleichung:

$$(24\beta)\qquad \frac{d^{\xi+\eta}}{dx^{\xi+\eta}} f(x)_{(c)} =$$

$$= f(x) + Lf(x)_{(c)} \cdot (\xi+\eta) + L_2 f(x)_{(c)} \cdot (\xi+\eta)^2 + L_3 f(x)_{(c)} \cdot (\xi+\eta)^3 + \ldots$$
$$\ldots + L_r f(x)_{(c)} \cdot (\xi+\eta)^r + \ldots$$

$$= f(x) + \left.\begin{matrix} Lf(x)_{(c)} \cdot \xi \\ + Lf(x)_{(c)} \cdot \eta \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 \\ + 2L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi\eta \\ + L_2 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2 \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} L_3 f(x)_{(c)} \cdot \xi^3 \\ + 3L_3 f(x)_{(c)} \cdot \xi^2\eta \\ + 3L_3 f(x)_{(c)} \cdot \xi\eta^2 \\ + L_3 f(x)_{(c)} \cdot \eta^2 \end{matrix}\right\} + \ldots$$

$$\ldots + \left.\begin{matrix} + L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^r \\ + \binom{r}{1} L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^{r-1}\eta \\ + \binom{r}{2} L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi^{r-2}\eta^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \binom{r}{r-1} L_r f(x)_{(c)} \cdot \xi\eta^{r-1} \\ + \binom{r}{r} L_r f(x)_{(c)} \cdot \eta^r \end{matrix}\right\} + \text{etc.} \ldots$$

zum Zwecke der Vergleichung gegenüber stellen können.

Da nun die linken Theile dieser Gleichungen: (24α) und (24β), wie wir i einander gleich sind, so müssen auch die in ihren rechten Theilen zu *gleichen* Pot dukten gehörigen Koëfficienten *einander gleich* sein. Wir erhalten also schliesslich, ind die *entsprechenden* Koëfficienten der beiden Reihen einander *gleich* setzen, die wi Relationen:

$$(25)\qquad L_2 f(x)_{(c)} = \frac{1}{2} LLf(x)_{(c)}$$

$$L_3 f(x)_{(c)} = \frac{1}{3} LL_2 f(x)_{(c)} = \frac{1}{3} L_2 Lf(x)_{(c)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L_r f(x)_{(c)} = \frac{1}{r} LL_{r-1} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\binom{r}{2}} L_2 L_{r-2} f(x)_{(c)} = \frac{1}{\binom{r}{3}} L_3 L_{r-3} f(x)_{(c)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{\binom{r}{r-1}} L_{r-1} Lf(x)_{(c)},$$

lchen successive

$$L_2 f(x) = \frac{1}{2!} LLf(x)_{(c)} = \frac{1}{2!} L^2 f(x)_{(c)},$$

$$L_3 f(x)_{(c)} = \frac{1}{3} L\left[\frac{1}{2!} L^2 f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = \frac{1}{3!} L^3 f(x)_{(c)},$$

$$L_4 f(x)_{(c)} = \frac{1}{4} L\left[\frac{1}{3!} L^3 f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = \frac{1}{4!} L^4 f(x)_{(c)},$$

. . . . . .

in:

$$L_r f(x)_{(c)} = \frac{1}{r} LL_{r-1} f(x)_{(c)} = \frac{1}{r!} L_{(r\text{-mal})} L_{(r-1\text{-mal})} \ldots L_{(1\text{-mal})} f(x)_{(c)}$$

$$= \frac{1}{r!} L^r f(x)_{(c)}$$

Die letztere Gleichung gilt für $r = 1, 2, 3, 4 \ldots$, wenn man unter dem Symbole) die Funktion $f(x)$ selbst, und unter dem Symbole $L_1 f(x)_{(c)}$ das Logial $Lf(x)_{(c)}$ ver-)ieselbe ist, sowie die Gleichungen unter (25), aus welchen sie hervorging, nur dann ıar, wenn $lim_{h=0} . [f(z+h) . h]$ in *jedem* Punkte z des Weges (c) gleich Null, und im Endpunkte $z = x$ desselben $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} . [f'(x+h) . h] = 0$ ist.

Verstehen wir jetzt unter „ξ" wieder eine *ganz beliebige*, im Allgemeinen complexe, unabhängige Grösse, und substituiren wir die, der Gleichung VIII. entnommenen, der linearen Funktionaloperationen: $L_2 f(x)_{(c)}, L_3 f(x)_{(c)}, \ldots L_r f(x)_{(c)} \ldots$ in die Glei- 12) in Nr. IV.: so geht der betreffende Satz in das nachstehende *wichtige und merk- Theorem* über, in welchem unsere bisherigen Untersuchungen als in ihrem **Haupt- isse** gipfeln.

IX. „Jede **endliche** über eine beliebige Curve (c) von einem festen Anfangspunkte is zu einem unabhängig variablen Endpunkte $z = x$ ausgedehnte Derivation

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} \equiv \frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{z=u}^{z=x}$$

ls Funktion ihres beliebigen Index ξ, in eine *konvergente* nach den positiven ganzen n des *letzteren* fortschreitende Reihe von der Form:

$$\frac{d^\xi}{dz^\xi} f(z)_{(c)} = f(x) + Lf(x)_{(c)} . \xi + L^2 f(x)_{(c)} . \frac{\xi^2}{2!} + L^3 f(x)_{(c)} . \frac{\xi^3}{3!} + \ldots .$$

$$\ldots . + L^r f(x)_{(c)} . \frac{\xi^r}{r!} + \ldots .$$

elt werden, wenn im Endpunkte x des Derivationsweges „(c)": $f(x)$ *endlich* und $\cdot [f'(x+h) . h] = 0$ ist [also etwas spezieller auch, wenn im Endpunkte „x": $f(x)$

und $f'(x)$ *endliche* Grössen sind]. Jeder Koëfficient der aufeinanderfolgenden, durch treffenden Faktoriellen dividirten Indexpotenzen:

$$\xi^0, \frac{\xi^1}{1!}, \frac{\xi^2}{2!}, \frac{\xi^3}{3!}, \cdots \frac{\xi^r}{r!} \cdots,$$

von dem zweiten angefangen, ist mittels *eines* und *desselben* einfachen auf die V bezüglichen Bildungs- oder Ableitungsgesetzes, nämlich mittels einer nach x gen von $x = u$ über (c) bis $x = x$ ausgedehnten „Logiirung" ableitbar".

Die Analogie der obigen Reihe für eine beliebige *endliche* Derivation mit wickelung einer Exponentialgrösse nach den Potenzen ihres Exponenten, sowie die welche zwischen der „*Logiirung*" der *Grundfunktion* $f(x)$ einer beliebigen Derivation *Logarithmirung* der *Basis* einer beliebigen Exponentialgrösse in den bezüglichen R wickelungen besteht, tritt jetzt *klar* zu Tage und *rechtfertigt* vollständig die Namen und „*Logiirung*", welche ich mir erlaubt habe für die betreffende lineare Funktional vorzuschlagen.

---

e) Wenn wir die Gleichung unter IX. r-mal hintereinander nach dem von unabhängig gedachten Index ξ differentiiren, so entsteht:

$$\frac{\partial^r}{\partial \xi^r}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right] = L^r f(x)_{(c)} + L^{r+1} f(x)_{(c)} \cdot \xi + L^{r+2} f(x)_{(c)} \cdot \frac{\xi^2}{2!} + L^{r+3} f(x)_{(c)} \cdot \frac{\xi^3}{3!}$$

wenn wir sie hingegen r-mal hintereinander bezüglich der Unabhängigen x von $x = u$ bis $x = x$ *logiiren*, indem wir ξ als konstant behandeln und die unter $\alpha)$, $\gamma)$ in Nr geführten Eigenschaften der linearen Funktionaloperationen berücksichtigen:

$$L^r\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)} = L^r f(x)_{(c)} + L^{r+1} f(x)_{(c)} \cdot \xi + L^{r+2} f(x)_{(c)} \cdot \frac{\xi^2}{2!} + L^{r+3} f(x)_{(c)} \cdot \frac{\xi^3}{3!} +$$

Wir erhalten also schliesslich, in Anbetracht der Gleichheit der rechten T beiden Gleichungen, den gewiss bemerkenswerthen Satz:

X. „Es ist:

$$\frac{\partial^r}{\partial \xi^r}\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right] = L^r\left[\frac{d^\xi}{dx^\xi} f(x)_{(c)}\right]_{(c)},$$

d. h. es ist für das Resultat gleichgiltig, *ob man* eine beliebige *endliche* Indexfunkti vation mit variablem Index) r-mal partiell nach ihrem Index differentiirt (d. h. partiellen Differentialquotienten nach dem Index bildet), *oder ob man* sie r-mal hinte in Bezug auf ihre unabhängig variable obere Grenze x längs dem Derivationswege $x = u$ bis $x = x$ *logiirt*, und dabei ξ als eine Konstante behandelt; wenn nur in ihn punkte „x": $f(x)$ endlich und $lim_{h=0} . [f'(x+h) . h] = 0$ ist, also etwas speziel wenn in ihrem Endpunkte x: $f(x)$ und $f'(x)$ *endliche Grössen* sind."

---

f) Ein aufmerksamer Blick auf die Definitionsgleichungen: $A)$, $A')$ in Nr I. in Nro. IV., und die darauf fussenden Entwickelungen lehrt, dass das Studium grale von der Form:

$$\int \frac{F(z)\,dz}{(x-z)^{\lambda}_{(c)}} \equiv \int_{z=u}^{z=x} \frac{F(z)\,dz}{(x-z)^{\lambda}} \quad (\lambda \gtrless 1)$$

onderer von $F(x)$ sich derivirender Funktionen von x mit dem Studium der Differential-
ten oder Integrale von beliebiger Ordnungszahl identisch ist; ferner, dass das Studium
genschaften und des Zusammenhanges der Integrale von der Form

$$\int \frac{F(x)-F(z)}{x-z}\,dz_{(c)}, \quad \int \frac{F(x)-F(z)}{x-z}\log(x-z)\,dz_{(c)},$$

$$\frac{)-F(z)}{x-z}[\log(x-z)]^2\,dz_{(c)} \ldots \int \frac{F(x)-F(z)}{x-z}[\log(x-z)]^r\,dz_{(c)} \ldots (r=0,1,2,3\ldots),$$

ieselben als Funktionen der variablen oberen Grenze x betrachtet werden, welche
eines eigenartigen Bildungs- oder Ableitungsgesetzes aus der Funktion $F(x)$ hervor-
im *Wesentlichen* mit der **„Logialrechnung“** zusammenfällt; wenn wir darunter jenen
Zweig der höheren Analysis verstehen, welcher von den allgemeinen Eigenschaften der
e“, von der Berechnung der „Logiale“ spezieller Funktionen und von ihren Anwen-
handelt.

Aus den grundlegenden Untersuchungen des Verfassers geht also die *merkwürdige*
he hervor, dass — **weder** die Forschungen über begrenzte Differentialquotienten mit
er Ordnungszahl von einer beliebigen Funktion $F(x)$, wobei dieselben als Funktionen
aufgefasst werden, — **noch** jene, bei welchen sie als eigenthümliche Funktionen ihres
en Differentialexponenten betrachtet und nach Potenzen des letzteren entwickelt werden,
ch *aus* der *Integralrechnung* herausführen; *sondern*, dass die bezüglichen Untersu-
n vielmehr *nur* die *Absonderung* von zwei eigenartigen, mit einander innig zusammen-
len Disciplinen aus der *gewöhnlichen* Integralrechnung zur Folge haben können.

Anmerkungen und Berichtigungen.

1. Der auf Seite 4. unter (2) angeführte Grenzwerth, dem der Ausdruck $F(u$ für verschwindende δ zustrebt, fliesst aus der angezogenen Abhandlung im XII. B Zeitschrift für Mathematik und Physik, in dem *dort* nach der Gleichung (14*b*) auf für $p = \nu$:

$$lim_{\delta=0} \cdot F(u, x, \xi, \delta)_f = \frac{d^\nu}{dx^\nu} lim_{\delta=0} \cdot F(u, x, \xi - \nu, \delta)_f$$

und nach Gleichung II. auf Seite 455, wenn daselbst statt des dortigen $\xi : \xi - \nu$ ges wird [was wegen pars real. $(\xi - \nu) \leqq -1$ erlaubt ist]

$$D^{\xi-\nu} f(x)_{x=u}^{x=x} = lim_{\delta=0} \cdot F(u, x, \xi - \nu, \delta)_f = \frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)} \int_{\vartheta=u}^{\vartheta=x} \frac{f(\vartheta)\, d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-}}$$

ist.

2. Seite 4, Zeile 11 von unten, sowie in der Folge (namentlich in Nro. II.) i $\binom{\xi}{p}$ für $p = 0, 1, 2, 3 \ldots n \ldots$ der Binominalkoëfficient:

$$\binom{\xi}{p} = \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-p+1)}{1.2.3\ldots p}$$

zu verstehen.

3. Seite 24, Zeile 3 von unten ist die Nummer (26) der dort stehenden Gl welche im Setzkasten stecken blieb, links beizusetzen.

4. Endlich dürfte es, um *etwaigen* Missdeutungen und daraus entspringend würfen vorzubeugen, nicht überflüssig sein, darauf aufmerksam zu machen, dass die „*grösste*“ Allgemeinheit der Untersuchungen, von welcher im *Vorworte* die Rede is *unbedingte* ist, sondern sich eben nur auf *begrenzte* Derivationen *eindeutiger* Funktion *einzigen* Unabhängigen, die blos an **isolirten** Stellen *unstetig* werden können, bez Vorhinein ausgeschlossen sind also mehrdeutige Funktionen einer Variabeln, weil sie lich *eindeutige* Funktionen von *mehr* als der **einen** Variabeln sind (siehe Seite 7 solche Funktionen, welche sich *sprungweise* ändern, sobald der unabhängig-variabl gewisse gegebene *Linien* passirt.

Ueber

Hansens Methode,

ɔdätisches Dreieck auf die Kugel oder in die Ebene zu übertragen.

Inaugural-Dissertation

zur

ɪgung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität Leipzig

vorgelegt

von

Conrad Hahnig.

Dessau.
Druck von Weniger & Co.
1888.

Seinen Eltern

in dankbarer Liebe

der Verfasser.

Ueber

Hansens Methode,

eodätisches Dreieck auf die Kugel oder in die Ebene zu übertragen.

ERSTER THEIL.

§ 1.

Einleitung.

Uebertragung eines geodätischen Dreiecks auf die Kugel ie Ebene unter der Voraussetzung, dass dabei die Seiten ks ungeändert bleiben, wurde bekanntlich zuerst von Gauss isquisitiones generales circa superficies curvas" behandelt. ss haben dann verschiedene andere hervorragende Mathe- lerselben Aufgabe ihre besondere Aufmerksamkeit zuge- so Hansen[1]), Christoffel[2]), Weingarten[3]), und in Zeit Helmert[4]). Von den Genannten hat, — mit Aus-

[1] Geodätische Untersuchungen. 1865. Abhandlungen in der math.-phys. Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. VIII.

[2] Supplement zu der „Geodätische Untersuchungen" benannten Abhandlung der math.-phys. Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1868. Bd. IX.

[3] Reflexionen über die Reduktion der Winkel eines sphärischen Dreiecks, Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1869.

[4] Darlegung einer unbedeutend scheinenden Umformung der Endgleichungen des Supplementes zu den geodätischen Untersuchungen, durch welche etc. (Nebst einer Tafel für die Krümmungsmasse auf dem Erdsphäroid.) Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1872.

nahme Weingartens, dessen Entwicklungen, wie auch bemerkt, sich ziemlich eng an die von Gauss gegebenen a — jeder einen eigenen Weg eingeschlagen und die T geodätischen Dreiecke nach anderer Richtung ausba Während Christoffel, wie er selbst im Eingange sei suchungen sagt, einer von Gauss in den schon oben disquisitiones gegebenen Anregung folgend, die Theorie meinen schiefwinkligen Dreiecks in Angriff nahm und durch Einführung des Begriffes der „reduzierten Länge Entwicklungen, sowie durch besondere Wahl der Coor Lösung des Problems nur noch von derjenigen einer gleichung 3. Ordnung abhängig zu machen vermochte, ist von rein geometrischen Betrachtungen ausgehend, durch ihm selbst*) so genannte „Methode der successiven A zu seinen Resultaten gelangt, deren Wichtigkeit wohl v der Art ihrer Ableitung begründet ist.

Eine ungleich höhere Beachtung verdienen die Arbeiten Dieser hat zwar, wie Gauss, die Differentialformeln für winklige Dreieck nicht direkt entwickelt, sondern geh grosser Vorgänger erst durch Zusammensetzung zweier re Dreiecke zum schiefwinkligen Dreiecke über: allein ei seine Methode eine ihm ganz eigenthümliche, und dann seine Resultate diejenigen aller Uebrigen, was die Geltungsgebietes anbetrifft. In letzterer Beziehung u sie sich besonders vortheilhaft von Weingartens Fo denen sie, was die Vernachlässigung der Glieder höherer betrifft, gleichstehn. Diesen Vorzug verdankt die H Formel der Einführung gewisser Modificationen, welche ursprünglichen Form entbehrte. Dank diesen von Ha noch gefundenen Modifikationen steht nun die Formel, w des Geltungsgebietes und die Genauigkeit der mit ihre wonnenen Resultate betrifft, bisher noch unerreicht da, u Aufwand von Rechnung, welchen ihre Ableitung erfor noch als ein Mangel derselben angesehen werden.

---

2) Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Abha Königl. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1868.

3) Astronomische Nachrichten, Band 73 No. 1733. Band 7

4) Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höh Band I.

*) Helmert a. a. O. pag. 369.

Hansen'sche Ableitung hat ferner noch einen Nachtheil im
der wohl hauptsächlich die vielen meines Erachtens unge-
rten Angriffe gegen diese Formel, wenn nicht hervorgerufen,
sicherlich gefördert hat: den Nachtheil nämlich, dass sich,
Helmert*) bemerkt, die Fehlergrenzen bei derselben nicht
rsehen lassen. Hansen selbst hat den Beweis der grossen
eit seiner Formel auch nur induktiv durch die Resultate
ier Berechnungen geführt

Folgenden soll nun versucht werden, diesen Uebelständen
ı und zwar in doppelter Weise: einerseits wird unter
er Innehaltung des Ganges von Hansens Untersuchung
Ableitung der Formel desselben versucht worden, andrer-
aber auch der Vorzug, welchen diese Formel vor anderen,
n gleichwerthigen, durch ihre grössere Genauigkeit an der
es Geltungsgebietes, resp. durch die grössere Weite dieses
hat, auf seine Gründe hin untersucht werden.
besseren Orientirung über das Nachfolgende sei nun vorerst
r Ueberblick über den Gang der Hansen'schen Unter-
ı selbst gestattet.

Gang von Hansens Untersuchungen.

§ 2.

Formulierung der Aufgabe.

Aufgabe, um welche es sich hier handelt, lässt sich kurz
llen: Gegeben seien zwei in den drei Seiten übereinstimmende Dreiecke, deren jedes von drei auf der Fläche, welcher
Dreiecke angehört, gezogenen kürzesten Linien begrenzt
ie eine Fläche sei beliebig, aber stetig, gekrümmt, die
eine Kugel.
ht wird der Unterschied zweier correspondierender Drei-
, wenn man unter einem Dreieckswinkel den Winkel ver-
hen die ersten vom Schnittpunkte aus gezählten Elemente
ieckssеiten miteinander bilden.

§ 3.

Vorbereitende Entwicklungen.

egensatze zu Gauss, der bei seinen Entwicklungen von
teme partieller Differentialgleichungen zwischen zwei un-

*) nert, a. a. O. pag. 369.

abhängigen Variabeln ausging, legte Hansen ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu Grunde. Dies er dadurch, dass er die eine Kathete des zunächst rechtwinkligen Dreiecks als constant ansah. Bezeichn Hansen die constante Kathete durch k, die variable d Hypotenuse des in Untersuchung stehenden rechtwinklig durch σ, und endlich durch φ und ψ die Winkel, welch betreffenden Durchschnittspunkte nächstgelegene erste E σ mit dem ersten Elemente von k resp. von h bildet jenes System von Differentialgleichungen:

$$d\sigma = dh \cos \psi,\ m d\varphi = dh \sin \psi,\ \frac{\partial m}{\partial \sigma} d\varphi =$$

Hierbei ist m durch die Gleichung $\varkappa = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial \sigma^2}$ be

welcher $\varkappa$ das Krümmungsmass in einem beliebigen Oberfläche bedeutet. Die letzte dieser drei Gleichung Bedingungsgleichung dafür, dass σ eine kürzeste Linie i

Dieses System führt Hansen zunächst vermittelst titäten: $d(\sigma \sin \psi) = d\sigma \sin \psi + \sigma d\psi \cos \psi$ und

$$d(\sigma \cos \psi) = d\sigma \cos \psi - \sigma d\psi \sin \psi$$

über in das bequemere:

$$\frac{d(\sigma \sin \psi)}{dh} = \left(m - \sigma \frac{\partial m}{\partial \sigma}\right) \frac{d\varphi}{dh} \cos \psi$$

$$\frac{d(\sigma \cos \psi)}{dh} = 1 - \left(m - \sigma \frac{\partial m}{\partial \sigma}\right) \frac{d\varphi}{dh} \sin \psi$$

$$\frac{d\varphi + d\psi}{dh} = \left(1 - \frac{\partial m}{\partial \sigma}\right) \frac{d\varphi}{dh}.$$

Die Integration dieses Systems wird mit Hülfe de der unendlichen Reihen in folgender Weise bewirkt. Na einer vorläufigen, für den Fall ausgeführten Integration Oberfläche, welcher das geodätische Dreieck angehört, ist, die Form der Reihen abgeleitet worden, in welch Funktionen $\sigma \sin \varphi$, $\sigma \cos \varphi$ und $\varphi + \psi$ entwickeln la der Voraussetzung, dass diese Reihen nach Potenzen v schreiten, geht Hansen mit Hülfe der letzten Reihe

der Reihen für $\sigma \sin \psi$ und $\sigma \cos \psi$ über. Sodann leitet
n für $\sigma \sin \varphi$ und $\sigma \cos \varphi$ gefundenen Reihen solche für
ionen $\sigma^2 \frac{d\varphi}{dh}$, $\sigma^3 \frac{d\varphi}{dh} \cos \psi$ und $\sigma^3 \frac{d\varphi}{dh} \sin \psi$ ab. Alle
hen substituiert er dann unter gleichzeitiger Heranzie-
vorher für m gefundenen nach Potenzen von $\sigma \sin \varphi$
; φ fortschreitenden Reihe, (aus welcher sich die Reihen
$\sigma \frac{\partial m}{\partial \sigma}$ und $1 - \frac{\partial m}{\partial \sigma}$ finden), in die rechten Seiten der drei
;en des obigen Systems, welche durch diese Reihen, —
leitung nach — identisch erfüllt werden müssen. Indem
endlich noch in die linken Seiten der mehrerwähnten
n die für $\sigma \sin \psi$ und $\sigma \cos \psi$ gefundenen Reihen sub-
nd die Differentiationen nach der unabhängigen Variabeln h
Glied ausführt, gelangt er zu drei Gleichungen, deren
mmtlich durch nach Potenzen von h fortschreitende Reihen
sind. Die Bestimmung der in diesen Reihen noch ent-
nbestimmten constanten Coëffizienten kann also durch die
e Methode der unbestimmten Coëffizienten erfolgen. Zwar
Constante bei dieser Art der Bestimmung derselben noch
t, dieselbe ist aber nichts anderes, als die bei der Inte-
r zweiten Gleichung auftretende Constante, und diese ist,
ofort sieht, $= k$.
ubstitution der erhaltenen Werthe endlich in die rechten
oben für $\sigma \sin \varphi$ und $\sigma \cos \varphi$ aufgestellten Reihen giebt
sen, welche später bei der Uebertragung des Dreiecks
werden, als Funktionen allein der Variabeln h.

§ 4.

Verallgemeinerung der Resultate.

diesen nur für ein rechtwinkliges geodätisches Dreieck
lationen leitet Hansen den von ihm später benöthigten
$bc \cos A$, in welchen b und c zwei Seiten eines schief-
Dreiecks und A den Winkel bezeichnen, welchen die vom
kte aus gezählten ersten Elemente der Seiten b und c
er bilden, in folgender Weise ab:
sei das ursprünglich betrachtete rechtwinklige Dreieck,
ei $AB = k$, $BC = h$, $AC = \sigma$, $\angle A = \varphi$. Zieht man dann
eine kürzeste Linie AB', deren erstes an A anstossendes
it dem ersten Elemente der Linie AB einen Winkel φ'

bildet, so entsteht ein neues rechtwinkliges Dreieck ABB' mit dem ersten die Kathete k und den rechten Winkel hat. Bezeichnet man noch BB' durch h' und AB' durch man offenbar die Ausdrücke $\sigma' \cos \varphi'$ und $\sigma' \sin \varphi'$ erha man in den vorher für $\sigma \cos \varphi$ und $\sigma \sin \varphi$ gefundenen h ersetzt durch h', oder anders, wenn $\sigma \cos \varphi = f(hk)$ u $= \varphi(hk)$ war, so muss $\sigma' \cos \varphi' = f(h', k)$, $\sigma' \sin \varphi' = \varphi$

Diese Relationen sind somit bei gegebenem k und h' zu betrachten.

Doch nicht nur ein rechtwinkliges, sondern gleichz schiefwinkliges geodätisches Dreieck ist durch das Zieher AB' entstanden, nämlich das Dreieck $AB'C$. Die Se Dreiecks sind $(h - h')$, σ und σ' und die diesen Seiten liegenden Winkel resp. $(\varphi - \varphi')$, $(180 - \psi')$ und ψ. Dies nun ist es, für welches Hansen die im Eingange des vo graphen formulierte Aufgabe durchgeführt hat, und zw dazu, wie der nächste Paragraph zeigen wird, die bisher Beziehungen zwischen den Grössen σ, σ', φ und φ' aus, die Ableitung der sehr einfachen Hansen'schen For noch die Entwicklung anderer später zu erwähnender erfordert.

§ 5.

Entwicklung der Differenz A—A'.

Wie schon oben (§ 4) bemerkt wurde, gründet s mittlung der Differenz $A - A'$, in welcher A' den dem des geodätischen Dreiecks entsprechenden Winkel des Dreiecks bezeichnet, auf den Cosinus-Satz. Bekanntlich r den Radius der Kugel bezeichnet, auf welcher das sph den Seiten $h - h'$, σ und σ' begrenzte Dreieck liegt:

$$\sin \frac{\sigma}{r} \cdot \sin \frac{\sigma'}{r} \cos A' = \cos \frac{h - h'}{r} - \cos \frac{\sigma}{r} \cdot \cos$$

Daraus ergiebt sich nach Einführung der Sinus- ur Reihen sofort:

$$\sigma \sigma' \cos A' = {}^1/_2 (h - h')^2 + {}^1/_2 \sigma^2 + {}^1/_2 \sigma'^2 +$$

wenn man mit K die Summe der Glieder höherer zeichnet. Selbstverständlich ist dieses K eine Funkti Grössen $h - h'$, σ, σ' und r, und nicht auch des Wink

s $\frac{\cos A - \cos A'}{\sin A} = p$ sofort $A' - A = p - {}^1/_2\, p^2\, tg\, A$

ist ersichtlich, dass man zur Ermittlung der Differenz
ur noch der Grössen $\sigma\,\sigma'\cos(\varphi - \varphi')$ und $\sigma\,\sigma'\sin(\varphi - \varphi')$
a

$$\frac{-\cos A'}{\sin A} = \frac{\sigma\,\sigma'}{\sigma\,\sigma'} \cdot \frac{\cos A - \cos A'}{\sin A} = \frac{\sigma\,\sigma'\cos A - \sigma\,\sigma'\cos A'}{\sigma\,\sigma'\sin A}$$

se Grössen lassen sich aber mit Hülfe der in den §§ 3
fundenen Beziehungen zwischen σ, σ', φ und φ' entwickeln;
st:

$$\sigma')=\sigma\sigma'(\cos\varphi\cos\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi')=(\sigma\cos\varphi).(\sigma'\cos\varphi')+(\sigma\sin\varphi).(\sigma'\sin\varphi')$$

$$\sigma')=\sigma\sigma'(\sin\varphi\cos\varphi'-\cos\varphi\sin\varphi')=(\sigma\sin\varphi).(\sigma'\cos\varphi')-(\sigma\cos\varphi)(\sigma'\sin\varphi').$$

ıfache Substitution der oben gefundenen Werthe giebt so: $A - A'$

$$h')\Big\{{}^1/_3\,\eta+{}^1/_6\,\vartheta k+{}^1/_{12}\,\vartheta'(h+h')-\frac{1}{3r^2}+\frac{\eta^2}{180}(7k^2+4h^2+9hh'+4h'^2)-\frac{\eta_i}{18r^2}hh'$$

$$+\frac{\eta\vartheta k}{1080}\Big(42k^2+4h^2+49hh'+4h'^2\Big)-\frac{\vartheta k}{24r^2}hh' \qquad (1)$$

$$+\frac{\eta\vartheta' k}{360}\Big(12k^2(h+h')+6h^3+11h^2h'+11hh'^2+6h'^3\Big)-\frac{\vartheta'}{72r^2}\Big(h^2h'+hh'^2\Big)$$

$$-\frac{1}{180r^4}\Big(7k^2+4h^2+hh'+4h'^2\Big)+\frac{1}{60}\Big(3\lambda k^2+3\lambda k'(h+h')+\lambda''(h^2+hh'+h'^2)\Big)$$

$$+\frac{1}{360}\Big(4\mu k^3+6\mu' k^2(h+h')+4\mu'' k(h^2+hh'+h'^2)+\mu'''(h^3+h^2h'+hh'^2+h'^3)\Big)\Big\}$$

h, h'), und damit wäre die § 2 formulierte Aufgabe that-
gelöst; denn die in der Formel (1) vorkommenden Coëffi-
sind sämmtlich aus der Gleichung der Fläche und der
Coordinatensystems sich ergebende, mithin als bekannt
ıde Grössen. Allein diese Lösung ist wegen ihrer ungemein
en Form für die Praxis nicht verwerthbar. Zu ihrer
achung bedarf es noch mannigfacher Umformungen und
der Einführung neuer Grössen, und gerade darin zeigte
aus den späteren Paragraphen erhellen wird, Hansen als

—

ber die nähere Bedeutung dieser Coëffizienten vergl. Hansen, Geo-
ıtersuchungen Art. 113 ff.

Meister. Zunächst jedoch möge erst noch einer Umform werden, die im Prinzip Hansen nicht eigenthümlich, s von Gauss*) angewendet worden ist, wenn auch die verschiedenartigen Entwicklung entsprechend, dort eine als bei Hansen.

§ 6.

Einführung von Δ und α, β, γ.

Die Formel (1) für Uebertragung eines geodätisch auf eine Kugel vom Radius r enthält die Constanten η, ϑ, μ, μ', μ'', μ''', welche, wie dort bemerkt wurde, von der Fläche abhängen, auf welcher das zu übertragende Dreieck liegt. Die drei ersten dieser Constanten hat H Hülfe dreier anderer, ebenfalls von der Natur der Ob hängiger eliminiert, nämlich durch die drei Krümmungsm in den Eckpunkten A, B, C, des Dreiecks. Diese Krümm folgen sofort aus der für das Krümmungsmass $\varkappa$ in einen Punkte der Fläche gefundenen, mit Hülfe des Macla Lehrsatzes entwickelten Reihe:

$$\varkappa = \eta + \vartheta\sigma\cos\varphi + \vartheta'\sigma\sin\varphi + {}^1\!/_2\,\lambda\sigma^2\cos^2\varphi + \lambda'\sigma^2\sin\varphi\cos\varphi + {}^1\!/_2\,\lambda''\sigma^2$$

wenn man in dieselbe die früher (§ 3) gefundenen Worte und $\sigma \sin\varphi$ einführt. Man erhält nämlich — k und h betrachtend — durch diese Einführung $\varkappa$ zunächst al von k und von h. Versteht man dann unter k und h krummlinigen Coordinaten des Punktes B, so repräsenti gefundene $\varkappa$ nichts anderes, als das Krümmungsmass β. anderen Krümmungsmasse α und γ erhält man dann ebe Mühe: α, indem man in dem für β gefundenen Ausdruc setzt, γ, indem man statt h schreibt h'.

An dieser Stelle möge auch noch die Bemerkung ge dass die Coëffizienten $\eta, \vartheta \ldots\ldots$ sich in vier Grupp lassen, deren einzelne Glieder in sehr enger Beziehung z stehn. Sieht man nämlich in den Ausdrücken dieser Coë als variabel an, so finden sich die folgenden Gleichungen

*) Disqu. gen. circa superficies curvas. Art. 26.

$$, \vartheta' = \frac{\partial \vartheta}{\partial v},$$

$$\lambda' = {}^1/_2 \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \lambda'' = \lambda + \frac{\partial \lambda'}{\partial v} = \lambda + {}^1/_2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2},$$

$$\mu' = {}^1/_3 \frac{\partial \mu}{\partial v}, \mu'' = {}^1/_2 \mu + {}^1/_2 \frac{\partial \mu'}{\partial v} = {}^1/_2 \mu + {}^1/_6 \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2},$$

$$\mu' + \frac{\partial \mu''}{\partial v} = \mu' + {}^1/_2 \frac{\partial \mu}{\partial v} + {}^1/_6 \frac{\partial^3 \mu}{\partial v^3} = {}^5/_6 \frac{\partial \mu}{\partial v} + {}^1/_6 \frac{\partial^3 \mu}{\partial v^3}.$$

r diesen drei Krümmungsmassen führt Hansen noch den Gleichung:

$$A = \int_0^{\varphi} d\varphi \int_0^{\sigma} m d\sigma - \int_0^{\varphi'} d\varphi \int_0^{\sigma'} m d\sigma$$

Inhalt des geodätischen Dreiecks in die Formel (1) des Durch alle diese Substitutionen geht dieselbe schliesslich andere:

$$\frac{A}{12}\left\{2\alpha+\beta+\gamma\right\}+\frac{A}{3r^2}-\frac{A\alpha^2}{1080}\left\{3k^2-4h^2+11hh'-4h'^2\right\} \quad (2)$$

$$\frac{A\alpha}{360r^2}\left\{4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2\right\}-\frac{A\alpha\beta}{2160}\left\{9k^2-3h^2+13hh'-h'^2\right\}$$

$$\frac{A\beta}{360r^2}\left\{3k^2+4h^2-4hh'+3h'^2\right\}-\frac{A\alpha\gamma}{2160}\left\{9k^2-h^2+13hh'-3h'^2\right\}$$

$$\frac{A\gamma}{360r^2}\left\{3k^2+3h^2-4hh'+4h'^2\right\}+\frac{A}{180r^4}\left\{7k^2+4h^2-hh'+4h'^2\right\}$$

$$\frac{A}{120}\left\{4\lambda k^2+4\lambda' k(h+h')+\lambda''(3h^2-2hh'+3h'^2)\right\}$$

$$\frac{A}{360}\left\{6\mu k^3+9\mu' k^2(h+h')+\mu'' k(11h^2-4hh'+11h'^2)+\mu'''(4h^3-h^2h'-hh'^2+4h'^3)\right\}$$

an sieht, ist durch diese Substitutionen die Formel nicht acher geworden, wenn auch die neuen Constanten eine Auswerthung ermöglichen, als die früheren.

kt mag noch werden, dass diese letzte Formel, ebenso § 5 bis auf die Grössen 6. Ordnung excl. genau ist,

während die Entwicklungen von Gauss nur bis au 4. Ordnung incl. sich erstrecken. Dieser Umstand ist deshalb hervorzuheben, weil, wie Hansen bemerkt*), schränkung auf Glieder 4. Ordnung keineswegs genauer liefert, als eine solche auf Glieder 3. Ordnung, ja häufig u indem nur die Summe der Glieder einer geraden und der nächsthöheren Ordnung — wenigstens bei der Anw ein Ellipsoid von kleiner Excentricität — kleiner ist, als der Glieder der beiden diesen vorangehenden Ordnungen, man die Summe der Glieder $(2n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch Σ bezeichnet, wohl $\Sigma(2n) + \Sigma(2n + 1) < \Sigma(2n - 2) + \Sigma$ ist, aber nicht auch $\Sigma(2n) < \Sigma(2n - 1)$. Im Gegen häufig das Umgekehrte statt.

§ 7.

Einführung der Krümmungsmasse δ, β_1, γ_1.

Alle bisherigen Entwicklungen Hansens finden sich Bande der „Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesel Wissenschaften." Das Resultat derselben bietet, abgeseh eigenartigen Methoden, durch deren Anwendung Hanse gelangte, zwar auch den Vorzug grösserer Genauigkeit v Gauss gegebenen, allein seine eigentliche Bedeutung erl selbe erst durch weitere mit demselben seitens Hanse nommene Transformationen. Diese Transformationen ver Hansen — zum grössten Theile wenigstens — im IX. Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft de schaften als „Supplement" zu den geodätischen Untersuc

Dieselben gründen sich zunächst auf den Umstand, Einführung von nur drei neuen Grössen die sämmtlich Formel des § 6 noch enthaltenen sieben Constanten μ, μ', μ'', μ''' sich eliminieren lassen, dann aber wesentli spezielle Wahl der drei neu eingeführten Grössen. Verm Wahl behält nämlich Hansen noch zwei unbestimmte G freien Verfügung, welche ihrer Natur nach sich nachträgl stimmen lassen, dass die Endformel Hansens im Verglei sonst entwickelten Formeln neben dem Vorzuge grösserer G auch noch denjenigen hervorragender Einfachheit besitzt.

*) Geodätische Untersuchungen. Art. 78.

drei in die Formel des § 6 einzuführenden Grössen — nennt sie δ, β_1, γ_1, — sind abermals drei Krümmungsmasse, entspricht das Krümmungsmass δ dem Punkte der Fläche, e normale Projektion des Schwerpunktes der Fläche auf darstellt oder doch wenigstens sehr nahe dieser Projektion während die Krümmungsmasse β_1 und γ_1 den beiden ngehören, deren Entfernung vom Punkte A bis auf Grössen rdnung $= {}^1/_3\ \sigma$ resp. $= {}^1/_3\ \sigma'$ ist: sie betragen $\cdot u$) resp. ${}^1/_3\ \sigma'\ (1 + u')$, wenn u und u' zwei kleine im ch völlig unbestimmte Grössen zweiter Ordnung bezeichnen. man die Gleichungen für diese drei Krümmungsmasse tuiert in dieselben die aus den Gleichungen für α, β, γ zu den Werthe von ϑk und ϑ', so geben diese drei Gleichungen mbiniert die Gleichung:

$$12\lambda k + 12\lambda' k(h+h') - 3\lambda''(3h^2 - 2hh' + 3h'^2)$$
$$u'k^2(h+h') - \mu''k(11h^2 - 4hh' + 11h'^2) - \mu'''(4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3)$$
$$= 9A + 9B + 18C - 3D,$$

die Grössen A, B, C, D gewisse die zu eliminierenden en nicht enthaltende, vielmehr aus den sechs Krümmungs- l den Grössen u und u' sich zusammensetzende Ausdrücke

ltipliziert man die letzte Gleichung beiderseits mit $\frac{A}{360}$, so Blick auf die Formel des § 6, dass dort dieselbe Funktion inierenden Constanten in den Inhalt A des Dreiecks multi- , welche hier auf der linken Seite steht, so dass für nfach $\frac{A}{40}(A + B + 2C - {}^1/_3 D)$ substituiert werden

n Ausführung dieser Substitution und nach Einführung e, welche die Grössen A, B, C, D darstellen, nimmt die § 6 — $r = \infty$ gesetzt — die Gestalt an:

$$\left\{2\delta + \beta_1 + \gamma_1\right\} - \frac{A}{120}\left\{2\alpha + \beta + \gamma\right\} \qquad (3)$$

$$\frac{k^2}{00}\left\{7k^2 + 14h^2 - 21hh' + 14h'^2\right\} - \frac{A\alpha\beta}{10800}\left\{53k^2 - 31h^2 + 141hh' - 57h'^2\right\}$$

$$\frac{\alpha\gamma}{300}\left\{53k^2 - 57h^2 + 141hh' - 31h'^2\right\}$$

$$\left\{u(\alpha - \beta) + u'(\alpha - \gamma)\right\}.$$

Diese Formel, welche an sich schon ungemein einfa
vermöge der Unbestimmtheit der beiden Grössen u u
mancherlei Umformungen zu, und Hansen selbst l
mehrere noch einfachere Formeln abgeleitet.

So findet sich in den Berichten der Königl. Sächsis
schaft der Wissenschaften vom Jahre 1869 die Formel
$A - A'$, oder, wie Hansen schreibt:

$$\delta A = -\frac{3A}{40}\{2\delta+\beta_1+\gamma_1\} - \frac{A}{120}\{2\alpha+\beta+\gamma\} + \frac{A\alpha^2}{180}\{2a^2$$

welche aus der vorletzten entsteht, wenn man

$$u = -\frac{\alpha}{540}\{141\,a^2 - 79\,b^2 - 27\,c^2\},\ u' = -\frac{\alpha}{540}\{141\,a^2 - 2$$

setzt und gleichzeitig mittelst der Formeln:

$$h^2 = b^2 - k^2,\ 2\,h\,h' = -a^2 + b^2 + c^2 - 2\,k^2,\ h'^2 =$$

für k und h die Seiten des geodätischen Dreiecks einfül

§ 8.

**Erweiterung der entwickelten Formel zwecks Uebert
eine Kugel vom Radius r und letzte Modificati**

Nach der im § 7 gemachten Voraussetzung ($r =$
sämmtliche im vorigen Paragraphen entwickelten Form
die Uebertragung eines geodätischen Dreiecks in die Eb
sie auch für die Uebertragung auf eine Kugel von Ra
tigkeit besitzen, so müssten ihr noch die in der Form
enthaltenen von r abhängigen Glieder hinzugefügt w
diesen letzteren Fall hat Hansen eine ebenso einfach
bringende Transformation durchgeführt, welche bei einer
über den Entwicklungsgang seiner Formel umsoweniger
werden darf, als mit ihr die in der Einleitung erwähnte
des Geltungsbereiches der Formel aufs engste verknüpft

Hansen führt durch die Gleichungen:

$$\alpha = \frac{1+p}{n^2},\ \beta = \frac{1+q}{n^2},\ \gamma = \frac{1+r}{n^2},\ \delta = \frac{1+p'}{n^2},\ \beta_1 = \frac{1+q'}{n^2},$$

definierte Grössen, p, q, r, p', q', r', n in die um jene von r
Glieder erweiterte Formel (3^a) des § 7 ein, indem er
n statt r schreibt.

Substitution beeinträchtigt, wie auch Hansen bemerkt, die Allgemeinheit der Untersuchung, da der Radius der ngskugel willkürlich ist.

ch nimmt Hansens Formel die Gestalt an:

$$\frac{1}{r^2}\left\{2p'+q'+r'\right\}-\frac{A}{120n^2}\left\{2p+q+r\right\}$$

$$\frac{p}{0n^2}\left\{69a^2-127b^2-127c^2\right\}+\frac{Aq}{21600n^4}\left\{21a^2-87b^2-199c^2\right\}+\frac{Ar}{21600n^4}\left\{21a^2-199b^2-87c^2\right\}$$

$$\frac{p^2}{0n^2}\left\{21a^2+7b^2+7c^2\right\}+\frac{Apq}{21600n^4}\left\{141a^2-27b^2-79c^2\right\}+\frac{Apr}{21600n^4}\left\{141a^2-79b^2-27c^2\right\}$$

$$\frac{1}{n^2}\left\{u\,(q-p)+u'\,(r-p)\right\},$$

früheren bis auf Grössen 6. Ordnung (excl.) genau ist. nthält, wie die früheren, die beiden unbestimmten Grössen durch deren Wahl sich andere mehr oder weniger einfache leiten lassen, wie Hansen a. a. O. Art. 25 zeigt.

lers erwähnt mag hier, weil sie den weiteren Umformungen liegt, die Formel werden, welche aus der letzten hervorman in derselben

$$\frac{+p}{35n^2}\left\{3a^2-6b^2+8c^2\right\},\quad u'=2\frac{1+p'}{135n^2}\left\{3a^2+8b^2-6c^2\right\}$$

Formel:

$$\left\{2p'+q'+r'\right\}-\frac{A}{480n^2}F'(2p+q+r)$$

$$^2\left\{3a^2+b^2+c^2\right\}+\frac{Apq}{1440n^4}\left\{11a^2-5b^2-c^2\right\}+\frac{Apr}{1440n^4}\left\{11a^2-b^2-5c^2\right\},$$

$= 4-\frac{1}{n^2}\left(a^2-3b^2-3c^2\right)$ ist.

ser Formel hat Hansens Untersuchung über die Uebertes geodätischen Dreiecks auf die Kugel oder in die ntlich ihren Abschluss erreicht. Allein trotzdem die ntersuchungen nur Spezialfälle behandeln, sind doch ihre icht weniger bemerkenswerth, einmal weil der behandelte mmerhin noch eine ziemlich grosse Anzahl von Flächen nd dann auch, weil gerade durch die letzten Unterine erhöhte Genauigkeit der numerischen Berechnungen wird.

Hansen hat nämlich bemerkt, dass, wenn das Dreieck auf einer Fläche liegt, für welche die zuletzt e Grössen p, q, r .... kleine Grössen erster Ordnung sin $n = 1$ ist, die Formel noch eine bedeutende Vereinfachu Für diesen Fall darf man

$$u = \frac{2}{135}\left\{3\,a^2 - 6\,b^2 + 8\,c^2\right\},\; u' = \frac{2}{135}\left\{3\,a^2 + 8\,b\right.$$

setzen, während

$$F = 4 - a^2 + 3\,b^2 + 3\,c^2$$

ist, und so ergiebt sich das höchst einfache Resultat:

$$A - A' = \frac{3\Delta}{40}\left\{2\,p' + q' + r'\right\} - \frac{\Delta}{480}F(2\,p' + q$$

während die in den Grössen C, D (§ 7) implicite enthalten x und y definiert sind durch die Gleichungen:

$$x = \frac{1}{20}\,(c^2 - b^2),\; y = \frac{1}{540}\left\{7\,a^2 + 4\,b^2 + 4\,c\right.$$

Diese Formel endlich lässt sich — und darin i Hansen'sche Untersuchung*) — noch durch die aus d von α, β, γ, δ, β_1, γ_1 unter der Voraussetzung, dass d p, q .... kleine Grössen erster Ordnung sind, sich ergeben

$$2\,p + q + r = 2\,p' + q' + r'$$

überführen in die andere:

$$A - A' = -\frac{\Delta}{480}F'(2p' + q' + r') - \frac{\Delta}{120}(2p + q + r) = -\frac{\Delta}{480}(2p + q$$

$$= -\frac{\Delta}{480}(2\,p + q + r)\left(40 - a^2 + 3\,(b^2 + c^2)\right)$$

da $F' = 36 - a^2 + 3\,(b^2 + c^2)$ ist.

Diese letzte Formel ist es, welche, wie auch die vc selbst gegebenen numerischen Beispiele zeigen, eine Genai Resultate giebt, die von keiner anderen, sonst gleichwerthi erreicht wird. —

---

*) Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen der Wissenschaften, 1872.

nun auch die in den vorhergehenden Paragraphen gelichst gedrängte Uebersicht über die hierher gehörigen ansens deutlich genug zeigt, welch elegante Form jener en Resultaten seiner werthvollen Untersuchungen zu geben te, giebt sie doch, so wenig wie Hansens Arbeit selbst, über den bisher — soviel mir bekannt — überhaupt ermittelten Grund der merkwürdigen Thatsache, dass die formation der Hansen'schen Formel eine weiter reichende keit gestattet, als die Formeln, aus denen sie hervorger als andere sonst gleichwerthige. Ueber diesen Punkt chlusse der vorliegenden Arbeit noch ausführlicher gerden; zunächst jedoch werde ich eine andere Ableitung n'schen Formel zu geben versuchen.

ZWEITER THEIL.

twicklung der zur Reduktion eines sphäroidischen Dreiecks gebrauchten Reihen.

§ 9.

Die Reihe für $\frac{1}{m^2}$.

achstehende Entwicklung beruht auf den Differential-

$$= m \sin\psi, \frac{\partial\sigma}{\partial h} = \cos\psi, \frac{\partial m}{\partial k}\, dh = -\, d\psi. \qquad (6)$$

ste und zweite dieser Gleichungen lassen sich um-

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial k} = m\, 2\,\sigma \sin\psi, \frac{\partial\sigma^2}{\partial h} = 2\sigma\cos\psi.$$

nd addiert man dieselben, so folgt:

$$\left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial h}\right)^2 = 4\,\sigma^2, \text{ oder } \frac{1}{m^2} = \frac{4\,\sigma^2 - \left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial h}\right)^2}{\left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial k}\right)^2}$$

Da nun σ^2 in erster Annäherung offenbar $= k^2$ darf man setzen:

$$\sigma^2 = k^2 + h^2 + a_0 k^2 h^2 + a_1 k^3 h^2 + a_2 k^4 h^2 + a_3 k^5 h^2 + b_1 k^2 h^3 + b_2 k^3 h^3 + b_3 k^4 h^3 + c_2 k^2 h^4 + c_3 k^3 h^4 + d_3 k^4 h^5$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial k} = 2k + [2a_0 k + 3a_1 k^2 + 4a_2 k^3 + 5a_3 k^4] h^2 + [2b_1 k + 3b_2 k^2 + 4b_3 k^3] h^3 + [2c_2 k + 3c_3 k^2] h^4 + [2d_3 k] h^5$$

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial h} = 2h + [2a_0 h + 3b_1 h^2 + 4c_2 h^3 + 5d_3 h^4] k^2 + [2a_1 h + 3b_2 h^2 + 4c_3 h^3] k^3 + [2a_2 h + 3b_3 h^2] k^4 + 2a_3 h k^5$$

$$= 2h + [2a_0 k^2 + 2a_1 k^3 + 2a_2 k^4 + 2a_3 k^5] h + [3b_1 k^2 + 3b_2 k^3 + 3b_3 k^4] h^2 + [4c_2 k^2 + 4c_3 k^3] h^3 + [5d_3 k^2] h^4$$

$$\left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial k}\right)^2 = 4k^2 + [8a_0 k^2 + 12a_1 k^3 + 16a_2 k^4 + 2\ldots] h^2 + [8b_1 k^2 + 12b_2 k^3 + 16b_3 k^4] h^3 + [(8c_2 + 4a_0^2) k^2 + (12a_0 a_1 + 12c_3) k^3] h^4 + [(8d\ldots] h^5$$

$$\left(\frac{\partial\sigma^2}{\partial h}\right)^2 = 4h^2 + [8a_0 h^2 + 12b_1 h^3 + 16c_2 h^4 + 2\ldots] k^2 + [8a_1 h^2 + 12b_2 h^3 + 16c_3 h^4] k^3 + [(8a_2 + 4a_0^2) h^2 + (12a_0 b_1 + 12b_3)\ldots] k^4 + [(8a_3 + 8a_0 a_1) h^2] k^5$$

$$= [4 + 8a_0 k^2 + 8a_1 k^3 + (8a_2 + 4a_0^2) k^4 + (8a_3 + \ldots] + [12b_1 k^2 + 12b_2 k^3 + (12b_3 + 12a_0 b_1\ldots] + [16c_2 k^2 + 16c_3 k^3] h^4 + 20d_3 k^3 h^5.$$

So wird:

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1 - [a_0 + a_1 k + (a_2 + a_0^2) k^2 + (a_3 + 2a_0 a_1) k^3] h^2 - [2b_1 + 2b_2 k + (2b_3 + 3a_0 b_1) k^2] h^3 - [3c_2 + 3c_3 k] h^4 - 4d_3 h^5}{1 + [2a_0 + 3a_1 k + 4a_2 k^2 + 5a_3 k^3] h^2 + [2b_1 + 3b_2 k + 4b_3 k^2] h^3 + [(2c_2 + a_0^2) + (3c_3 + 3a_0 a_1) k] h^4 + [(2d_3 + 2a_0 b_1) k] h^5}$$

(Siehe nebenstehende Formel.)

§ 10.

Die Reihen für $\sigma \cos \varphi$ und $\sigma \sin \varphi$.

Bestimmung der später bei der Reduction gebrauchten $\cos \varphi$ und $\sigma \sin \varphi$ dienen die Gleichungen:*)

$$\frac{\sin \psi}{m} \cdot \frac{\partial \sigma \cos \varphi}{\partial k} + \sigma \cos \psi \frac{\partial \sigma \cos \varphi}{\partial h} = \sigma \cos \varphi$$

$$\frac{\sin \psi}{m} \cdot \frac{\partial \sigma \sin \varphi}{\partial k} + \sigma \cos \psi \frac{\partial \sigma \cos \varphi}{\partial h} = \sigma \sin \varphi.$$

lassen sich zunächst umformen in

$$\frac{1}{m^2} \cdot \frac{\partial \sigma^2}{\partial k} \cdot \frac{\partial \sigma \cos \varphi}{\partial k} + \frac{\partial \sigma^2}{\partial h} \cdot \frac{\partial \sigma \cos \varphi}{\partial h} \Big] = \sigma \cos \varphi$$

$$\frac{1}{m^2} \cdot \frac{\partial \sigma^2}{\partial k} \cdot \frac{\partial \sigma \sin \varphi}{\partial k} + \frac{\partial \sigma^2}{\partial h} \cdot \frac{\partial \sigma \sin \varphi}{\partial h} \Big] = \sigma \sin \varphi.$$

man nun, da in erster Annäherung $\sigma \cos \varphi = k$, $\sigma \sin \varphi = h$ ist,

$$k + (\alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3 + \alpha_4 k^4 + \alpha_6 k^5 \ldots) h^2$$
$$+ (\beta_1 k + \beta_2 k^2 + \beta_3 k^3 + \beta_4 k^4 \ldots) h^3$$
$$+ (\gamma_1 k + \gamma_2 k^2 + \gamma_3 k^3 \ldots) h^4 + (\delta_1 k + \delta_2 k^2 \ldots .) h^5$$
$$h + (\mathfrak{a}_1 h + \mathfrak{a}_2 h^2 + \mathfrak{a}_3 h^3 + \mathfrak{a}_4 h_4 + \mathfrak{a}_5 h^5 \ldots .) k^2$$
$$+ (\mathfrak{b}_1 h + \mathfrak{b}_2 h^2 + \mathfrak{b}_3 h^3 + \mathfrak{b}_4 h^4 \ldots .) k^3$$
$$+ (\mathfrak{c}_1 h + \mathfrak{c}_2 h^2 + \mathfrak{c}_3 h^3 \ldots .) k^4 + (\mathfrak{d}_1 h + \mathfrak{d}_2 h^2 \ldots .) k^5$$

$$= 1 + (\alpha_1 + 2 \alpha_2 k + 3 \alpha_3 k^2 + 4 \alpha_4 k^3 + 5 \alpha_5 k^4 \ldots .) h^2$$
$$+ (\beta_1 + 2 \beta_2 k + 3 \beta_3 k^2 + 4 \beta_4 k^3 \ldots .) h^3$$
$$+ (\gamma_1 + 2 \gamma_2 k + 3 \gamma_3 k^2 \ldots) h^4 + (\delta_1 + 2 \delta_2 k \ldots) h^5$$
$$= (2 \alpha_1 k + 2 \alpha_2 k^2 + 2 \alpha_3 k^3 + 2 \alpha_4 k^4 + 2 \alpha_5 k^5 \ldots .) h$$
$$+ (3 \beta_1 k + 3 \beta_2 k^2 + 3 \beta_3 k^3 + 3 \beta_4 k^4 \ldots .) h^2$$
$$+ (4 \gamma_1 k + 4 \gamma_2 k^2 + 4 \gamma_3 k^3 \ldots .) h^3 + (5 \delta_1 k + 5 \delta_2 k^2 \ldots .) h^4$$
$$= (2 \mathfrak{a}_1 h + 2 \mathfrak{a}_2 h^2 + 2 \mathfrak{a}_3 h^3 + 2 \mathfrak{a}_4 h^4 + 2 \mathfrak{a}_5 h^5 \ldots) k$$
$$+ (3 \mathfrak{b}_1 h + 3 \mathfrak{b}_2 h^2 + 3 \mathfrak{b}_3 h^3 + 3 \mathfrak{b}_4 h^4 \ldots .) k^2$$
$$+ (4 \mathfrak{c}_1 h + 4 \mathfrak{c}_2 h^2 + 4 \mathfrak{c}_3 h^3 \ldots) k^3 + (5 \mathfrak{d}_1 h + 5 \mathfrak{d}_2 h^2 \ldots) k^4$$

ss, disquis. gen. c. superfic. curvas Art. 24.

$$\frac{\partial\sigma \sin\varphi}{\partial h} = 1 + (\mathfrak{a}_1 + 2\,\mathfrak{a}_2\,h + 3\,\mathfrak{a}_3\,h^2 + 4\,\mathfrak{a}_4\,h^3 + 5\,\mathfrak{a}$$
$$+ (\mathfrak{b}_1 + 2\,\mathfrak{b}_2\,h + 3\,\mathfrak{b}_3\,h^2 + 4\,\mathfrak{b}_4\,h^3 \ldots)\,k^3$$
$$+ (\mathfrak{c}_1 + 2\mathfrak{c}_2\,h + 3\,\mathfrak{c}_3\,h^2 \ldots)\,k^4 + (\mathfrak{d}_1 + 2\,\mathfrak{d}$$

Durch Substitution dieser und der oben für $\frac{\partial\sigma^2}{\partial h}$, $\frac{\partial}{\partial}$ entwickelten Werthe nimmt die erste der Gleichungen (6), beiderseits nach Potenzen von h ordnet, die Gestalt an:

$$2\,k + [6\,\alpha_1\,k + (a_1 + 8\,\alpha_2)\,k^2 + (2\,a_2 + 4\,a_0\,\alpha_1 - 2\,a_0^2 + 10\,\alpha_3)\,k$$
$$+ (3a_3 - 4\,a_0\,a_1 + 12\,a_4 + 4\,a_0\,\alpha_2 + 4a_1\,\alpha_1)\,k^4]\,h^2$$
$$+ [(8\,\beta_1 - 2\,b_1)\,k + (10\,\beta_2 - b_2)\,k^2 + (12\,\beta_3 + 6\,a_0\,\beta_1 + 6\,b_1\,\alpha_1 - 6$$
$$+ [(10\,\gamma_1 + 8\,a_0\,\alpha_1 - 4\,c_2 - 2\,a_0^2)\,k +$$
$$+ (12\,\gamma_2 + 13a_1\,\alpha_1 + 8\,a_0\,\alpha_2 - 3\,c_3 - 5\,a_0\,a_1)\,k^2]\,h^4$$
$$+ [12\,\delta_1 + 12\,a_0\,\beta_1 + 6\,b_1\,\alpha_1 - 6\,d_3 - 6\,a_0\,b_1)\,k]\,h^5$$
$$= 2\,k + [(2\alpha_1 + 4a_0)\,k + (2\,\alpha_2 + 6\,a_1)\,k^3 + (2\,\alpha_3 + 8a_2)\,k^3 + (2\,\alpha_4 +$$
$$+ [(2\,\beta_1 + 4\,b_1)\,k + (2\,\beta_2 + 6\,b_2)\,k^2 + (2\,\beta_3 + 8\,b_3)\,k^3]\,h^3$$
$$+ [(2\,\gamma_1 + 4a_0\,\alpha_1 + 4\,c_2 + 2\,a_0^2)\,k + (2\,\gamma_2 + 4\,a_0\,\alpha_2 + 6a_1\,\alpha_1 + 6\,c_3 +$$
$$+ [(2\,\delta_1 + 4\,a_0\,\beta_1 + 4\,b_1\,\alpha_1 + 4\,d_3 + 4\,a_0\,b_1)]\,h^5$$

Aus dieser Gleichung finden sich für die Coëffizienten die folgenden Relationen:

$$\alpha_1 = a_0\,,\ \alpha_2 = {}^5/_6\,a_1\,,\ \alpha_3 = {}^3/_4\,a_2 - {}^1/_4\,a_0^2\,,\ \alpha_4 = {}^7/_{10}\,a_3 -$$
$$\beta_1 = b_1\,,\ \beta_2 = {}^7/_8\,b_2\,,\ \beta_3 = {}^4/_5\,b_3 - {}^3/_5\,a_0\,b_1\,,$$
$$\gamma_1 = c_2\,,\ \gamma_2 = {}^9/_{10}\,c_3 + {}^2/_{15}\,a_0\,a_1$$
$$\delta_1 = d_3.$$

Ganz analog finden sich die Werthe von $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$,

$$\mathfrak{a}_1 = -{}^1/_2\,a_0, \mathfrak{a}_2 = -{}^1/_2\,b_1, \mathfrak{a}_3 = -{}^1/_2\,c_1 - {}^1/_2\,a_0^2, \mathfrak{a}_4 = -$$
$$\mathfrak{b}_1 = -{}^1/_3\,a_1\,,\ \mathfrak{b}_2 = -{}^3/_8\,b_2\,,\ \mathfrak{b}_3 = -{}^2/_5\,c_2 - {}^9/_{10}\,a$$
$$\mathfrak{c}_1 = -{}^1/_4\,a_2 + {}^1/_8\,a_0^2\,,\ \mathfrak{c}_2 = -{}^3/_{10}\,b_3 + {}^7/_{20}\,a_0\,b_1$$
$$\mathfrak{d}_1 = -{}^1/_5\,a_3 + {}^1/_6\,a_0\,a_1.$$

Die Substitution dieser Werthe in die oben für σ $\sigma\cos\varphi$ aufgestellten Reihen giebt:

$$\sigma \cos \varphi =$$

$$h^2 + {}^5/_6\, a_1 k^2 h^2 + ({}^3/_4 a_2 - {}^1/_4 a_0{}^2)\, k^3 h^2 + ({}^7/_{10} a_3 - {}^1/_3 a_0 a_1)\, k^4 h^2$$

$$h^3 + {}^7/_8\, b_2 k^2 h^3 + ({}^4/_5\, b_3 - {}^3/_5\, a_0 b_1)\, k^3 h^3$$

$$h^4 + ({}^9/_{10}\, c_3 - {}^2/_{15}\, a_0 a_1)\, k^2 h^4$$

$$+ h^5$$

$$\sigma \sin \varphi =$$

$$_0 k^2 h - {}^1/_3 a_1 k^3 h - ({}^1/_4 a_2 - {}^1/_8 a_0{}^2)\, k^4 h - ({}^1/_5 a_3 - {}^1/_6 a_0 a_1)\, k^5 h$$

$$_1 k^2 h^2 - {}^3/_8\, b_2 k^3 h^2 - ({}^3/_{10}\, b_3 - {}^7/_{10}\, a_0 b_1)\, k^4 h^2$$

$$c_2 + {}^1/_2\, a_0{}^2)\, k^2 h^3 - ({}^2/_5\, c_3 + {}^9/_{10}\, a_0 a_1)\, k^3 h^3$$

$$d_3 + a_0 b_1)\, k^2 h^4.$$

die Reihen für $\sigma \cos \psi$ und $\sigma \sin \psi$ betrifft, so ergeben ben sofort aus den Gleichungen ${}^1/_2 \frac{\partial \sigma^2}{\partial h} = \sigma \cos \psi$ und $= \sigma \sin \psi$.

§ 11.

nen zwischen den Coëffizienten a_i, b_i, c_i, d_i und den Hansen'schen Coëffizienten η, ϑ^i, λ^i, μ^i.

in den Reihen für $\sigma \cos \varphi$ und $\sigma \sin \varphi$, sowie in den- $\sigma \cos \psi$ und $\sigma \sin \psi$ die Coëffizienten a_i, b_i, c_i, d_i durch en'schen Coëffizienten η, ϑ, $\vartheta' \ldots$. zu eliminieren, kann infache Betrachtung dienen.

hst ist das Krümmungsmass $\varkappa$ in irgend einem Punkte äche, wenn man unter k und h die rechtwinkligen Coor- s Punktes versteht, bestimmt durch die Gleichung*):

$$\varkappa = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial^2 m}{\partial h^2}.$$

hnet man also aus der oben für $\frac{1}{m^2}$ gegebenen Reihe die n $\frac{1}{m}$ und $\frac{\partial^2 m}{\partial h^2}$, so erhält man für $\varkappa$ die Reihe:

ss, disquis. generales circa superficies curvas. Art. 19.

$$\varkappa = -3a_0 - 4a_1 k - 12 b_1 h - (5a_2 + a_0^2) k^2 - 15 b_2 k h - (30 c_2 + 6 a_0^2)$$
$$- (6a_3 + 2a_0 a_1) k^3 - (18 b_3 + 15 a_0 b_1) k^2 h - (36 c_3 + 8 a_0 a_1) k h^2 - (60 d_1 +$$
$$- 4 a_0 a_1 k h^2 + 6 a_0 b_1 k^2 h.$$

Substituiert man aber die oben für $\sigma \cos \varphi$ und σ sin fundenen Werthe in den von Hansen*) entwickelten allg Ausdruck für das Krümmungsmass:

$$\varkappa = \eta + \vartheta \sigma \cos \varphi + \vartheta' \sigma \sin \varphi$$
$$+ \tfrac{1}{2} \lambda \sigma^2 \cos^2 \varphi + \lambda' \sigma^2 \sin \varphi \cos \varphi + \tfrac{1}{2} \lambda'' \sigma^2 \sin^2 \varphi$$
$$+ \tfrac{1}{6} \mu \sigma^3 \cos^3 \varphi + \tfrac{1}{2} \mu' \sigma^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + \tfrac{1}{2} \mu'' \sigma^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + \tfrac{1}{6} \mu'''$$

so erhält man:

$$\varkappa = \eta + \vartheta k + \vartheta' h + \tfrac{1}{2} \lambda k^2 + \lambda' k h + \tfrac{1}{2} \lambda'' h^2$$
$$+ \tfrac{1}{6} \mu k^3 + \tfrac{1}{2} \mu' k^2 h + \tfrac{1}{2} \mu'' k h^2 + \tfrac{1}{6} \mu''' h^3 + a_0 \vartheta k h^2 - \tfrac{1}{2} a$$

Die Vergleichung beider Reihen liefert sofort:

$$a_0 = -\tfrac{1}{3} \eta, a_1 = -\tfrac{1}{4} \vartheta, a_2 = -(\tfrac{1}{10} \lambda + \tfrac{1}{45} \eta^2), a_3 = -(\tfrac{1}{36} \mu +$$
$$b_1 = -\tfrac{1}{12} \vartheta', b_2 = -\tfrac{1}{15} \lambda', b_3 = -(\tfrac{1}{36} \mu' + \tfrac{5}{216} \eta \vartheta')$$
$$c_2 = -(\tfrac{1}{60} \lambda'' + \tfrac{1}{45} \eta^2), c_3 = -(\tfrac{1}{72} \mu'' + \tfrac{1}{54} \eta \vartheta)$$
$$d_3 = -(\tfrac{1}{360} \mu''' + \tfrac{1}{60} \eta \vartheta').$$

Die Substitution endlich dieser Werthe in die oben für $\sigma \cos \varphi$, $\sigma \sin \varphi$, $\sigma \cos \psi$ und σ^2 entwickelten Reihen gi von Hansen a. a. O. Art. 118 entwickelten Reihen.

In Bezug auf die Ableitung der Reihe für $\varphi + \psi$ d wohl auf Gauss: disquisitiones generales circa superficies Art. 24, verweisen.

§ 12.

Rückblick.

Die oben gegebene Entwicklung unterscheidet sich mehrf der durch Hansen gegebenen, und ich glaube, diesen Tite beschliessen zu dürfen, ohne kurz nochmals diese Unterschiede gehoben zu haben.

Zunächst ist der Ausgangspunkt beider Entwicklungen versc die eben vorgetragene legt nach Gauss' Vorgange ein Syst Differentialgleichungen mit zwei Veränderlichen zu Grunde, v Hansen von einem Systeme dreier gewöhnlicher Diffe

*) Hansen, Geodätische Untersuchungen. Art. 113.

en ausgeht; dann hat Hansen die in den Reihen für
$\sigma \sin \varphi$, $\sigma \cos \varphi$, $\sigma \sin \varphi$ und σ^2 auftretenden Coëffizienten
rch die Coëffizienten der von ihm für das Krümmungsmass
en Reihe ausgedrückt, während oben die Coëffizienten
er Reihen zunächst durch diejenigen Coëffizienten eliminiert
welche in der als Ausgang gewählten Reihe für σ^2 ent-
nd und erst zuletzt durch doppelte Substitution sowohl
n mir, als auch in die von Hansen entwickelte Reihe für
nmungsmass die Relationen zwischen meinen und den
schen Coëffizienten sich ergeben. Da nun diese doppelte
on ungemein einfach ist und durch den von mir gegebenen
Rechnung manche der bei Hansen's Ableitung erforder-
mlich umständlichen Berechnungen erspart werden, so hoffe
h obige Entwicklung den Hauptvorwurf, welcher die
sche Formel getroffen hat, nämlich die Umständlichkeit
eitung, beseitigt zu haben. Nicht unerwähnt möge schliesslich
ass sich noch einige Kürzungen der Rechnung hätten be-
ssen, wenn man anstatt von der Reihe für σ^2, von der-
r $\frac{1}{m}$ ausgegangen wäre; allein diese Kürzungen sind so
nd, dass ich auf dieselben um so eher verzichten zu können
ls die von mir gewählte Reihe eine der bei der späteren
erforderten Reihen darstellt, während die Reihe für $\frac{1}{m}$
chnung überhaupt von gar keiner Bedeutung ist, vielmehr
Entwicklung der Reihe für $\varkappa$ dient.

DRITTER THEIL.

suchung über die Gründe der Genauigkeit von Hansen's Formel.

§ 13.

Literarischer Ueberblick.

ndelt sich noch um die Frage, welchen Umständen die
von Hansen gegebenen Formeln*) ihre hervorragende

ichte und Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der
ten 1872. (Vergl. auch § 8.)

Genauigkeit zu verdanken habe. Bevor ich jedoch in d
suchung eintrete, möchte ich auch die übrigen behufs I
selben Aufgabe entwickelten Formeln einer wenn auch nur
Besprechung unterziehen, welche vor allem dem Zwecke
dem Leser ein klares Bild zu geben von den seitens der ve
Forscher erzielten Resultaten sowohl, als von den Wegen,
diese Resultate erlangt wurden. Dann aber wird auch,
gebotene Kürze es gestattet, eine Vergleichung der
Formeln in Bezug auf ihren relativen Werth angestrebt

An hierher gehörigen Formeln sind, ausser den vo
gegebenen, diejenigen von Bessel[1]), Schering[2]), Wei
Helmert[4]) und Andrä[5]) zu nennen. Die Ausdrücke
genannten sollen jedoch von vornherein von der Untersu
geschlossen werden, weil sie auf ganz andrer Basis beru
ihrer Entwicklung ebenfalls so völlig von den übrigen
dass sie nicht wohl zu einer vergleichenden Betrachtung
(Ueber den Grad der Genauigkeit dieser Andrä'sche
lungen vergleiche übrigens einen Aufsatz von Helme
„Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 1878
werden auch Bessel's und Helmert's Formeln unbe
bleiben: die erstere deshalb, weil sie von Bessel zwa
von Hansen jedoch erst in den „Geodätischen Unter
entwickelt wurde, erst Letzterem auch diejenige Erweit
dankt, welche sie mit einer von Weingarten gegebenen
Vergleich zu setzen erlaubt: die letztere, weil Helme
die Identität seiner Formel mit der von Hansen in d
tischen Untersuchungen"**) entwickelten constatiert hat,
Formel also, welche, als durch spätere Entwicklungen
troffen, vernachlässigt werden kann.

---

[1]) Astronomische Nachrichten. 1822 No. 6.

[2]) Göttinger Nachrichten. 1868.

[3]) a. Astronomische Nachrichten. 1733 und 1782.
b. Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden
Büreaus der Europäischen Gradmessung, Heft 2.

[4]) Dänische Gradmessung, Bd. 1.

[5]) Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höhe

*) Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höhe
Bd. I, pag 367 Anm.

**) Pag. 191.

§ 14.

Die Formel von Schering.

z der Hansen'schen Bemerkung, dass für ein Ellipsoid
er Excentricität nur die Summe der Glieder irgend einer
und derjenigen der nächst höheren ungeraden Ordnung
einer sei, als die Summe der beiden vorhergehenden Ord-
hat Schering die Gaussische Formel auf Grössen
ng erweitert und die gefundene Formel dadurch vereinfacht,
ausser den Krümmungsmassen in den Eckpunkten des
noch drei neue Krümmungsmasse, nämlich die den Mitten
ecksseiten entsprechenden, einführte und mit deren Hülfe
e Coëffizienten der Gleichung eliminierte. Seine Formel
- allerdings ohne eine Entwicklung derselben zu geben —
Göttinger Nachrichten" vom Jahre 1868 pag. 389 ff. ver-
. Dieselbe lautet:

$$A - A^*$$

$$+\beta+\gamma-{}^1/_{10}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}+2\mathfrak{C})+{}^1/_{15}a^2(-2a^2+b^2+c^2)\Big\},$$

n zur Abkürzung:

$$4\beta-4\gamma=\mathfrak{A},\ 4\alpha+8\beta_1+4\gamma=\mathfrak{B},\ 4\alpha+4\beta+8\gamma_1=\mathfrak{C}$$

durch α_1, β_1, γ_1 die oben erwähnten Krümmungsmasse
ttelpunkten der drei Seiten bezeichnet.
chst möchte ich nun die von Schering unterdrückte
hier nachzuholen versuchen.
allgemeine Ausdruck für das Krümmungsmass (bis auf
. Ordnung (incl.) genau) lautet:

$$=\eta+\vartheta k+\vartheta' h+{}^1/_2\lambda k^2+\lambda' k h+{}^1/_2\lambda'' k^2,$$

n k und h als variabel ansieht. Den Mitten der Seiten
n nun die Werthe $\left(\frac{k}{2},\frac{h}{2}\right)$, $\left(\frac{k}{2},\frac{h'}{2}\right)$, $\left(k,\frac{h+h'}{2}\right)$, durch
stitution man sofort erhält:

$$\vartheta k+\frac{\vartheta'}{2}(h+h')+{}^1/_2\lambda k^2+{}^1/_2\lambda' k\frac{h+h'}{4}+{}^1/_8\lambda''(h+h')^2$$

$${}^1/_2\vartheta k+{}^1/_2\vartheta' h+{}^1/_8\lambda k^2+{}^1/_4\lambda' k h+{}^1/_8\lambda'' h^2$$

$${}^1/_2\vartheta k+{}^1/_2\vartheta' h'+{}^1/_8\lambda k^2+{}^1/_4\lambda' k h'+{}^1/_8\lambda'' h'^2.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen ϑk und ϑ' der Gleichungen:

$$\vartheta k = -\alpha - \beta\frac{h'}{h-h'} + \gamma\frac{h}{h-h'} - {}^1/_2\,\lambda\,k^2 + {}^1/_2\,\lambda''\,h$$

$$\vartheta' = \beta\frac{1}{h-h'} - \gamma\frac{1}{h-h'} - \lambda'\,k - {}^1/_2\,\lambda''\,(h+h'),$$

so erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$o = -\alpha_1 + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} - {}^1/_8\,\lambda''\,(h-h')^2,$$

$$o = -\beta_1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - {}^1/_8\,\lambda\,k^2 - {}^1/_4\,\lambda'\,k\,h - {}^1/_8\,\lambda$$

$$o = -\gamma_1 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} - {}^1/_8\,\lambda\,k^2 - {}^1/_4\,\lambda'\,k\,h' - {}^1/_8$$

Addiert man diese drei Gleichungen, nachdem man mit 8, jede der beiden anderen mit 16 multiplicierte, so

$$o = -8\,\alpha_1 + 16\,(\beta_1+\gamma_1) + 16\,\alpha + 4\,(\beta+\gamma)$$
$$- 4\,\lambda\,k^2 - 4\,\lambda'\,k\,(h+h') - \lambda''\,(3\,h^2 - 2\,h\,h'$$

oder:

$$4\,\lambda\,k^2 + 4\,\lambda'\,k\,(h+h') + \lambda''\,(3\,h^2 - 2\,h\,h' + 3\,h'$$
$$= -8\,\alpha_1 + 16\,(\beta_1+\gamma_1) + 16\,\alpha + 4\,(\beta+\gamma).$$

Multipliciert man noch beiderseits mit $\frac{A}{120}$, so wird:

$$\frac{A}{120}\,[4\,\lambda\,k^2 + 4\,\lambda'\,k\,(h+h') + \lambda''\,(3\,h^2 - 2\,h\,h' + 3\,h'^2)$$
$$= \frac{A}{120}\,[-8\,\alpha_1 + 16\,(\beta_1+\gamma_1) + 16\,\alpha + 4\,(\beta+\gamma)].$$

Nun ist (Gauss: disquisitiones generales circa superfic Art. 26) bis auf Grössen 5. Ordnung (excl.):

$$A - A^* = \sigma\,\{{}^1/_6\,\alpha + {}^1/_{12}\,\beta + {}^1/_{12}\,\gamma + {}^2/_{15}\,f''\,p^2 + {}^1/_5\,g'\,p\,(q$$
$$+ {}^1/_5\,h^0\,(3\,q^2 - 29\,q' + 3\,q'^2) + {}^1/_{90}\,f^{02}\,(4\,p^2 - 11\,q^2 + 14\,q$$

Führt man in diese Formel die Hansen'schen Beze ein, so nimmt dieselbe (vergl. auch Hansen „Geodätisc suchungen" Art. 129. Anm.) die Form an:

$$\frac{A}{12}\Big\{(2\alpha+\beta+\gamma)$$
$$-\,{}^1/_{10}\,[4\,\lambda\,k^2+4\,\lambda'\,k\,(h+h')+$$
$$+\,\lambda''\,(3\,h^2-2\,h\,h'+3\,h'^2)]+$$
$$+\,\frac{\alpha^2}{15}\,[2\,k^2-h^2+4\,h\,h'-h'^2]\Big\}\,*)$$

r ist **) mit hier hinreichender Genauigkeit:

$-k^2$, $2\,h\,h' = -a^2+b^2+c^2-2\,k^2$, $h'^2 = b^2-k^2$.

man mittelst dieser Gleichungen die Dreiecksseiten in Formel ein, so erhält man

$$\frac{A}{12}\Big\{(2\alpha+\beta+\gamma)-{}^1/_{10}\,[4\,\lambda\,k^2+4\,\lambda'\,k\,(h+h')+$$
$$+\,\lambda''\,(3\,h^2-2\,h\,h'+3\,h'^2)]+\frac{\alpha^2}{15}\,(-2\,a^2+b^2+c^2)\Big\}.$$

weite Ausdruck dieser Formel ist aber nach der obigen nichts anderes als:

$$-8\,\alpha_1+16\,(\beta_1+\gamma_1)+16\,\alpha+4\,(\beta+\gamma),$$

ieder offenbar:

$$=\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{B}+2\,\mathfrak{C},$$

B, C die von Schering angegebenen oben erwähnten zeichnen, so dass schliesslich in der That:

$$\frac{A}{12}\Big\{(2\alpha+\beta+\gamma)-{}^1/_{10}\,(\mathfrak{A}+2\,\mathfrak{B}+2\,\mathfrak{C})+\frac{\alpha^2}{15}\,(-2\,a^2+b^2+c^2)\Big\}$$

von Schering gegebene Formel ist bis auf Grössen ; (excl.) mit der von Hansen gegebenen identisch, genau e Gauss'sche Formel, deren Identität schon Hansen t etc. Art. 22) constatiert hat. Der Schering'schen denkt Hansen (Supplement etc. Einleitung pag. 293), derselben den Vorzug vor einer von Weingarten in der „Astronomischen Nachrichten" veröffentlichten Formel Um zu erfahren, ob oder wie weit diese Anerkennung ist, wird es erforderlich sein, zuvörderst die letzterwähnte nfalls einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

gl. Hansen: Supplement zu der „Geodätische Untersuchungen" bhandlung etc. Art. 22. Anm.

sen, Supplement etc. Art. 23. Geod. Untersuchung. Art. 123.

§ 15.

Weingarten's Formel.

Die Formel, von welcher im Folgenden die Rede s
anspruchte besondere Beachtung. Wenn ich hier von
garten'schen Formel spreche, während derselbe do
veröffentlichte, so ist dies dahin zu verstehen, dass hi
von der **allgemeinen** Weingarten'schen Formel die
soll, weil diese Formel, welcher Weingarten eine Gen
auf Glieder 5. Ordnung (excl.) vindiziert, allein zu einer
mit der Schering'schen geeignet ist. Weingarten ve
diese Formel, wie schon im vorigen Paragraphen ku
wurde, in den „Astronomischen Nachrichten" vom J
Sie lautet in der Weingarten'schen Bezeichnungsweis

$$\delta A = -\frac{\sigma}{12}\{2\alpha+\beta+\gamma\}+\frac{\sigma i_3}{120}\left\{2\frac{(\beta-\alpha)^2}{\lambda}+2\frac{(\gamma-\alpha)^2}{\lambda}-\right.$$

$$+\frac{\sigma}{120}\left\{2\frac{(\beta-\alpha)(\mu-\lambda)}{\lambda}+2\frac{(\gamma-\alpha)(\nu-\lambda)}{\lambda}+\frac{(\beta-}{}\right.$$

$$-\frac{\sigma}{120}\frac{i_3\lambda-i_1}{\lambda}\{a^2+2b^2+2c^2\}-\frac{\sigma\alpha^2}{180}\left\{b^2+c^2-\right.$$

In derselben bezeichnet σ den Inhalt des sphäroidi
ecks, α, β, γ sind die Krümmungsmasse in den Ecken
Dreiecks, die Grössen λ, μ, ν endlich sind Funktionen di
mungsmasse, der bei Hansen ϑ und ϑ' genannten C
und gewisser anderer Grössen, welche Weingarten „I
nennt.

Ausgehend von dem Grundsatze, dass in den analyt
drücken derjenigen Eigenschaften einer krummen Fläche,
der speziellen Natur der letzteren unabhängig sind, nicht
enthalten sein dürften, welche aus der Gleichung der
zogen seien, sondern dass vielmehr alle diese Coëffizie
durch diejenigen auszudrücken seien, welche im Aus
Linearelementes der Fläche vorkommen, erklärte Weing
damals in minder vollkommener Form veröffentlichte Ha
Formel für „werthlos", — (es ist dies die Endformel in
dätischen Untersuchungen", welche ausser den Krümm
in den drei Ecken noch die dem allgemeinen Ausdruck
Krümmungsmass entnommenen Coëffizienten $\lambda, \lambda', \lambda'', \mu,$

und bemühte sich, eine von diesen Gebrechen freie Formel
n. Zu diesem Zwecke dienen ihm nun die schon oben
„Inflektenten".
eselben wurde Weingarten durch die Bemerkung geführt,
genschaft, welche Gauss in seinen disquisitiones generales
ficies curvas vom Krümmungsmasse bewiesen habe: beim
der Fläche ungeändert zu bleiben, — eine Eigenschaft,
en analytischen Ausdruck eben darin findet, dass das
smass als Funktion nur der Coëffizienten des Ausdrucks
nearelement der Fläche darstellbar ist, — nicht dieser
llein zukomme, sondern noch anderen, und alle diese
nennt er Inflectenten.
ste Inflektente, von welcher er ausgeht, ist das Krümmungs-
gend einem Punkte der Fläche. Dieselbe ist bestimmt
Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}\left(F\,\partial\ln\sqrt{E/G}\right)+\frac{\partial E}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\left(F\,\partial\ln\sqrt{G/E}\right)+\frac{\partial G}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\}$$

ildung der von ihm gegebenen Formel reicht aber diese
ente nicht aus, sondern dazu braucht Weingarten noch
r. Diese: h, J_1, J_2, J_3 sind durch folgende Gleichungen

$$\frac{\left(\frac{\partial k}{\partial q}\right)^2-2F\frac{\partial k}{\partial q}\frac{\partial k}{\partial p}+G\left(\frac{\partial k}{\partial p}\right)^2}{EG-F^2}$$

$$\frac{\frac{\partial k}{\partial q}\frac{\partial h}{\partial q}-F\left(\frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial q}+\frac{\partial k}{\partial q}\frac{\partial h}{\partial p}\right)+G\frac{\partial k}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial p}}{EG-F^2}$$

$$\frac{\frac{\partial h}{\partial q}-\frac{\partial k}{\partial q}\frac{\partial h}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$\frac{1}{-F^2}\left\{\frac{\partial}{\partial q}\cdot\frac{E\frac{\partial k}{\partial q}-F\frac{\partial k}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{\partial}{\partial p}\cdot\frac{G\frac{\partial k}{\partial p}-F\frac{\partial k}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\}.$$

Die Werthe, welche diese Inflektenten h, J_1, J_2, J_3 A annehmen, bezeichnet Weingarten resp. durch während μ und ν die Werthe der Inflektente h in den B und C repräsentieren.

Nachdem so die in der oben citierten Formel (9) vo Coëffizienten ihre Erklärung gefunden haben, wird es sic zwecks der später anzustellenden Vergleichung dieser der von Schering gegebenen auch hier die Hanse zeichnungen einzuführen. Um Verwechslungen vorzube im Folgenden die oben durch λ, μ, ν bezeichneten Inflek A, M und N dargestellt werden.

Nach Weingarten ist:

$$h = r^2 + s^2 + 2p(sl' + rl) + 2q(rl' + sl') + p^2(l'^2 + l^2 +$$
$$+ 2pq(l'l'' + ll' + am_2 + rm_1) + q^2(l'^2 l''^2 + sm_3 +$$

In diesem Ausdrucke sind $r, s, l, l' \ldots\ldots$ die Grö bei der Entwicklung des Krümmungsmasses $\varkappa$ in eine n von p und q fortlaufende Reihe auftreten, und zwar ist:

$$\varkappa = a + rp + sq + \tfrac{1}{2}(lp^2 + 2l'pq + l''q^2)$$
$$+ \tfrac{1}{3}(mp^3 + 3m'p^2q + 3m''pq^2 + m'''q^3)$$

Da nun nach Hansen

$$\varkappa = \eta + \vartheta k + \vartheta' h + \tfrac{1}{2}(\lambda k^2 + 2\lambda' kh + \lambda h''^2)$$
$$+ \tfrac{1}{3}(\mu k^3 + 3\mu' k^2 h + 3\mu'' k h^2 + \mu''' k^3)$$

ist, so folgt sofort die Identität jener Weingarten'sch entsprechenden Hansen'schen Coëffizienten. Durch ei stitution erhält man demnach:

$$A = \vartheta^2 + \vartheta'^2, M = \vartheta^2 + \vartheta'^2 + 2(\vartheta'\lambda' + \vartheta\lambda)k + 2(\vartheta\lambda' +$$
$$+ (\lambda'^2 + \lambda^2 + \vartheta'\mu' + \vartheta\mu)k^2 + 2(\lambda'\lambda'' + \lambda\lambda' +$$
$$+ (\lambda'^2 + \lambda''^2 + \vartheta'\mu''' + \vartheta(\mu'' + \eta\vartheta))$$

während N aus M hervorgeht, wenn man für h schreib

Die Grössen i_1, i_2, i_3 bestimmen sich in analoger

$$i_1 = \vartheta'(\vartheta\lambda' + \vartheta'\lambda'') + \vartheta(\vartheta'\lambda' + \vartheta\lambda)$$
$$i_2 = \vartheta'(\vartheta'\lambda' + \vartheta\lambda) - \vartheta(\vartheta\lambda' + \vartheta'\lambda'')$$
$$i_3 = \lambda'' + \lambda.$$

ituiert man endlich die so bestimmten Grössen in die
ten'sche Formel, so erhält dieselbe die Form:

$$2\alpha + \beta + \gamma]$$

$$\frac{'+\lambda)}{20}\left\{\frac{2(\beta-\alpha)^2}{\lambda}+\frac{2(\gamma-\alpha)^2}{\lambda}+\frac{(\beta-\gamma)^2}{\lambda}\right\}$$

$$\left\{\beta(3M-2A-N)+\alpha(4A-2M-2N)-\gamma(M+A-3N)\right\}$$

$$\frac{\lambda''+\lambda)\lambda-\vartheta'(\vartheta\lambda'+\vartheta'\lambda'')+\vartheta(\vartheta'\lambda'+\vartheta\lambda')}{\lambda}(a^2+2b^2+2c^2)$$

$$(b^2+c^2-2a^2)$$

$$+\beta+\gamma]$$

$$2\frac{\beta-\alpha}{\vartheta^2+\vartheta'^2}(\beta-\alpha)(\lambda''+\lambda)+(A-M)]+$$

$$+2\frac{\gamma-\alpha}{\vartheta^2+\vartheta'^2}[(\gamma-\alpha)(\lambda''+\lambda)+(A-N)]+$$

$$+\frac{\beta-\gamma}{\vartheta^2+\vartheta'^2}[(\beta-\gamma)(\lambda''+\lambda)+(M-N)]-$$

$$-\frac{(\lambda''+\lambda)\lambda'-\vartheta'(\vartheta\lambda'+\vartheta'\lambda'')+\vartheta(\vartheta'\lambda'+\vartheta\lambda')}{\vartheta^2+\vartheta'^2}(4k^2+3h^2-2hh'+3h'^2)\Big\}$$

$$(-2a^2+b^2+c^2)$$

$$\alpha+\beta+\gamma)$$

$$4\lambda k^2+4\lambda' k(h+h')+\lambda''(3h^2-2hh'+3h'^2)]$$

$$-2a^2+b^2+c^2)$$

$$8\frac{\vartheta^2-\vartheta'^2}{\vartheta^2+\vartheta'^2}\lambda k^2+8\frac{\vartheta\vartheta'}{\vartheta^2+\vartheta'^2}(\lambda+\lambda'')k(h+h')$$

$$-2\lambda''\left[3\frac{\vartheta^2-\vartheta'^2}{\vartheta^2+\vartheta'^2}(h^2+h'^2)+2\frac{\vartheta'^2}{\vartheta^2+\vartheta'^2}hh'\right]\Big\}.$$

§ 16.

Diskussion der Weingarten'schen Forme

Der im vorigen Paragraphen entwickelte Ausdruck z
dass die Weingarten'sche Formel allerdings ebenfal
Glieder 4. Ordnung enthält und bei einer Anwend
Rotationsellipsoid, dessen Excentricität als eine k
1. Ordnung angesehen werden kann, (so dass schon di
von e vernachlässigt werden dürfen), den gleichen Rang
keit, wie die Schering'sche Formel, beanspruchen kan
jedoch steht sie der letzteren bedeutend nach, wenn
ständlichkeit berücksichtigt, mit welcher nothwendigerv
rechnung ihrer Elemente verbunden ist. Eine Anwend
vollends auf eine Fläche, für welche die Grössen ϑ, ϑ
Grössen 2. Ordnung sind, (etwa für ein Rotationselli
Excentricität nicht als kleine Grösse 1. Ordnung aufg
darf), ist unstatthaft, wie der oben entwickelte Ausdr
zeigt, da in diesem Falle die Weingarten'sche
Glieder 4. Ordnung enthält, welche in der allgemeinen
enthalten sind. So resultiert aus alledem, wie rich
allerdings ohne seine Behauptung durch Gründe zu
diese Formel geurtheilt hat, wenn er von ihr sagt*):
ist, dass sie, wenn man auch von anderen, hier in B
menden Umständen absehen will, schon ihrer ungemeinen
wegen, nicht einmal die Vergleichung mit einer schon
Herrn Schering veröffentlichten Formel, die bis au
Ordnung richtig ist, bestehen kann. Weniger noch i
Bezug auf den hier entwickelten Ausdruck der Fall, d
seiner Einfachheit eine Ordnung genauer ist."

Der Ausdruck, von welchem Hansen hier spricht,
welchen er schon in den Berichten der Königl. Sächsi
schaft der Wissenschaften vom Jahre 1869 veröffentlic
diesem Ausdrucke ist auch der angebliche Mangel bese
der zuerst von Hansen gegebenen Formel so oft z
gemacht wurde. Desselben gedenkt auch Weingarte
sonders und versuchte ihn durch seine Entwicklungen
worden allerdings nur unvollkommen — ebenfalls zu
Mangel nämlich, dass in jener Hansen'schen Formel
von Differentialquotienten des Krümmungsmasses enth

*) Supplement etc. pag. 5.

schon im Eingange dieses Paragraphen erwähnt wurde, garten darauf, dass seine Entwicklungen nur die Coëffi- Linearelementes der Fläche und die Differentialquotienten fizienten enthalten sollen, ganz besonderen Werth: darin en Kernpunkt der Gauss'schen disquisitones erblicken

lie von Weingarten sonst noch gegebene Formel be- e sich speziell auf die Reduktion eines auf einem Rota- de liegenden sphäroidischen Dreiecks bezieht, so glaube auch Weingarten selbst in bestimmtester Form für iel den Vorrang vor der von Hansen gegebenen in immt, aus zwei Gründen auf eine nähere Besprechung erzichten zu dürfen: einerseits hat Hansen selbst*) geringere Genauigkeit derselben nachgewiesen und andererr sie dasselbe, was von der eben behandelten Formel ie nämlich durch die von Hansen an seiner Formel an- Verbesserungen überflüssig geworden. Denn der einzige lchen sie ursprünglich vor der Hansen'schen Formel e: dass sie nur aus den Coëffizienten des Linearelementes resp. aus daraus abzuleitenden Elementen sich zusammen- lurch die späteren Entwicklungen Hansens illusorisch Dass sie aus derselben durch einfache Transformation verden kann, hat Hansen**) bewiesen. Ebenso darf hl auch die Erörterung der Ursachen ersparen, durch geringere Genauigkeit der Weingarten'schen im Ver- : Hansen'schen Formel bedingt ist, möchte in dieser vielmehr nur auf zwei Aufsätze in der Vierteljahrsschrift mischen Gesellschaft verweisen.***)

§ 17.

Die modifizierte Formel Hansen's.

m in den vorhergehenden Paragraphen die hierher ge- Formeln, mit Ausnahme der Hansen'schen Entwick-

pplement etc. Art. 49, conf. auch ebenda Einleitung pag. 294.
richte und Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft naften zu Leipzig. Bd. 13, 1869.
erteljahrschrift der Astronomischen Gesellschaft. Bd. 5, 1870 und

ber die von vornherein ausgeschlossenen Formeln vergleiche die dieser Arbeit.

lungen, eingehend behandelt worden sind, während die
ersten Theile dieser Arbeit eine übersichtliche Darstell
haben, bleibt es wünschenswerth, darüber Aufklärung
welchen Ursachen die letzte der von Hansen mit s
vorgenommenen Modifikationen ihre hervorragende Ge
verdanken habe. Und zwar glaube ich um so weniger
Erörterung dieses Umstandes hier unterlassen zu dür
gedachte modifizierte Formel Hansen's trotz ihrer
Einfachheit bisher die ihr gebührende Berücksichtigung ni
hat, wie derselben z. B. auch in dem, was die Anga
schlägigen Literatur betrifft, sonst so umfassenden He
Werke: „Mathematische und physikalische Theorieen
Geodäsie" überhaupt nicht gedacht ist.

Die Modifikation, um welche es sich hier handelt,
ersten Theile dieser Arbeit am Schlusse der Dars
Hansen's Entwicklungen kurz erwähnte

$$\delta A = -\frac{A}{480} F' (2p' + q' + r') - \frac{A}{120} (2p +$$

Diese letztere Formel ist es, welche bei numerischen
bedeutend genauere Resultate giebt, als der frühere A

$$\delta A = -\frac{3}{40} \frac{A}{40} (2p' + q' + r') - \frac{A}{480} F (p +$$

eine Thatsache, welche bisher, soweit mir bekannt is
Erklärung harrt. Aufgabe des Folgenden soll es nun
Erklärung wenigstens zu versuchen.

In der früheren Formel $\delta A = -\frac{3}{40} \frac{A}{}$ (2 p' ·

$-\frac{A}{480} F (2p + q + r)$ sind nach den für dieselbe gen
aussetzungen die Grössen p, q, r, p', q', r' definier
Gleichungen:

$$p = \alpha - 1, q = \beta - 1, r = \gamma - 1, p' = \delta - 1, q' = \beta_1 - 1,$$

wenn α, β, γ die Krümmungsmasse in den drei Ecke
und $\delta, \beta_1, \gamma_1$ die § 7 entwickelte Bedeutung haben. L
Ausdruck für δA in seine Bestandtheile auf, indem
dessen Werth: $4 - a^2 + 3b^2 + 3c^2$ substituiert, so

$$\frac{3\Delta}{40}(2p' + q' + r') - \frac{\Delta}{480}4(2p + q + r)$$

$$\frac{\Delta}{480}(-a^2 + 3b^2 + 3c^2)(2p + q + r).$$

esem Ausdrucke entsteht die modifizierte Formel Hansens, n dem letzten Gliede desselben für $2p + q + r$ schreibt: $- r'$, (was ja statthaft ist, da für dieses Glied die oben lentische Gleichung statt hat), und dann das erste und ., welche dann den gemeinsamen Faktor $2p' + q' + r'$ einander vereinigt.

ern nun diese Transformation einen verschiedenen Grad gkeit der ersten und zweiten Formel bedingt, sieht man n man in die Ausgangsformel statt der Grössen p, q, r, Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta_1, \gamma_1$ einführt. Durch Substituierung ıit Hülfe der Definitionsgleichungen des § 7 wird zunächst:

$$\frac{3\Delta}{40}(2\delta + \beta_1 + \gamma_1)$$

$$\frac{\Delta}{480}4(2\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\frac{\Delta}{480}(-a^2 + 3b^2 + 3c^2)(2\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\frac{\Delta}{120}(40 - a^2 + 3b^2 + 3c^2).$$

zten Gliede dieser Gleichung darf, da in demselben nur 1. Ordnung der für α, β, γ oben (§ 6) entwickelten Betracht kommen, und unter dieser Voraussetzung die $\alpha + \beta + \gamma = 2\delta + \beta_1 + \gamma_1$ statt hat, für $2\alpha + \beta + \gamma$ werden $2\delta + \beta_1 + \gamma_1$. Dadurch kommt:

$$\frac{3\Delta}{40}(2\delta + \beta_1 + \gamma_1)$$

$$\frac{\Delta}{480}4(2\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\frac{\Delta}{480}(-a^2 + 3b^2 + 3c^2)(2\delta + \beta_1 + \gamma_1)$$

$$\frac{\Delta}{120}(40 - a^2 + 3b^2 + 3c^2).$$

Zieht man jetzt ebenfalls das erste und das let
sammen, so ist zu berücksichtigen, dass in jenen
$2\delta + \beta_1 + \gamma_1$ sich von derselben Grösse in diesem u
der Glieder 2. und 3. Ordnung unterscheidet, ebe
Faktor $2\alpha + \beta + \gamma$ des zweiten Ausdruckes der letzt
sich von dem Faktor $2\alpha + \beta + \gamma$ der unaufgelösten
die Summe der Glieder 2. und 3. Ordnung unterscheid
also nach der ersten Formel:

$$\delta A = -\frac{3A}{40}(2p' + q' + r')_3 - \frac{A}{120}(2p + q + r)_1$$

$$-\frac{A}{480}(-a^2 + 3b^2 + 3c^2)(2p + q + r)_1$$

ist, wird nach der zweiten Formel:

$$\delta A = -\frac{3A}{40}(2p' + q' + r')_1 - \frac{A}{120}(2p + q + r)_3$$

$$-\frac{A}{480}(-a^2 + 3b^2 + 3c^2)(2p' + q' + r')_1.$$

so dass sich die modifizierte Formel Hansens und
welcher sie hergeleitet wurde, um die Grösse:

$$S = \frac{3A}{40}[(2\delta + \beta_1 + \gamma_1)_3 - (2\delta + \beta_1 + \gamma_1)_1]$$

$$-\frac{A}{120}(2\alpha + \beta + \gamma)_3 - (2\alpha + \beta + \gamma)_1]$$

unterscheiden, und zwar ist die modifizierte Forme
Ausdruck grösser als die ursprüngliche; die den Klam
fügten Indices 1 und 3 bezeichnen dabei die Ordnung, bi
die Berechnung der in den Klammern stehenden A
führen ist.

Um noch weiteren Aufschluss über diesen faktischen
zu erhalten, macht sich die Substitution der für die C
γ, δ, β_1, γ_1, oben (§§ 6 und 7) angeführten Re
Dieselbe ergiebt, wenn man gleichzeitig für die in de
δ, β_1 und γ_1 vorkommenden Grössen u, u', x und
erforderte, in Art. 25 des Supplements von Hansen
Werthe einsetzt, sofort den Werth der obigen Differen

$$\lambda k^2 + 5\lambda' k(h+h') + {}^1/_2\lambda''(3h^2+4hh'+3h'^2)$$

$$\mu k^3 + {}^3/_2\mu' k^2(h+h') +$$

$${}^1/_6\mu'' k(5h^2+8hh'+5h'^2) + {}^1/_6\mu'''(h^3+2h^2h'+2hh'^2+h'^3) -$$

$$2\eta\vartheta k(h^2+hh'+h'^2) + {}^3/_2\eta\vartheta' k^2(h+h') +$$

$$\frac{\vartheta k}{90}(17a^2+4b^2+4c^2) +$$

$$\frac{\vartheta'}{180}[17a^2(h+h')+105(c^2-b^2)(h-h')+8(b^2h+c^2h')] -$$

$$[\lambda k^2 + \lambda' k(h+h') + {}^1/_2\lambda''(h^2+h'^2) +$$

$${}^1/_3\mu k^3 + {}^1/_2\mu' k^2(h+h') + {}^1/_2\mu'' k(h^2+h'^2) + {}^1/_6\mu'''(h^3+h'^3) -$$

$${}^1/_3\eta\vartheta k(h^2+h'^2) + {}^1/_6\eta\vartheta' k^2(h+h')]\Big\}$$

$$k^2 + 4\lambda' k(h+h') + \lambda''(h+h')^2 +$$

$${}^2/_3\mu k^2 + \mu' k^2(h+h') + {}^1/_3\mu'' k(h^2+4hh'+h'^2) + {}^1/_3\mu'''(h^2h'+hh'^2) -$$

$$\frac{\eta\vartheta k}{3}(5h^2+hh'+5h'^2) + {}^4/_3\eta\vartheta' k^2(h+h') +$$

$$\frac{\vartheta k}{90}(17a^2+4b^2+4c^2) +$$

$$\frac{\vartheta'}{180}[17a^2(h+h')+105(c^2-b^2)(h-h')+8(b^2h+c^2h')]\Big\}$$

nun aber auch der vorstehende Ausdruck ausreichende
ber die Art und Grösse der Veränderung giebt, welche
Formel durch die mit derselben vorgenommenen Modi-
itt, so eignet er sich doch keineswegs ebensogut zu
ietrischen Deutung dieser Veränderung. In dieser
schafft auch die Einführung der Dreiecksseiten a, b, c
ssen k und h keinen Vortheil, wie der angestellte Ver-
wohl aber lässt der oben angeführte Ausdruck für den
henden Unterschied:

$$S = \frac{3A}{40}\Big\{(2\delta + \beta_1 + \gamma_1)_3 - (2\delta + \beta_1 + \gamma_1)_1\Big\}$$

$$- \frac{A}{120}\Big\{(2\alpha + \beta + \gamma)_3 - (2\alpha + \beta + \gamma)_1\Big\}$$

sich noch vereinfachen.

Berücksichtigt man, dass $(2\delta + \beta_1 + \gamma_1)_1 = (2\alpha$ so erhält man nämlich:

$$S = \frac{A}{120}\Big\{9\,(2\delta + \beta_1 + \gamma_1)_3 - (2\alpha + \beta + \gamma)_3\Big\}$$

$$- \frac{A}{15}\Big\{2\alpha + (\beta + \gamma)_1\Big\},$$

einen Ausdruck, der in eleganter Form den in Rede Unterschied darstellt. Aber auch dieser Ausdruck giebt geometrische Bedeutung der gedachten Modifikation keine Nur so viel scheint mir wenigsten zunächst klar zu jene von Hansen mit seiner Formel vorgenommene M gleichbedeutend ist mit der Einschaltung neuer Krümm zwischen jene früheren, durch welche Thatsache sich d dings auch die grössere Genauigkeit der modifizierte erklären würde. Die nähere Entwicklung dieser Krümm sowie den Beweis dafür, dass die gedachte Modifi Hansen'sche Formel genauer machen musste, möchte späteren Arbeit vorbehalten, weil mir die Rücksicht auf a Arbeiten für jetzt die Ausdehnung der vorstehenden Un auch auf diese Punkte unmöglich machte.

Vita.

nrad Haenig, Sohn des Hofkammer-Canzlei-Direktors G. Haenig, 4. April 1859 zu Cöthen in Anhalt geboren. Nachdem ich auf der es Herzogl. Gymnasiums zu Cöthen vorgebildet war, besuchte ich ien zu Cöthen und zu Dessau und verliess das letztere Ostern 1878 gnisse der Reife, um mich dem Studium der Mathematik zu widmen. andte ich mich nach Leipzig und hörte dort bei den Herren Bruhns †, Mayer, Scheibner, Zoellner †, besuchte auch n des erstgenannten Professors, des damaligen Direktors der Königl. Sternwarte. Michaelis 1879 bezog ich die Universität Berlin und ei den Herren Professoren Du Bois-Reymond, Helmholtz, ff †, Kummer, Lasson, Lotze †, Wangerin und ass. Im Juni 1882 bestand ich das Examen pro fac. doc. und ujahr 1882 bis Ostern 1882 vertretungsweise am Gymnasium zu häftigt. Ostern 1887, bis zu welcher Zeit ich im elterlichen Hause andte ich mich wiederum zur Universität Leipzig und hörte bei Professoren Bruns, Heinze, Masius, Neumann, Scheibner. 1888 bestand ich in Leipzig das Examen rigorosum und bin seit- Königl. Universitäts-Sternwarte thätig.

einen verehrten Lehrern sage ich hierdurch meinen geziemenden nders verpflichtet fühle ich mich aber den Herren Professoren r und Bruns, welche mich durch Rath und That vielfach bei lien unterstützten.

ÜBER DIE VIELDEUTIGKEIT

DER

RATUR UND RECTIFICATION

ALGEBRAISCHER CURVEN.

EINE GRATULATIONSSCHRIFT

EIER DES FUNFZIGJÄHRIGEN DOCTORJUBILÄUMS

DES HERRN

AUGUST FERDINAND MÖBIUS

DR. PHIL., PROF. D. HÖH. MECHANIK UND ASTRONOMIE,
KÖN. SÄCHS. GES. D. WISS., RITTER D. KÖN. SÄCHS. ALBRECHTS-ORDENS ETC.

AM 11. DECEMBER 1864

DARGEBRACHT

VON

HERMANN HANKEL
PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

LEIPZIG
LEOPOLD VOSS.
1864.

Hochzuverehrender Herr Jubilar,

dem grossen Kreise derer, welche heute mit Ihnen die
ihrige Wiederkehr des Tages feiern, an dem Sie einst die
eines „doctor philosophiae et bonarum artium magister"
en, wage auch ich es, vor Ihnen zu erscheinen, um dies
Fest mit meinen Glückwünschen zu begleiten.
gen Sie, hochverehrter Herr Professor, noch recht lange
eise Ihrer Familie, Ihrer Freunde und unserer altehrwür-
niversität, zu deren ausgezeichnetsten Mitgliedern Sie ge-
den, erhalten bleiben; mögen Sie noch lange der gelehrten
s beneidete Beispiel eines Mannes darbieten, der im Alter
roductiv ist wie in der Jugend, in der Jugend ebenso sorg-
d überlegt arbeitete, als im Alter. Möge Ihnen auch für
unft die geistige Frische und Kraft verliehen sein, die Sie
z rastlosen Strebens und angestrengten Arbeitens bis auf
igen Tag erhalten haben, wie dies nicht allein Ihre zahl-
Schriften der letzten Jahre, sondern auch Ihre unge-
te akademische Thätigkeit rühmlichst bezeugen.

se wenigen Blätter bitte ich als das aufzunehmen, als
sie geben möchte: als ein bescheidenes Zeichen mei-
ichtigsten Dankes für Ihr mir stets bewiesenes Wohl-
nd meiner tiefsten Hochachtung vor Ihren epochemachen-

den Leistungen auf dem Gebiete der neueren Geomei
deren Begründern Ihr Name für alle Zeiten eine ausg
Stelle einnehmen wird. Sollten die folgenden Untersuc
die Ausführung einer Ihrer Ideen, die Sie wichtigerer F
wegen bisher keiner besonderen Bearbeitung unterzo
angesehen werden können und sollten dieselben trotz ih
ständigkeit und Einfachheit für Sie nicht ganz ohn
sein, so wäre der Zweck, der mich zu der Abfassung die
Schrift veranlasste, vollständig erfüllt.

Leipzig, 11. Dec. 1864.

In tiefster Hochachtung

Hermann

thümliche Charakter der antiken Geometrie wird nicht
rch ihr Streben nach Evidenz und Strenge des Beweises
als vielmehr durch ihre entschiedene Vorliebe für das
und die gänzliche Verläugnung aller allgemeinen Prin-
Methoden. So viele verschiedene Fälle in Bezug auf die
egebenen und gesuchten Linien in einer Aufgabe möglich
iele verschiedene Probleme sind für den griechischen
vorhanden, und die grössten Mathematiker des Alter-
en es für nothwendig gehalten, in ihren Schriften die
n denkbaren, oft sehr zahlreichen Fälle* von einander
, alle mit derselben Ausführlichkeit und Genauigkeit zu
Die Methode zu entwickeln, nach der im Wesentlichen
hiedenen Fälle behandelt werden können, oder aus den
Fällen ein allgemeines Resultat zu abstrahiren, kommt
bei; höchstens findet sich am Schlusse einer solchen
ng aller einzelnen Fälle eine sehr magere Recapitulation,
n bemerkt wird, dass man aus dem Vorstehenden ersehe,
ufgabe in allen möglichen Fällen unter den gefundenen
n lösbar sei.

nigermassen mit den mathematischen Schriften der Grie-
ut ist, kann nicht zweifeln, dass die alten Geometer die
Principien, auf denen alle die speciellen Constructionen
weise specieller Fälle beruhen, ihren grossen Umrissen
nt haben; sie waren aber nicht im Stande, diese
Gestalten festzuhalten und verschmähten es daher,

ONIOS' berühmte Schrift *περὶ λόγου ἀποτομῆς* behandelt ein und
abe in etwa 80 nur durch die Lage verschiedenen Fällen.

sie in ihren Schriften, wenn auch nur zur Erläuteru
zu rufen.

Jeder Begriff wird von ihnen in der allerengsten
genommen, die überhaupt zulässig ist; es hat wohl nie e
des Alterthums darauf aufmerksam gemacht, dass
zwischen zwei Geraden im Grunde nicht nur einer ist, s
zwei Winkel mit demselben Rechte als das Maass
zweier Geraden gegen einander angesehen werden kön
Aufgabe gestellt, eine begrenzte Gerade AB nach ein
Gesetze in einem Punkte C zu theilen, und ergiebt die
in der Allgemeinheit, wie wir sie jetzt auffassen, n
zwischen AB liegenden Punkte C einen anderen C' au
beiden, so wird der griechische Geometer letzteren o
ignoriren und, wie z. B. bei der Construction des golden
nur den Punkt C als Lösung der Aufgabe betrachten.

So opfert die antike Geometrie zu Gunsten einer
Einfachheit und Anschaulichkeit, die wahre Einfachhei
in der Allgemeinheit der Principien, und die wahre Ans
welche in der Erkenntniss des Zusammenhangs geom
stalten in allem Wechsel und in aller Veränderlichkeit i
vorstellbaren Lage beruht.

Die grosse Veränderung, welche die Mathematik
ziehung durch die modernen Culturvölker erleiden sc
sich in sehr entschiedener Weise von dem ersten Mom
in dem die mathematischen Studien einen neuen Auf
nommen haben. Die Ehrfurcht vor den geometrisc
des Alterthums war unbegrenzt, aber es schien unmögl
von ihnen eingeschlagenen Wege weiter vorzudringe
reichend, wenn man ihnen nur zu folgen im Stande w
die Geometrie anfangs ganz auf dem früheren Standpu
das Hauptinteresse war der neuen Wissenschaft, der
wandt, und während die Alten arithmetische Aufgab
trische Constructionen umzusetzen liebten, so wurde jet
jeder geometrische Satz eine algebraische Formel und
trische Aufgabe ein algebraisches Problem. Dabei zei
zur grössten Ueberraschung der Mathematiker nicht
eine Aufgabe, welche nach geometrischer Auffassung nur

gebraisch auf mehrere verschiedene Weisen gelöst werden
„In hac algebraica analysi illud maxime mirum est
geometram praecipue absterreat), quod non una via
potest, quod imperatur; quanquam id non omni lege
est" — und eben dieses Gesetz zu finden, war in der That
chte Aufgabe Vieta, der zuerst das damals äusserst
e Problem der Winkeltheilung algebraisch löste, indem
ungen gab, durch welche die Sehne des Bogens $\frac{1}{n}w$ mit
e des Bogens w selbst verbunden wurde, fand sofort, dass
ichungen mehrere Lösungen zuliessen, ohne dass er es ver-
diese Unbestimmtheit genügend zu erklären. Erst sein
nd Freund Anderson** gelangte hierin zu einer klaren
indem er bemerkte, dass eine gegebene Sehne nicht nur
, sondern zu zwei Bögen im Kreise gehöre, dass nämlich,
len kleineren Bogen und p die Peripherie bedeutet, w und
ie über derselben Sehne stehenden Bögen sind; die Tri-
es Winkels kann nicht allein $\frac{1}{3}w$, sondern muss auch
ergeben, also zweideutig sein. Er zeigt ferner, dass, wenn
ı, dessen Sehne gegeben ist, in 5 Theile getheilt werden
zu theilenden Bögen w, $(p-w)$ und $(2p+w)$ sind; dass
Theilung in 7 gleiche Bögen, nicht allein w, sondern auch
$(2p+w)$, $(4p+w)$ getheilt werden; die Lösung also
ig auf 4 verschiedene Weisen geschehen kann.
erselben Zeit wurde Keppler durch seine kosmologischen
ungen auf die Construction der Polygone geführt und
chzuweisen, dass ausser den regulären Polygonen, deren
che Construction die Alten gelehrt hatten, keine anderen
l und Lineal, also geometrisch ausführbar seien.*** Den

—

Keppler, Harmonice mundi, Linz 1619. S. 37.

ngularium sectionum analyticen theoremata *καθολικώτερα*, a Fran-
Fontenacensi primum excogitata .... opera et studio Alexandri
ı Scoti. Paris 1615.

O. S. 32. Um die Wichtigkeit seiner Untersuchungen darzulegen,
daselbst: „Magna res agitur; per hunc enim effectum stetit, quo-
tagonus et caetera hujus generis figurae a Deo fuerint adhibitae

Beweis seiner Behauptung stützt er darauf, dass, v
Construction des Siebeneckes gäbe, diese nothwendiger
rere verschiedene Lösungen haben werde, wie er geom
und scheint diese Vieldeutigkeit als ein Kriterium der g
Unlösbarkeit anzusehen, da er sie bei den von den Alt
Constructionen nicht vorfindet. Auch die Coss, mei
könne die Construction nicht geben, da sie einmal die
der geometrischen Construction mehrerer mittlerer Pr
voraussetze, die bekanntlich nicht ausführbar sei, an
damals von Jobst Byrg für die Seite des Siebeneckes
Gleichung nicht allein die Seite des eigentlichen
sondern auch die beiden Diagonalen desselben als
halte, also ebenfalls nicht „certa et geometrica r
Verlangte leiste.

Keppler geht aber noch weiter, indem er aus de
keit des Problemes, einen Winkel in 3, 5, 7 .. Theile z
die Unmöglichkeit, dasselbe mittels Cirkel und Lineal
schliesst: „Sectio circuli arcus cujuscunque in aequali
que, septem etc. ... non est de possibilitate geometri
scientiam generat.“

Freilich sind weder seine Schlüsse genau, noch
sultate richtig, wie am eclatantesten Gauss' berühmte,
Alten rein geometrische Construction des 17-Eckes zei
bleibt es ein hohes Verdienst Keppler's, die Vieldeu
Problemes als eine so nothwendige und charakteris
schaft desselben angesehen zu haben, dass er folgend
aussprechen konnte*: „An vero non possit aliqua
inveniri, qua sectiones arcuum omnimodae perficiantur
si omnes subtensae arcuum dividendorum sub com
considerentur et si illa tantum habemus praesidia, quae
quaesitis subtensis communia: ut sunt, illarum in

---

ad ornatum mundi, ut sunt quidem adhibitae scibiles figurae.“
Ausdruck erklärt er S. 8 in folgender Weise: „Scibile dicitur,
per se immediate est mensurabile per diametrum ... vel quo
minimum ex talibus quantitatibus certa et geometrica ratione,
cunque longa serie, tandem tamen a diametro dependent“.

* A. a. O. S. 42.

continue proportionales quotcunque: tunc nobilius
aud quisquam comminiscetur, actumque agit, quicunque
itur; et oppositum in adjecto statuit, confusus. Ex com-
enim nihil cuique proprium concludetur.“ Wie so oft, so
:ch hier Keppler jenen genialen Scharfblick, der über die
ler Schlussfolgerungen kühn hinwegschreitend, sich zur
Erkenntniss der allgemeinsten Principien und des inneren
nhanges der Dinge erhob. Welche Lücken aber seine
; des speciellen Sachverhältnisses nothwendig haben musste,
Genüge der Umstand, dass er sowohl als Anderson die
ictas“ der Gleichungen nothwendig ignoriren musste, da,
cheint, erst Albert Girard 1629 bemerkt hat, dass
Grössen sehr passend als den positiven entgegengesetzt
: angesehen werden könnten. In der That war es erst mit
ses Principes, welches mit solcher Schnelligkeit allge-
ingang fand, dass es Descartes in seiner 1637 erschie-
éométrie“ als ein wohlbekanntes und recipirtes anwenden
nöglich, die Vieldeutigkeit der Winkeltheilungen und ähn-
:obleme vollständig zu durchschauen. Doch hat vor
: Niemand darauf aufmerksam gemacht, dass bei einer
eines Bogens, dessen Sehne gegeben ist, in 5 gleiche Theile,
ein der eine kürzeste Bogen w, sondern alle durch den
und Endpunkt der Sehne eingeschlossenen Bögen berück-
werden müssen, und dass die Theilung nicht allein $\frac{1}{5}w$,
auch $\frac{1}{5}(p—w)$, $\frac{1}{5}(p+w)$, $\frac{1}{5}(2p—w)$ und $\frac{1}{5}(2p+w)$

:ehen auch hier Keppler und Newton in der Geschichte
enschaft dicht neben einander, und nicht durch Zufall,
handelt sich nicht um die an sich unwichtige Aufgabe
:eltheilung, sondern um die Erkenntniss von der Be-
solcher Betrachtungen, welche, ohne die Constructionen
Rechnungen wirklich auszuführen, aus dem Wesen
lemes selbst auf die Form der Lösung zu schliessen ge-
Die Ausführung dieses Gedankens war bei Keppler

—

metica universalis 1707. (De natura radicum.)

nothwendiger Weise sehr mangelhaft, sein grosser Na
Newton aber hat ein glänzendes Beispiel von der Fr
keit desselben gegeben, welches uns weiter unten ausführ
schäftigen soll.

Was speciell die Winkeltheilung betrifft, so hat Käst
gelegentliche Bemerkung Newton's weiter ausgeführt u
Frage, wie viele geometrische Lösungen die Theilung eines
hat, dessen Sinus oder Cosinus, oder Tangente, oder
Sehne, oder dessen Endpunkte gegeben sind, einer genaue
tersuchung unterworfen, und daraus Schlüsse auf den G
die Form der Gleichung gemacht, welche die Winkeltheilun
tisch darstellt, ohne darauf aufmerksam zu werden dass d
lungsgleichungen neben den reellen und geometrisch aufw
Wurzeln noch imaginäre besitzen könnten, und dass es de
weises bedürfe, dass solche nicht vorhanden seien. Da
dieser Nachweis nicht ohne die Theorie der complexen
nen, wie sie sich heute entwickelt hat, gegeben werden ka
dass es nicht die mindeste Schwierigkeit hat, auf Grun
Theorie die Form aller möglichen Winkeltheilungsgleichu
aller Strenge und ohne Rechnung zu erkennen, bedarf keine
ren Erörterung.

Betrachtungen dieser Art, wie wir sie Keppler und
haben vornehmen sehen und wie sie in der Analysis beson
Euler und Lagrange sowohl als inductive Hilfsmittel, a
zur wirklichen Beweisführung sehr häufig angewandt wurde
in der Geometrie überhaupt nur selten angestellt worden.
sächlich war daran Schuld die nach Descartes eintretende V
lässigung der geometrischen Anschauung und der in ihr liegen
sich aus ihr entwickelnden Methoden, die, wie Chasles ** b
so weit ging, dass man geometrische Sätze, die durch die ei
Anschauung gewonnen waren, mit einer algebraischen Ver

---

* Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum
tibus. Dissert. math. et phys. Altenburg 1771. Später in etwas le
aber sehr weitschweifiger Form (auf 114 Seiten!) in seinen geometr.
2. Samml. Göttingen 1791 behandelt.

** Geschichte der Geometrie, S. 652 der Uebersetzung.

der man den stolzen Namen einer „démonstration en forme“
ıdererseits aber kann auch nicht verhehlt werden, dass die
en Betrachtungen insofern eine ihrer Natur nach nothwen-
cke lassen, als die imaginären Lösungen einer Aufgabe,
lie algebraische Auflösung ergibt, nicht in befriedigender
ur Anschauung gebracht werden können. Ausserdem ist
ie Betrachtung der Vorzeichen von Strecken und Winkeln
die neueste Zeit mit einer Ungenauigkeit und scheinbaren
r vorgenommen worden, die gegen die auf dem obigen Wege
en Resultate nothwendig Misstrauen erzeugen musste.
ist Möbius' unsterbliches Verdienst, die Bedeutung des
en in der Geometrie* erkannt und in aller Schärfe und

ın darf nicht vergessen, dass nicht lange vor dem Erscheinen des
trischen Calcul," in welchem das Negative zuerst in geometrischen
hungen mit seiner vollständigen Allgemeinheit aufgetreten ist, Carnot
tive aus der Geometrie gänzlich zu verbannen suchte. Da er be-
dass die gewöhnliche Regel, nach welcher die positiven und negati-
zeln einer Gleichung, die ein geometrisches Problem löst, von einem
unkte aus nach verschiedenen Richtungen abgetragen werden sollen,
rall stichhaltig sei, und da er ferner die in dem Negativen liegenden
en klarer als seine Vorgänger erkannte, so zerhieb er, wie in seiner
les Unendlichkleinen, auch hier den Knoten, anstatt ihn zu lösen,
erklärte: „que toute quantité négative isolée est un être de raison et
s qu'on rencontre dans le calcul ne sont que de simples formes al-
, incapables de représenter aucune quantité réelle et effective.“
ie de position. Paris 1803. S. XVIII.) So war er freilich über die
gkeiten hinaus, aber er raubte dadurch der Geometrie die Unab-
it von der Betrachtung specieller Lagenverhältnisse, welche die
ne Geometrie besonders durch Monge's Arbeiten so eben erkämpft
enn seine Methode musste nach der Zurückweisung negativer Grössen
darin bestehen, dass er die Relationen zunächst an einer bestimmten
. h. unter ganz bestimmten Lagenverhältnissen ableitete, indem er
vorkommenden Strecken und Winkel als absolut, durch eine absolute
stellbar betrachtet. Anstatt nun nach der Weise der alten Geometer
agenverhältnisse unabhängig von dem ersten zu betrachten, denkt
ot das primitive System veränderlich und beobachtet die Aenderungen
tetigen Uebergange desselben in andere, correlate Lagen. Geht dabei
ame in eine Differenz, und umgekehrt über, so wird den betref-
rössen in den für das primitive System entwickelten Formeln das
Zeichen beigelegt werden müssen.
rend so Carnot nach echt rationalistischer Sitte seiner Zeit eine

Consequenz angewandt zu haben, indem er nicht allein einem festen Anfangspunkte einer Geraden nach rechts liegenden Abscissen, wie dies seit DESCARTES geschah, sond irgend welche begrenzte Abschnitte derselben als intensiv ansah, welche eines conträren Gegensatzes fähig sind. I MÖBIUS die Abschnitte einer Geraden durch einen sich be Punkt beschrieben denkt, entsteht ganz naturgemäss die nung einer „Strecke“ durch die Nebeneinanderstellung des punktes A und Endpunktes B der Bewegung, also AB Gegensatz derselben gegen die Strecke BA. Die hieraus Gleichungen $AB + BA = 0$ und $AB + BC + CA =$ die Grundlagen aller Beziehungen, welche zwischen den einer Geraden stattfinden und zwar ohne alle Rücksicht a eine specielle Lage. Will man die auf diese Weise gew

---

Vorstellung, die er nicht sogleich klar zu erfassen und von allen s Widersprüchen zu befreien vermochte, als eine durchaus unl gänzlich verwarf, gelangten die deutschen Mathematiker zu ande taten. Sie erkannten, dass in dem hie und da schon angewand nirgends consequent durchgeführten Begriff der Richtung einer Ge eines Winkels das eigentliche Geheimniss des Negativen liege. So KÄSTNER (Geometr. Abhandl. 1. Samml. 1790 S. 464): „Weil es au tung einer Linie ankommt, ob sie bejaht oder verneint ist, so thut diese Richtung durch die Ordnung ihrer Grenzbuchstaben anzuge Weg vom westlichen Ende nach dem östlichen würde ich AB ne BA den vom östlichen nach dem westlichen.“ Aber obgleich e Gleichung $AB + BA = 0$ angibt, so darf man doch keineswegs m er die Bedeutung dieses Principes nur einigermassen gewürdigt h Verdienst, den Begriff der Richtung mit Bewusstsein in die Geom zwar in der heute üblichen Weise eingeführt zu haben, gebührt e wenig bekannten Manne FR. G. BUSSE (Neue Erörterungen über und Minus, Tadel einiges bisherigen und Darstellung eines Gebrauches desselben für die Trigonometrie .... I. Abth. Kötl Wenn auch nicht alle seine Bemerkungen ganz correct sind, un Grundsätze nur auf einige wenige Aufgaben der Trigonometrie und a Geometrie angewandt zu haben scheint, so verdient er doch einen el ihm noch nicht zu Theil gewordenen Platz in der Geschichte des Welcher Fortschritt aber von der verworrenen Darstellung und der nigfach beschränkten Auffassung BUSSE's zu den lichtvollen und Grundsätzen ist, wie sie MÖBIUS für alle Zukunft festgestellt hat, Vergleichung von BUSSE's Schrift mit dem „barycentrischen Calcul.“

einen Formeln auf einen besonderen Fall anwenden, so hat
unächst eine positive Richtung der Geraden festzusetzen, d. h.
trecken, welche in dieser Richtung zu nehmen sind, als posi-
ı betrachten, alle entgegengesetzt gerichteten aber durch ihre,
nem negativen Vorzeichen versehenen Längenzahlen in den
eln zu ersetzen, und erhält dadurch letztere nach der Weise
ten Geometer geschrieben. Damit verband Möbius die Auf-
g der Winkel als durch Drehung entstandener Grössen, welche
lls eines Gegensatzes fähig sind, gab ihnen eine dem ent-
ende Bezeichnung, und war so im Stande, zuerst eine ganz
eine und vollkommen genaue Darstellung der Trigono-
zu geben*, und damit den Nachweis zu führen, dass alle
der Geometrie, welche sich auf metrische Relationen beziehen,
ein für jede correlate Gestalt der Figur ihre Gültigkeit be-
ı müssen.

Von welchem Einfluss diese schönen und einfachen Grundsätze
e Strenge der Beweisführung, auf die Allgemeinheit des Raison-
its, auf die Sauberkeit und Eleganz der Darstellung sind, dafür
ı sowohl des Verfassers eigene zahlreiche Arbeiten, welche
Eigenschaften im eminentesten Grade aufweisen, als auch die
ten Anderer, welche in demselben Sinne das Princip der
en angewandt haben und unter denen die erste Stelle der
é de géométrie supérieure" einnimmt, dessen berühmter und
undiger Verfasser durch die Eile, mit welcher er jene Principien,
m weitesten Sinne des Wortes, zu eigen zu machen suchte,
este Zeugniss für die Bedeutung derselben abgelegt hat.

Durch die so gewonnenen klaren Vorstellungen über die Be-
ıg des Negativen ist es nun auch erst möglich, Untersuchungen,
e oben erwähnt wurden, in aller Strenge anzustellen und aus
nbestimmtheit oder Vieldeutigkeit einer Aufgabe die Art ihrer
g zu erkennen. Beispiele in dieser Beziehung bietet selbst
ementargeometrie in der grössten Mannigfaltigkeit dar.
Stellt man sich z. B. die Aufgabe, die Seite a eines Dreieckes

---

* In dem inhaltsreichen und eleganten Aufsatz: „Entwickelung der Formeln der sphärischen Trigonometrie in grösstmöglicher Allgemeinheit." te der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. Leipzig 1860.

aus dem gegenüberliegenden Winkel α und den beiden a
Seiten b und c zu berechnen, so ist zunächst klar, dass du
Data nur der absolute Werth, durchaus aber nicht die Ri
von a bestimmt ist, also nur a^2 durch b, c, α eindeutig ausge
werden kann. Da ferner die Richtung, welche man b und c
auf den Werth von a keinen Einfluss haben kann, also die V
delung von b in $-b$ oder c in $-c$ nichts an der Formel,
deren a^2 von b, c, α abhängt, ändert, so kann dieselbe nur b^2
enthalten, soweit diese Grössen nicht mit einer trigonomet
Function von α multiplicirt sind. Was nun die Abhängigkeit
von α betrifft, so hat die Festsetzung der Drehungsrichtu
welcher die Winkel zu beschreiben sind, auf a keinen Einfl
kann also nicht $\sin \alpha$, welches mit Veränderung der Dre
richtung den entgegengesetzten Werth annimmt, in der
erscheinen, sondern nur $\cos \alpha$. Nun aber hat der Winkel α zv
zwei Geraden, wenn der positive Sinn der Drehung festgest
seiner Natur nach zwei verschiedene Werthe α und $(\pi + \alpha$
zwar nimmt α um $\pm\pi$ zu, wenn die positive Richtung eines
kels desselben geändert wird. Weil nun $-\cos \alpha = \cos(\pm \pi$
so kann in der zu construirenden Formel $\cos \alpha$ nur mit b und c
plicirt vorkommen, da in $bc\cos \alpha$ die Veränderung des Zeich
einen Seite mit der des $\cos \alpha$ gleichzeitig vor sich geht, das
also ungeändert seinen Werth behält. Es muss also a^2 aus
$b\,c\cos \alpha$ eindeutig bestimmt werden können, wenn es nicht
welche imaginären Werthe von a gibt, welche die Formel
zeitig mit $+a$ und $-a$ liefert. Dass es solche nicht gibt
die wirkliche Darstellung der Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\,c\cos\alpha$$

welche mit den vorhergehenden Betrachtungen durchgehend
einstimmt; es leuchtet aber ein, dass das Unvollständige
Untersuchung eben aus dem Umstande entspringt, dass da
ginäre sich der geometrischen Betrachtung entzieht. Vielleicht
die abstracte Form, welche die Geometrie durch GRASSMANN's
volle Principien erhält, diese Lücke auszufüllen im Stan
Von welchem Werthe aber Bemerkungen in der eben ausgef
Weise sind, und welchen Einblick in den Organismus der F
sie gewähren, bedarf für diejenigen, denen die Mathematik

Mechanismus des Calculs ist, keiner Erörterung; denn wie
. Bernoulli treffend sagt: „Une analyse abstraite qu'on
sans aucun examen synthétique de la question proposée, est
à nous surprendre plutôt qu'à nous éclairer."
le Formel der ebenen und sphärischen Trigonometrie kann
se Weise beleuchtet, und ihre Form von vornherein theil-
estgestellt werden. Um nicht allzu weitläufig zu werden,
nke ich mich auf das eine vorstehende Beispiel, kann aber
mhin, hier einem Gedanken Platz zu geben, den ich einer
chen Mittheilung des Herrn Jubilars verdanke. Er hat be-
ch zuerst bemerkt, dass die Zweideutigkeit der Fläche F
ines ebenen Polygons eine ebenso nothwendige und funda-
ist, als die einer Strecke, und dass sie unabhängig ist von
htung oder dem Sinn, den man sich den einzelnen Seiten
lecks $a, b, c \ldots$ beigelegt denkt. Daraus zieht nun Möbius
gerung, dass F^2 durch die Quadrate der Seiten $a^2, b^2, c^2 \ldots$
ig darstellbar sein müsse, und in der That hat v. Staudt
Rechnung gezeigt*, dass F^2 eine ganze rationale Function
$b^2, c^2 \ldots$ ist.
ı zweifle nicht, dass dieser Gedanke bei weiterer Verfolgung
interessantesten Folgerungen führen kann. In dem einfach-
lle, dem des Dreiecks a, b, c, gelange ich durch folgendes
ement zur wirklichen Construction der betreffenden Formel:
erschwindet, wenn das Dreieck in eine Gerade zusammen-
d. h. wenn, mit Rücksicht auf den positiven und negativen
r Seiten, eine der Grössen $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$,
$b+c$ verschwindet, so darf man

$$^2 = D\,(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(b+c-a)$$

wo D den Quotienten zweier homogenen Functionen von
c^2 bezeichnet, welche beide von demselben Grade sind, da-
von der vierten Dimension in Bezug auf a, b, c sei, welche,
ı dies von selbst versteht, nach a^2, b^2, c^2 symmetrisch sein
und für kein reelles System von Werthen der a, b, c ver-
len oder unendlich werden können. Setzt man die Fläche
chschenkligen Dreiecks, in dem $b = c$

RELLE's Journal Bd. 24. S. 254.

$$F'^2 = \frac{1}{4} a^2 (b^2 - \frac{1}{4} a^2)$$

als bekannt voraus, so wird für diesen Fall $D = \frac{1}{16}$, al

hängig von den beiden ganz willkührlich gebliebenen G
und b. Da nun a, b, c in D in symmetrischen Verbindun
kommen, so wird man hieraus schliessen müssen, dass D üb
eine Constante ist und die bekannte Formel

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b}$$

ist somit ohne alle Rechnung aus den fundamentalste
schaften, die in dem allgemeinen Begriffe der Fläche eines
liegen, abgeleitet.

Ueber die Quadratur algebraischer Cur

Eine der kühnsten Anwendungen jenes Principes, aus
gemeinsten Auffassung eines Problems und der darin liege
bestimmtheit oder Vieldeutigkeit auf die Art und Weis
Lösung gleichsam a priori zu schliessen, hat Newton in fo
merkwürdigen, heute ganz vergessenen und, wie es scheint,
besonders beachteten*, 28. Lemma des 1. Buchs seiner „
phiae naturalis principia mathematica“ gemacht:

„Nulla exstat Figura Ovalis cujus area, rec
lubito abscissa, possit per aequationes nume
minorum ac dimensionum finitas generaliter in

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ce
revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, et i
recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper

* In der Ausgabe „Phil. nat. princ. math. perpetuis comm. illustr.
stud. PP. Thomae le Seur et Fr. Jacquier. Genf 1760“ findet sich
Text in der Anwendung auf eine Figur fast unverändert in den Anm
wieder.

te, quae sit ut rectae illius intra Ovalem quadratum. Hoc unctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si areae a recta illa abcsissae incrementum per finitam aequationem potest, invenietur etiam per eandem aequationem dipuncti a polo, quae huic areae proportionalis est, adeoque Spiralis puncta per aequationem finitam inveniri possunt et ea rectae cujusvis positione datae intersectio cum Spirali etiam potest per aequationem finitam. Atqui recta omnis producta Spiralem secat in punctis numero infinitis et aequa intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet intersectiones omnes radicibus totidem, adeoque ascendit ad ensiones quot sunt intersectiones."

ıch einigen Bemerkungen über die Anzahl der Durchschnittsalgebraischer Curven und deren Uebereinstimmung mit dem der Gleichung, welche man durch Elimination aus den gei Gleichungen der Curven erhält „est enim eadem omnium idem calculus" folgt der Schluss des Beweises mit den :

Sequit ergo intersectio rectae et Spiralis per aequationem finineraliter inveniri et idcirco nulla extat Ovalis cujus area, nperatis abscissa, possit per talem aequationem generaliter i."

esen schönen Satz benutzt Newton, um seine in dem ze zu gebende Auflösung des Keppler'schen Problems zu :tigen, in der er sich keiner geometrischen Curve, sondern eschweiften Cykloide bedient, er schreibt:

Corollarium. Hinc area Ellipseos, quae radio ab umbilico ous mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, uationem finitam et propterea per descriptionem Curvarum rice rationalium determinari nequit."

moderner Fassung wird Newton's Satz etwa folgenderlauten:

sei innerhalb eines Ovales der Anfangspunkt O eines Polinatensystems r, φ gegeben, dessen Axe auf irgend eine estgelegt wird; dann ist der zwischen dieser Axe, einem der ıch gegebenen Radius vector und dem Ovale liegende Sector ganze, von dem Ovale eingeschlossene Fläche K vieldeutig.

Den Beweis hiervon möchte ich auf folgende Weise
Bei einem Ovale, in welchem nach einer Drehung des Radius
um 2π immer derselbe Werth wieder erzeugt wird, dess
lytische Gleichung daher auch nur um 2π periodische,
metrische Functionen von φ enthält, sind die Winkel $\varphi =$
$\varphi = \varphi_1 + 2m\pi$, die sich um irgend welche Multipla von 2π
scheiden, nicht wesentlich different und die Aufgabe, ein
Axe des Systems und einem der Lage nach gegebenen
vector $r = r_1$ eingeschlossenen Sector u_1 zu bestimmen,
vieldeutig, als man sich diesen Sector sowohl erzeugt denk
durch eine directe Bewegung von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$, wenn
kleinste Anomalie von $r = r_1$ ist, als auch durch die um 2π
bis wieder zu derselben Lage fortgesetzte Drehung, wob
dem die ganze Fläche K des Ovales überstrichen wird. H
u_1' jenen ersten kleinsten Sector, so ist $u_1' + K$ der jetzt er
und man sieht, dass wenn $u_1 = u_1'$ eine Lösung ist, $u_1 = u_1$
nicht aufhört, den Bedingungen der Aufgabe in ihrer Allge
zu genügen.

Gehen wir von der Definition des Sectors

$$u_1 = \frac{1}{2}\int r^2 \, d\varphi$$

aus, so tritt dieselbe Unbestimmtheit ein, denn in dem I
ist im Allgemeinen der Weg, auf dem φ von $\varphi = 0$ bis in d
$\varphi = \varphi_1$ gelangen soll, nicht gegeben. Wir können entwed
rect auf dem kürzesten Wege seine Bahn durchlaufen lasse
dasselbe vorher beliebig oft im Kreise herumdrehen, wodurch
Werth um $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi = K$ und um dessen Multipla verm

Es ist diese Darstellung vielleicht der Newton'schen
ziehen, weil man nach letzterer die Quadratur der Spirale
der des Archimedes $r = a\varphi$ ebenfalls für unendlich vi
halten könnte. Denn auch hier entsteht durch Newton's C
tion eine Spirale, welche von jeder durch den Pol O g
Geraden in unendlich vielen Punkten geschnitten wird.
Schwierigkeit kann bei meiner Darstellung deshalb nicht a
weil bei den Spiralen r eben keine mit dem Modul 2π per

on ist, die beiden Winkel φ_1 und $\varphi_1 + 2m\pi$ daher wesentlich verschieden sind und verschiedenen Radien entsprechen.

Wenn nun u_1 eine in der angegebenen Weise unendlich vieldeutige Function von φ_1 ist, so kann u_1 mit den trigonometrischen Functionen von φ_1 nicht durch eine algebraische Gleichung verbunden sein, da einer solchen stets nur eine begrenzte Anzahl von Werthen zukommen. Stellt man umgekehrt $\frac{\cos}{\sin}\varphi_1$ als Function von u_1 dar, so ist dieselbe periodisch mit dem Modul K, also ebenfalls nicht algebraisch. Diesen Schluss muss Newton gemacht haben, als er das obige Corollarium schrieb, und es ist interessant, dass es auf diese Weise gelingt, die nothwendige, unendliche Vieldeutigkeit des geometrisch eindeutig scheinenden Keppler'schen Problemes zu erkennen.

Es ist mit diesen Bemerkungen die Formel für einen vom Brennpunkte aus genommenen Sector:

$$\frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\ arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,tan\frac{1}{2}\varphi_1\right) - \frac{p^2}{2(1-e^2)}\frac{e\ sin\varphi_1}{1+e\cos\varphi_1}$$

der Ellipse $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$ in Uebereinstimmung, denn dieser Sector ist vermöge der Vieldeutigkeit von *arctan*, vieldeutig nach dem Modul $\frac{p^2\pi}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$ d. h. der Fläche der ganzen Ellipse.

Bei einer Hyperbel würde ein sich um den einen Brennpunkt drehender Radius vector einen unendlichen Flächenraum beschreiben; es gibt daher nur einen endlichen Werth des Sectors, welchen die Formel darstellen muss. Man darf aber daraus nicht schliessen, dass die Quadratur eines solchen Sectors absolute eindeutig als Function von $\frac{\cos}{\sin}\varphi$ sein müsse; denn wie viele imaginäre Werthe einem solchen Sector zukommen, darüber gibt die geometrische Betrachtung keinen Aufschluss. Man weiss, dass die betreffende Quadratur durch Logarithmen ausführbar ist, deren Vieldeutigkeit auf imaginärem Gebiete liegt.

Für die Parabel ist der Sector vom Brennpunkte aus ebenfalls eindeutig. Eine Weise reell zu bestimmen, wie dasselbe Raisonnement zeigt, und in der That ist er eine eindeutige Function.

Die Betrachtung der Quadratur von Sectoren bietet eine
Umstandes wegen, dass algebraische Curven in Gleichungen zw
r und den trigonometrischen Functionen von φ dargestellt w
andererseits aus dem Grunde eigenthümliche Schwierigkeit
die geometrische Betrachtung, weil imaginäre Radien reelle n
Flächenräume beschreiben, die sich mit den bei derselben Dre
richtung von einem reellen Radius überstrichenen positiven F
räumen annulliren können, wie z. B. die Quadratur der Lem
diesen Umstand zeigt. Bedeutend einfacher ist die Untersu
von Flächenstreifen algebraischer Curven, die auf ein rechtwi
Parallelcoordinatensystem bezogen sind.

Nehmen wir als Anfangswerth überall die Abscisse $x =$
und setzen den Durchschnittspunkt P_0 der positiven Ordina
fest, von dem wir ausgehen wollen, so verstehen wir unt
von der Ordinatenaxe OP_0, der Abscisse $x_1 = OQ_1$, der zu
gehörigen Ordinate $Q_1P_1 = y_1$ und der Curve eingeschl
Flächenraum denjenigen, welchen die Ordinate y überstrich
wenn sie von OP_0 aus sich immer parallel der Ordinatena
wegend, während ihr Endpunkt auf der Curve hingleitet, schl
eine Lage erreicht, in welcher ihr Fusspunkt mit Q_1 zusamm
Dieser Flächenraum ist positiv, wenn die Bewegungsrichtu
selbe Vorzeichen als die Ordinate hat, negativ, wenn dies ni
Fall ist. Dass diese Fläche, welche ich auch kurz die über
scisse $x = x_1$ stehende von OP_0 aus gerechnete bezeichnen
durch

$$u_1 = \int_0^{x_1} y\, dx$$

dargestellt wird, wo für $x = 0$, y den Anfangswerth $y =$
erhalten hat, von dem aus y sich stetig mit x ändert, folgt
Definition des Integrales von selbst.

Die Aufgabe nun, eine solche Fläche u_1 als Function vo
bestimmen, ist im Allgemeinen insofern mehrerer Lösunge
als die Art und Weise, wie x von $x = 0$ zu $x = x_1$ gelang
dabei gänzlich willkührlich ist. So viele verschiedene Wege
gibt, so verschieden kann auch der Werth jener Fläche ausf

Es verlieren diese Bemerkungen auch dann nicht ihre

nn die Ordinate bei ihrer continuirlichen Verschiebung ent- Abscissenaxe sich auf der einen Seite von der Ordinaten- ndlich entfernt und auf der anderen Seite wieder in das e tritt, ebensowenig, wie in dem Falle, dass die Ordinate nendlich gross wird, wenn nur dabei überall die Stetigkeit und die überstrichene Fläche endlich geblieben ist.

tels dieser Principien ist es nun in vielen Fällen möglich, vor der wirklichen Ausführung der Quadratur deren Form lassen zu beurtheilen, als auch eine Erläuterung des durch hnung gewonnenen Resultates der Integration zu geben, s nicht selten bedarf.

rachten wir eine einfache geschlossene Curve, wie Fig. 1, ebig abwechselnder concaver und convexer Krümmung, ohne leifen oder unendliche nde Zweige und lassen Ordinate von OP_0 aus gen, dass O in den Punkt ngt. Dann wird P_0 zu- nach P_1' gelangen und $_1'$ ist eine die Aufgabe Fläche u_1. Lässt man e Ordinate weiter fort-

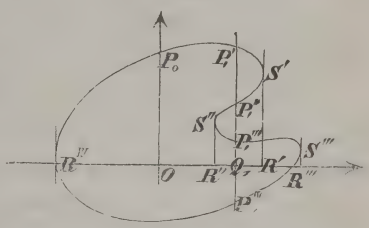


Fig. 1.

, bis sie zu S' gelangt, also $P_0OR'S'$ die dabei über- positive Fläche ist, so muss sich R' wieder nach der gesetzten Seite bewegen, damit der Endpunkt der auf der reellen Curve hinzugleiten im Stande ist, und es Ordinate, wenn sie in der Lage Q_1P_1'' anlangt, den Raum S' negativ durchlaufen haben, so dass die durch die ganze g erzeugte Fläche $P_0OQ_1P_1''S'P_1'P_0$ ist, welche ebenfalls über der Abscisse $x = x_1$ stehende Fläche u_1 angesehen muss, die den Bedingungen der Aufgabe ebenso voll- vie die erste angegebene Fläche genügt. Lassen wir jetzt nate immer weiter nach links rücken, bis $S''R''$, und von ssersten Lage wiederum nach rechts bis Q_1P_1''', so ist von der läche der Halbmond $P_1''S''P_1'''$ abzuziehen und wir haben e neue Fläche u_1, welche durch $P_0OQP_1'''S''P_1''S'P_1'P_0$, ch OP_0,OQ_1,Q_1P_1''' und die innere Seite des Bogens P_0P_1'''

begrenzt wird. Indem man diese Bewegung weiter fortsetzt, man zu einem vierten Werthe von u_1, der durch P_0OQ_1 den P_0 mit P_1^{IV} verbindenden Curvenbogen begrenzt ist unnöthig die Betrachtung weiter fortzusetzen; denn man si wenn schliesslich die Ordinate wieder die Lage Q_1P_1' anni zuerst betrachtete kleinste Flächenraum um den ganzen der Curve vermehrt worden ist.

Das Resultat dieser Betrachtung kann man nun dah menfassen: die Flächenräume u_1, welche in einer gesch sich nicht schneidenden, einfachen Curve über einer und Abscisse $x = x_1$ stehen und alle von derselben Anfangsord gerechnet werden, zerfallen in so viel Klassen, als Durchsch zu $x = x_1$ gehörigen Ordinate mit der Curve vorhanden s dieser Klassen enthält unendlich viele Werthe von u_1, die a einander nur um Multipla der ganzen von der Curve eing nen Fläche K verschieden sind.

Es geht daraus hervor, dass eine algebraische Cur Form nicht durch algebraische oder logarithmische A allein quadrirt werden kann; denn erstere nehmen nur eine Anzahl von Werthen, letztere ebenfalls nur eine begrenz reeller Werthe an. Vielmehr muss die Quadratur cyklo Functionen, oder höhere Transscendenten, z. B. elliptis grale, denen eine reelle Vieldeutigkeit zukommt, enthalten

Nehmen wir die zu quadrirende Curve symmetris beide Axen mit überall concaver Krümmung gegen O, so en jedem x_1 nur zwei reelle Ordinaten Q_1P_1' und Q_1P_1''; d die über der Abscisse x_1 stehende Fläche zwei verschieden u_1' und u_1'', wo $u_1'' = \frac{1}{2}K - u_1'$, welche um positive oder Multipla von K beliebig vermehrt werden können. Es bekannten Eigenschaften des *arcsin*, durch den also eine gegebenen Weise symmetrische Curve möglicher Weise werden kann.

So ist z. B. bei dem Kreise $x^2 + y^2 = a^2$ die Fläche

$$u_1 = \frac{1}{2} x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} + \frac{1}{2} a^2 \, arcsin \frac{x_1}{a}$$

u_1' zu erhalten, nehme man $\sqrt{a^2 - x_1^2}$ positiv und für den spitzen Winkel. Lässt man jetzt x von $x = x_1$ wachsen a und es von dort wieder nach $x = x_1$ zurückgehen, so an entweder auch bei dem Rückgange der $\sqrt{a^2 - x^2}$ in $\frac{x}{a}$ dieselben Werthe als vorhin beilegen, wodurch man ch wieder zu u_1' gelangen würde, oder man lässt an dieser $= a$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen $arcsin \frac{x}{a}$ von dem spitzen Winkel in den stumpfen über- Dabei wird, wenn man wieder zu $x = x_1$ gelangt ist, $\sqrt{a^2 - x_1^2}$ in $-\sqrt{a^2 - x_1^2}$ und $\arcsin \frac{x_1}{a}$ in $\pi - arcsin \frac{x_1}{a}$, also u_1' $\frac{1}{2}a^2\pi - u_1'$ übergegangen sein. Geht jetzt $x = x_1$ zurück $= 0$ und darüber hinaus nach $x = -a$, so wird, wenn dieser st erreicht ist, $\sqrt{a^2 - x^2}$ sehr klein negativ und $arcsin \frac{x}{a}$ r sehr nahe kommen; wird dieser Punkt $x = a$ überschritten, $\sqrt{a^2 - x^2}$ in den positiven Werth über, $arcsin \frac{x}{a}$ tritt in en Quadranten und wenn x jetzt wieder nach $x = 0$ und esen Punkt hindurchgeht, so tritt $arcsin \frac{x}{a}$ in den fünften ten oder nimmt den Werth $2\pi + arcsin \frac{x}{a}$ an, wenn unter iederum der spitze Winkel verstanden wird. In $x = x_1$ ist tzt der Werth $u_1 = u_1' + 2a^2\pi$ erreicht u. s. w.

ız ähnliche Betrachtungen sind auf die Quadratur der ıigen Curve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ar, welche die beiden Coordinatenaxen in Spitzen nach Art cubischen Parabeln berührt; denn man hat:

$$\frac{1}{3}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x_1^{\frac{2}{3}}}\left\{\frac{7}{4}a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}} - x_1^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{8}a^{\frac{4}{3}}\right\} +$$

$$+ \frac{3}{16}a^2 \arcsin\left(\frac{x_1}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und eine ähnliche Formel für die Quadratur der Ev
Ellipse

$$(m\,x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Die Vieldeutigkeit der Cubikwurzeln kann, weil sie in
des Imaginären liegt, geometrisch nicht zum Ausdruck g

Dieselben Bemerkungen werden in gleicher Weise w
werden können, wenn die zu quadrirende Curve für e
lichen Werth der Abscisse in's Unendliche aufsteigt, wenn
der von der Ordinate beschriebene Flächenraum einen vo
wegungsweise der Ordinate unabhängigen, bestimmten
Flächenraum überstreicht.

So wird z. B. die aus zwei gegen die Axen symm
Zweigen bestehende Curve

$$y^2\,(a^2 - x^2) = b^4$$

welche die beiden Geraden $x = \pm a$ zu Asymptoten hat,

$$y = b^2 \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = b^2\ arcsin\ \frac{x_1}{a}$$

quadrirt.

Die Quadratur von, allein gegen die x Axe symm
Curven, in denen jeder Abscisse x_1 zwei gleiche und er
setzte aber nur zu Einer Seite der Ordinatenaxe reelle
entsprechen, und welche durch den Anfangspunkt der Co
gehen, wird durch eine Function ausgeführt werden müss
verschiedene Werthe u'_1, $K - u'_1$, $K + u'_1$, und überhaupt
sind, wenn u'_1 einen der Flächenräume bezeichnet. Eine
dieser Eigenschaft ist

$$u = arccos\ \frac{a - 2x}{a}$$

denn geht x von $x = 0$ an, so beginnt $arccos\ 1 = 0$; für
$arccos\ 0 = \frac{\pi}{2}$; für den äussersten Punkt $x = a$, dem n
Werthe entsprechen, ist $arccos\ (-1) = \pi$; geht jetzt x
zurück, so tritt $arccos\ \frac{a - 2x}{a}$ in den dritten und darauf
ten Quadranten, so dass für $x = x_1$ jetzt $u_1 = 2\pi - arccos$

wird, wenn der letztere *arccos* einen Bogen in dem ler zweiten Quadranten bezeichnet. Geht x durch $x = a$ und gelangt dann wieder zu $x = x_1$, so haben wir

$$+ arccos \frac{a - 2x_1}{a}$$

er That wird die Quadratur des Kreises

$$x^2 + y^2 = ax$$

ese Function ausgeführt, ebenso wie die der Cissoide des deren Gleichung

$$y^2 (a - x) = x^3$$

m Anfangspunkte eine Spitze und die Gerade $x = a$ zur e hat; denn ihre Quadratur ist:

$$= -\frac{1}{4}(2x_1 + 3a)\sqrt{ax_1 - x_1^2} + \frac{3}{8}a^2 arccos\frac{a - 2x_1}{a}.$$

entlich andere Verhältnisse als in den bisher betrachteten eten ein, wenn es sich um die Quadratur sich selbst der Curven handelt. In einer e Axen symmetrischen Schleife ie die Lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

Fig. 2.

sse Axe $2a$ in der Abscissenaxe, und deren Knotenpunkt ge O der Coordinaten liegt, wird, wenn die Fläche von gerechnet wird, dieselbe positiv von $x = 0$ bis $x = a$, in Punkte die Ordinate ihr Zeichen wechselt, und beim ge bis zu $x = 0$ wird daher eine positive Fläche be-. Indem man in diesem Knotenpunkte, dem Verlauf der gend, mit negativen Abscissen wieder zu positiven Ordi-steigt, wird jetzt eine negative Fläche beschrieben, und da $= -a$ sowohl das Zeichen der Ordinate als auch die srichtung beim Rückgange zu $x = 0$ ändert, so wird bei wegung ebenfalls eine negative Fläche beschrieben werden hat bei der Rückkunft zu $x = 0$ einen ebenso grossen Flächenraum als vorher einen positiven überstrichen. nenraum, den die Ordinate bei dem vollständigen Durch-ier solchen Curve erzeugt hat, ist daher gleich Null.

In einer solchen symmetrischen Curve scheint daher d
ratur eines von dem Knotenpunkte gerechneten Flächer
nicht um beliebige Vielfache einer reellen Constanten unl
zu sein, sondern ihr nur zwei reelle Werthe zuzukomm
sprechend den beiden reellen Ordinaten für $x = x_1$.
wäre die Quadratur nicht durch cyklometrische Functionen
bar, sondern sie wäre entweder algebraisch, oder logar
oder führte auf höhere Transscendenten, wie dies auch
bekannten Beispiele sämmtlich zeigen.

Es kann aber im Allgemeinen hieraus nicht mit alle
gefolgert werden, dass die Quadratur solcher Curven n
reelle Vieldeutigkeit aufweisen und daher z. B. nicht auf
trische Functionen führen könne.

Die Discussion der algebraischen Quadratur ist bei d
scate einigermassen complicirt, so dass ich vorziehe, di
einer Curve von ganz ähnlicher Form:

$$a^2y^2 - a^2x^2 + x^4 = 0$$

und deren Quadratur

$$u_1' = \frac{1}{3a}\left\{a^3 - (a^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

durchzuführen. Es stellt u_1' eine Fläche für ein positives
vor, und zwar die erste durch die obige Bewegung entstel
sitive Fläche, wenn $(a^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}$ positiv genommen wir
man in $x = a$ auf den unteren Zweig der Curve über, so

$$u_1'' = \frac{1}{3a}\left\{a^3 + (a^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

die andere $x = x_1$ entsprechende Fläche dar. Lässt ma
durch $x = 0$ hindurch negativ werden, so bleibt die Fläc
und für $x = -x_1$ wird sie den Werth u_1'' besitzen. In der
die zuletzt vorgenommene Bewegung von $x = +x_1$ bis x
einen Flächenraum gleich Null producirt. Der Flächenrau
immer ab bis $x = -a$; dort wechselt $(a^2 - x_1^2)^{\frac{3}{2}}$ sein
während des Rückganges zu $x = 0$ nimmt die Fläche for
ab, bis sie in $x = 0$ verschwindet, und also, wenn man zu
fortschreitet, durch diese ganze Bewegung wieder derselbe
raum u_1', von dem wir ausgegangen sind, erzeugt worden

dieser Curve führt die Betrachtung der Gleichung

$$y = \frac{1}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

Verfolgung des y bei stetigen Aenderungen von x zu dem-
etigen Zug, den wir den Endpunkt der Ordinate haben
fen lassen. Es gibt aber Curven, bei denen die Stetigkeit
gung in dem Knotenpunkte nicht ohne, für die reelle Va-
willkührlich scheinende Annahmen erhalten werden kann.
en Fällen wird man die Untersuchung nicht wohl ohne
it auf complexe Variabelen durchführen können. Aber in
n, selbst bedeutend complicirteren Fällen, als einer Schleife,
n mit der Betrachtung reeller Variabelen vollständig aus-
Ich halte es jedoch für unnöthig, auf zusammengesetztere
einzugehen, da aus dem Vorstehenden das Princip und die
eit solcher Untersuchungen genügend erhellt.
er die Curven, welche ins Unendliche verlaufen, d. h.
dinaten für unendliche Abscissen reell bleiben, lassen sich
lben Weise einige nicht uninteressante Bemerkungen

e einfache Curve, wie die in Fig. 3 dargestellte, die sich
bcissenaxe entlang so in's Unendliche erstreckt, dass der
und der Abscissenaxe einge-
ie Raum von endlicher Grösse
rd eine um K als reellen Modul

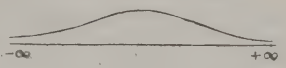


Fig. 3.

ge Quadratur besitzen, die da-
enfalls algebraisch sein kann, sondern entweder *arctan*
ere Transscendenten mit einem reellen Modul der Vieldeu-
thält.

n um von $x = 0$ bis $x = x_1$ zu gelangen, kann man ent-
en directen, kürzesten Weg einschlagen, oder man geht
0 über $x = x_1$ hinaus nach $x = +\infty$, und indem man
genden Falle den Uebergang von $+\infty$ zu $-\infty$ als einen
ansehen kann, von $x = -\infty$ über $x = 0$ nach $x = x_1$,

der erste Werth $u_1' = \int_0^{x_1} y\,dx$ um $\int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx = K$

worden ist.

So ist z. B. in der Curve von der Figur 3.

$$y\,(1+x^2) = 1$$

der Flächenraum um $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ vieldeutig und m

zeugt sich in dieser Weise höchst einfach von der noth
Vieldeutigkeit des Integrales

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{1+x^2} = arctan\, x_1,$$

das gewöhnlich als ein vollkommen eindeutiges behandelt z
pflegt. Es scheint überhaupt nothwendig, Betrachtungen d
in die Elemente der Analysis aufzunehmen, und die Vield
nicht, wie es fast überall in den Lehrbüchern geschieht, als
ges Uebel möglichst schnell bei Seite zu schaffen, oder
ignoriren; denn in ihr liegt der wahre Schlüssel zu der
der Functionen.

Man sieht leicht, dass die Quadratur einer Curve, v
$y = \frac{x}{(1+x^2)^2}$ welche sich an der Abscissenaxe so hinzie
ihre Fläche eine endliche ist und die nach $+\infty$ und $-\infty$ l

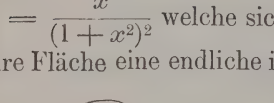


Fig. 4.

Flächen sich gegenseitig au
weil die Ordinaten von negat
scissen denen der positiven gl
entgegengesetzt sind (s. Fig. 4)
geometrisch aufweisbaren reellen Modul der Vieldeutigkeit
Weiteres kann im Allgemeinen zunächst nicht behauptet w

Schliessen endlich Curven, die an der Abscissenaxe en
das Unendliche verlaufen, mit dieser keinen endlichen R
so haben sie ebenfalls keinen geometrisch nachzuweisende
Modul der Vieldeutigkeit. Sie können algebraisch quadri
wie die Apollonische Parabel, oder durch Logarithmen,
Hyperbel. Welche Bedeutung die reelle Zweideutigkeit des
streifens einer Parabel uud Hyperbel hat, ist, da jeder
zwei Ordinaten entsprechen, evident.

Mannigfache Betrachtungen über complicirtere For
sich hier anschliessen lassen, übergehe ich, da ein solcher

)rganismus der Formeln, wie ich ihn hier zu geben beab-
habe, mit der Complication desselben an Interesse verliert.
», die sich aus der Natur der unendlichen Zweige darüber,
Curve logarithmisch quadrirbar sei, ergeben, und weitere
chungen über die Eigenschaften der hier überall nur
en höheren Transscendenten der Integralrechnung, ver-
ich auf eine andere Gelegenheit.

---

er die Rectification algebraischer Curven.

Schlusse des oben erwähnten Newton'schen Satzes über
ratur der Curven findet sich folgende Bemerkung:
)dem argumento, si intervallum poli et puncti, quo Spiralis
tur, capiatur Ovalis perimetro abscissae proportionale, pro-
est, quod longitudo perimetri nequit per finitam aeqa-
generaliter exhiberi. De ovalibus autem hic loquor, quae
guntur a figuris conjugatis, in infinitum pergentibus."*
ist hinzuzufügen, dass derselbe Schluss auf den Bogen einer
deshalb nicht anwendbar ist, weil bei dieser der Radius
eine nach 2π periodische Function von φ ist. Da sich aber
ersuchung von Bögen algebraischer Curven, die in Bezug
Polarcoordinatensystem gegeben sind, ähnliche Schwierig-
ntgegenstellen, als oben der der Quadratur von Sectoren,
chte ich im Weiteren ausschliesslich algebraische Curven
winkligen Coordinatensystem.
einzige Bemerkung über deren Rectification, welche auf
em Newton'schen ähnlichen Gedanken beruht, finde ich
RIN**, der die Unmöglichkeit, allgemein den Bogen eines

---

*se letzte Erläuterung des höchst unbestimmten Ausdruckes „Oval"
in der ersten Ausgabe von Newton's Principien von 1687 nicht.

**monstr. de l'impossib. de la Quadrat. indéfinie du cercle. Histoire de
scienc. Paris, année 1720. S. 55 der Hist. und S. 15 der Mém.

Kreises durch eine algebraische Gleichung mit der Absci
Endpunktes zu verbinden, auf folgende sinnreiche Weise
Nimmt man den Scheitel eines Kreises im Anfangspunkt
Coordinatensystems, seinen Mittelpunkt in der Abscissenax
lässt sich einen Punkt P von O aus auf der Peripherie
trägt in jeder Lage auf der Ordinate PQ desselben von Q
bis dahin durchlaufenen Bogen OP ab, so erhält man auf
Punkt R, der mit P gleichzeitig eine Curve beschreibt.
dieser Curve ist es nun möglich, einen Bogen des Kreis
beliebig viele, n gleiche Theile zu theilen. Denn projicirt
zum Endpunkte dieses Bogens P gehörigen Punkt R auf
natenaxe in S, theilt diese Strecke OS in n gleiche Th
$S'S''$..., zieht durch S',S''... Parallelen mit der Abscissenax
die Curve der R in R', R''... schneiden, und construirt zu
Ordinaten $R'Q'$, $R''Q''$ ... so werden diese den Kreis in
P',P'' .. schneiden, welche die verlangten Theilpunkte de
sind. Man kann also mittels dieser Curve den Bogen in
liebig viele, unendlich viele Theile zerlegen; da nun aber
lung eines Bogens in n Theile die Auflösung einer Gleich
$n$ten Grade erfordert, so kann, folgert Saurin, jene C
R nicht geometrisch (algebraisch), sondern muss mechanis
scendent) sein. Es wird daher die Ordinate QR dersel
transscendente Function der Abscisse OQ sein und a
der Bogen OP eine solche Function der Abscisse sei
punktes, q. e. d.

Diese höchst scharfsinnige Anwendung der Sätze
Theilung von Kreisbögen auf ihre Rectification, kann fü
Curven im Allgemeinen nicht ausgeführt werden, da die
der Theilung schwieriger als die Darstellung der Bögen
Wir werden daher zu anderen Mitteln unsere Zuflucht zu
haben.

Die Unmöglichkeit der algebraischen Rectification v
geschlossener Curven und ihre Vieldeutigkeit um eine
Modul tritt in den einfachsten Fällen leicht zu Tage, wenn
ähnlicher Schlussfolgerungen bedienen, als oben bei der Q
z. B. bei dem Kreise, dessen Rectification auf den *arcsin* f
bei der Ellipse, deren Bogen durch ein elliptisches Integra

dargestellt wird, dem sowohl ein reeller als auch ein
rer Modul der Vieldeutigkeit zukommt. Der Umstand aber,
rnförmige Curven, wie $x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}}$ algebraische Bögen
fordert zu einer genaueren Prüfung der vorliegenden Ver-
auf.

anschaulichste Vorstellung von der Länge eines Bogens
rve bietet uns die Länge eines Fadens dar, der an die
n einem Punkte bis zu dem anderen gelegt und dann zu
raden Strecke ausgedehnt wird. Die Länge des ganzen
rs einer geschlossenen ovalen Curve mit überall stetiger
ng kann durch das Anlegen eines zusammenhängenden
nzweideutig ermittelt werden; sie ist gleich der Länge des
ler Richtung ausgespannten Fadens. Die Länge eines
dessen Endpunkte gegeben sind, kann als um diese Länge
en Perimeters unbestimmt angesehen werden. Anders aber
ich die Sache bei einer sternförmigen Curve $MNM'N'$, wie
ig. 6 dargestellte. Bei dieser muss die Länge jedes Qua-
besonders durch einen Faden gemessen werden; denn
wir den Faden von MN über N nach NM' überführen, so
es in N eine, wenn auch immer sehr grosse, doch endliche
ng voraussetzen; es würde, wenn ein zusammenhängender
twa um einen in N befestigten Stift geschlungen wäre, in N
ine der Ordinatenaxe parallele Tangente existiren. Das
er eine von der Sternform wesentlich abweichende und
lasse der Ovale gehörige Gestalt; denn in jener Spitze ist
nmung unbedingt unendlich und die Tangente nicht parallel
natenaxe, sondern der Abscissenaxe. Wir haben also den
nessung der Bögen angelegten Faden in den vier Spitzen
N' zerschnitten zu denken und erhalten so vier einzelne
ie zusammengesetzt, die Länge des Perimeters geben. Es
er hierbei gänzlich unentschieden, in welcher Weise diese
ke zusammenzufügen sind.

nun darüber eine Entscheidung geben zu können und an
er vorstehenden erläuternden Bemerkungen eine strenge
n zu setzen, verstehe ich unter dem Bogenelemente ds einer
cht nur einen absoluten Werth, sondern:

$$ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$$

wo α den Winkel zwischen der positiven Richtung der Absc
und der Tangente in dem betreffenden Bogenelemente be
Es ist dabei nothwendig, die positive Richtung der Drehung
Winkel, sowie die positive Richtung der Tangente in ihrer A
lage festzusetzen.

Betrachten wir von dieser genauen, die absolute Gr
das Zeichen von *ds* bestimmenden Definition ausgehend ei
von überall stetiger Krümmung, etwa wie Fig. 5, so sehen v
das Bogenelement *ds* überall positiv ist, wie aus folgender
menstellung hervorgeht:

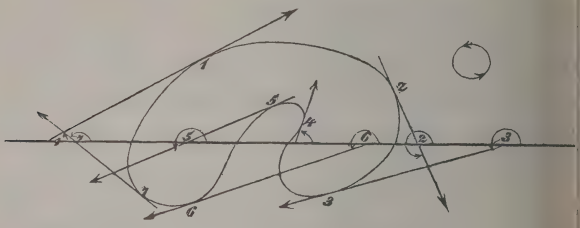


Fig. 5.

In der 1. Lage ist $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ also $\cos \alpha > 0$, ferner dx positiv, als

„ „ 2. „ „ $2\pi > \alpha > 3\frac{\pi}{2}$ „ „ „ > 0, „ „ positiv, „

„ „ 3. „ „ $3\frac{\pi}{2} > \alpha > \pi$ „ „ „ < 0, „ „ negativ, „

„ „ 4. „ „ $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ „ „ „ > 0, „ „ positiv, „

„ „ 5. „ „ $3\frac{\pi}{2} > \alpha > \pi$ „ „ „ < 0, „ „ negativ, „

„ „ 6. „ „ $3\frac{\pi}{2} > \alpha > \pi$ „ „ „ < 0, „ „ negativ, „

„ „ 7. „ „ $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$ „ „ „ < 0, „ „ negativ, „

Ganz anders gestaltet sich die Sache bei einer sternf
Gestalt, wie in Fig. 6, in der überall eine nach innen convex
mung stattfindet, und die Curve von den Coordinatenaxen in

wird. Wählt man etwa die Richtung der Tangente in der nach oben hin positiv, so ist der Bogen in diesem Quadran-

$\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ und $\cos\alpha > 0$ ferner dx positiv ist, auch positiv.

zt der Punkt, welcher die Curve beschreibt, auf den nächsten ntenüber,so geht gente durch die r Abscissenaxe hte Lage in M h in die 2. Lage der $\cos\alpha$ negativ ırend dx positiv so dass das Bo- ıent ds, wie es ıem die Curve ufenden, von der ausgegangenen in 2. beschrieben gativ ist. Schrei- der Tangential-

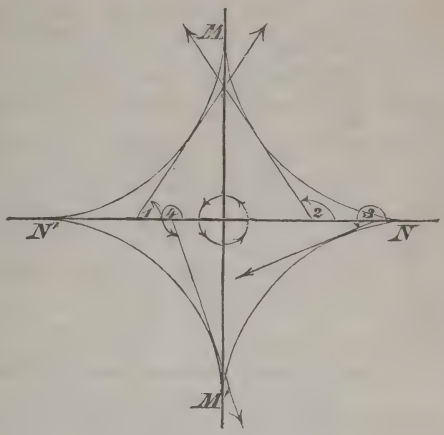


Fig 6.

ıach N fort, so wird endlich in dieser Lage die positive g der Tangente nach links hin gerichtet sein und es , wenn man in die 3. Lage gelangt, in welcher $\cos\alpha$ ne- dx negativ, also das Bogenelement ds positiv ist. In M' positive Richtung der Tangente nach unten gekehrt und s in der 4. Lage, in der ds wieder negativ ist. Es zeigt sich s Bogenelement abwechselnd in den Quadranten positiv und

n diesen Unterschied der hier betrachteten Fälle noch auf niger anschauliche aber analytisch abstractere Weise zu er- betrachte ich direct:

$$s = \int_0^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ɔt man der an und für sich zweideutigen Quadratwurzel ɛtwa den positiven Anfangswerth, und lässt x stetig fort-

schreiten, so variirt auch $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ stetig und kann

y, also auch $\frac{dy}{dx}$ reell bleibt, sein Vorzeichen nur in den ä

Punkten der Curve wechseln, in denen die Tangente senk

der Ordinatenaxe steht, also $\frac{dy}{dx}$ unendlich wächst. In die

ten geht $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ durch Unendlich hindurch, und w

man jetzt x wieder abnehmen lässt, das entgegengese

zeichen annehmen dürfen; da aber gleichzeitig auch dx

Punkte sein Zeichen wechselt, so wird das Bogenelem

$dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ auch bei dem weiteren Rückschreit

bleiben.

Wenn aber in dem äussersten Punkte der Curve $\frac{dy}{dx}$ nic

lich wird, wie dies in dem obigen Falle der sternförmigen Cur

so kann in diesem Punkte $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ sein Zeichen a

Fall wechseln und es wird, da beim Rückgange dx nega

Bogenelement nach de

gange durch die Spitze n

dies auch die obige ge

Betrachtung zeigte.

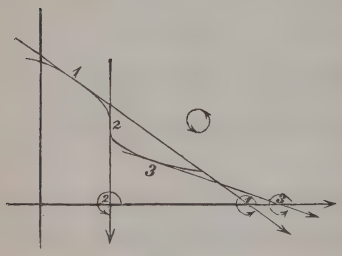


Fig. 7.

Es bleibt nur noch

zu untersuchen, wenn

Punkte, in welchem die

parallel der Ordinatenax

Rückgang des x eintritt

ein Fortgang in derselb

dieser Punkt also ein Wendepunkt ist, wie in Fig. 7; dan

einfachsten die geometrische Betrachtung, dass $\cos\alpha$ in dies

sein Zeichen nicht wechselt, und daher $ds = dx\sqrt{1 +$

ebenfalls von demselben Zeichen bleibt.

ese Bemerkungen werden genügen, um zu zeigen, dass bei
ch nicht schneidenden geschlossenen Curve von überall end-
nd stetiger Krümmung alle Bögen dasselbe Zeichen haben,
ie in einerlei Richtung durchlaufen werden, dass also der
Perimeter eine nicht verschwindende Länge S besitzt.

ist daher der rectificirte Bogen einer solchen Curve, der
ner Abscisse $x = x_1$ steht und von einem festgesetzten Punkte
rve aus gerechnet wird, einerseits in derselben Weise viel-
als die der Abscisse $x = x_1$ entsprechende Ordinate; ande-
kann jeder dieser Bögen, dessen Zeichen übrigens an und
h unbestimmt ist, um beliebige Vielfache der Länge des
ters S vermehrt oder vermindert werden, ohne aufzu-
ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechender Bogen

an kann hieraus schliessen, dass die Rectification einer solchen
nicht rein algebraisch oder logarithmisch, sondern entweder
Kreisfunctionen oder höhere Transscendenten mit einem
Modul der Vieldeutigkeit ausführbar sein wird,

i einer Curve aber, die eine Anzahl Spitzen besitzt, deren
lso bald positiv, bald negativ sind, kann der ganze Perimeter
schwindende Bogenlänge haben;
der That findet dies bei einer
rischen Figur, wie sie oben ver-
t ist, statt. Nach einem voll-
en Umlaufe gelangt man jeder
eder zu demselben Werthe des
Jeder Abscisse $x = x_1$ ent-
n (s. Fig. 8) zwei Ordinaten
nd Q_1P_1''. Werden die Bögen
aus gemessen, so sind MP_1'
$N + NP_1''$ die beiden $x = x_1$
chenden Bögen; da aber $NP_1'' = NM' + M'P_1''$, so ist
ite dieser Bögen $MN + NP_1'' = MN + NM' + M'P_1''$,
$MN = -NM'$, so hat man $M'P_1''$ und MP_1' als die beiden
scisse $x = x_1$ gehörigen Bögen; beide sind aber sowohl der
en Grösse, als auch dem Zeichen nach einander gleich; so
e einzige Vieldeutigkeit, welche an dieser sternförmigen

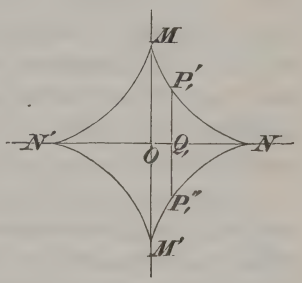


Fig. 8.

Figur geometrisch erkennbar ist, das Vorzeichen des Boger
welches seiner Natur nach im Allgemeinen unbestimmt bl

Von der betrachteten Form ist die bekannte Hypocyl

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

deren Bogen von der Ordinatenaxe aus gerechnet:

$$s = \pm \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$$

wo für die ganze Curve entweder das obere oder unte
chen zu nehmen ist. Setzt man $s = + \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$ so fi

$MN = \frac{3}{2} a$, $MN' = \frac{3}{2} a$, also $N'M = - \frac{3}{2} a$. Da si
der Bogen $MM' = 0$, also $MN + NM' = 0$ ergibt, so
$NM' = - \frac{3}{2} a$ und weiter $M'N' = + \frac{3}{2} a$.

Eine ganz ähnliche Discussion kann man an die Re
der Evolute der Elipse

$$(mx)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

knüpfen, deren Gestalt ebenfalls sternförmig ist und die:

$$s = \frac{1}{1-m^2} \left\{ (1-m^2)\, x^{\frac{2}{3}} + (m\,a)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} - \frac{m}{1-m^2}$$

ergibt, wo das Vorzeichen der Quadratwurzel ein für al
sitiv genommen werden mag, und es auch bei jeder Ver
des x bleibt, da unter dem Wurzelzeichen die Sumn
Quadrate steht (weil $m < 1$), die so lange x reell und e
niemals durch Null oder Unendlich hindurchgehen kann.

Wenn eine reelle Vieldeutigkeit des Bogens einer C
metrisch nicht nachweisbar ist, so darf daraus keines
Schluss gezogen werden, dass eine solche nicht existir
Denn es kann der eigenthümliche Umstand eintreten,

---

* Vielleicht ist die Vermuthung nicht ungerechtfertigt, das
selbst über die Tragweite seines Satzes für die Rectification nicl
Klaren gewesen sei; und dass er deshalb das durchaus nicht be
Wort „Oval" gebraucht, ohne mit Ausnahme des oben erwähnte
Zusatzes, irgend eine Erläuterung desselben zu geben. Hätte Newto
dass der Bogen dieser Sterne nicht nothwendig einen reellen Pe
modul besitzt, so würde er dies wahrscheinlicher Weise erwähnt h

eines imaginären Theiles der Curve reell bleibt: wenn
$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ noch reell und positiv ist. Obgleich z. B. der
iner Hyperbel nur eine geometrisch ersichtliche Zweideutig-
itzt, und um eine Constante nicht vieldeutig zu sein scheint,
r Perimeter einer sich in's Unendliche erstreckenden Curve
nendlich ist, so wird er doch bekanntlich durch elliptische
e erster und zweiter Art ausgedrückt, welche reelle Moduln
deutigkeit besitzen. Es sind uns somit, wenn wir im Ge-
r geometrischen Anschauung bleiben, noch engere Grenzen
ig auf die Rectification gesteckt, als sie schon bei der
ur der algebraischen Curven hemmend entgegentraten.

---

e vorstehenden Betrachtungen haben nirgends zum voll-
n Abschluss der Frage geführt, durch welche Functionen
welche Weise die Rectification oder Quadratur einer, der
ach bekannten algebraischen Curve ausführbar sein wird;
können dies nicht, so lange nicht das Imaginäre als mit
ellen gleich berechtigt in die Geometrie eingeführt wird.
ig dies selbst durch PONCELET's Arbeiten gelungen ist, von
hilfsweise Anwendung des Imaginären in der Geometrie
was für seltsame Vorstellungen über dasselbe verbreitet
l wie dasselbe im eigentlichen Sinne als ein wunderbares
st" umgeht, dafür legen folgende eigene Worte PONCE-
ein interessantes Zeugniss ab: „De même qu'on a déjà en
ie de noms pour exprimer les divers modes d'existence
ut comparer, tels que infiniment petits, infiniment grands,
ussi en avoir pour exprimer ceux de la non existence,
donner de la justesse et de la précision à la langue du
ment géométrique".

STEINER, der grosse Geometer unserer Zeit hat die
afte Welt des Imaginären geschaut, aber sein Geheimniss
in's Grab genommen.

---

priétés project. d. figures. S. 28.

Wenn die Analysis in der Theorie der Curven heut
constructiven Geometrie einen entschiedenen Vorzug hat
eben dem Umstande zuzuschreiben, dass es ihr gelunge
Imaginäre ganz und gar in sich aufzunehmen, ja das
Grunde nur als einen speciellen Fall des Complexen zu b
Es ist dadurch zugleich möglich geworden, an Stelle d
Definitionen der Functionen dadurch, dass man die Art
festsetzte, vermittels deren man zu jedem Werthe der unal
Veränderlichen den Werth der abhängigen bestimmen mu
zu setzen, welche allein die Angabe von charakteristischl
schaften erfordern. Schon früher hat man sich häufig,
als man anzunehmen scheint, solcher Definitionen bedien
bemerken, dass dieselben einen anderen Begriff der Funct
aussetzen; aber erst nach den Untersuchungen CAUCHY's
MANN's ist es möglich, ohne Aufopferung von Strenge
Schlusses von Eigenschaften der Functionen auf ihre expl
stellung zu bedienen. Dass es bei consequenter Anwe
complexen Variabilität möglich ist, die durch Integratio
braischen Function y von x erhaltene Function zu char
und sie mit Hilfe jenes RIEMANN'schen Principes zu besti
darf für den Kundigen keines Beweises. Denn die Punkte
eine Veränderung der Bewegungsrichtung von x stattfa
denen die Tangenten parallel zur Ordinatenaxe liegen, s
RIEMANN'schen Terminologie einfache Verzweigungsp
Function y von x. Der Durchgang des x durch einen derse
reellen Axe entspricht auf der mehrfach zusammenhängen
welche die Verzweigung von y in x darstellt, einem U
den Verzweigungspunkt. Lässt man einen Punkt die
eines Ovales in der obigen Weise durchlaufen, so wird
Stellen seine Bewegungsrichtung ändern, und es entsp
Bewegung des x auf der reellen Axe, ein Umlauf um zw
dieselben Blätter verbindende Verzweigungspunkte in je
Dass bei der Rückkehr zu dem Anfangspunkte $\int ydx$ un
stante, den Periodicitätsmodul, zugenommen hat, und
Integral in diesem Falle keine algebraische Function sei
evident.

Ein weiteres Eingehen auf die den obigen analoge

xen Gebiete, liegt hier nicht in meiner Absicht; vielmehr kam nur darauf an, zu zeigen, was aus der blossen Ansicht der iner algebraischen Curve über ihre Quadratur und Rectifi- geschlossen werden kann, meinerseits etwas dazu beizutra- ıss die in der Integralrechnung gewonnenen Formeln nicht, s allzuhäufig geschieht, als ein Werk eines blinden Zufalls ıer rähselhaften Nothwendigkeit angesehen werden, und nach- :n, dass sie selbst mit ganz elementaren Hilfsmitteln recht :rstanden und gedeutet werden können.

fragmentarisch die vorstehenden Bemerkungen auch sind, folge der Natur der Sache es sein müssen, so hoffe ich sie nassen rechtfertigen zu können durch die Worte, welche bei ınlichen Gelegenheit einer der bedeutendsten neueren Geo- ınd Meister in klarer und eleganter Darstellung Poinsot cht:

e ne présente qu'en passant ces refléxions dans l'intérêt de la phie de la science, partie trop négligée par la plupart des , et peut-être la plus digne d'être cultivée; car nos formules :héorèmes les plus remarquables sont bien moins utiles et ›récieux en eux-mêmes que cette sorte de métaphysique qui ire et les domine et qui seule peut rendre à l'esprit de nou- ›rces quand il faut se conduire et s'avancer plus loin dans la "

LEIPZIG,
DRUCK VON GIESECKE & DEVRIENT

Borel's Verallgemeinerung des Grenzbegriffes.

Von **Lucius Hanni** in Wien.

I.

Ist eine Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu$ mit endlichem Convergenzkreise

en, und ist dadurch eine analytische Function $f(x)$ innerhalb bestimmten Bereiches definiert, so kann man den Wert Function in einem Punkte P außerhalb des Convergenz- s dieser Reihe durch die Methode der analytischen Fort- g bestimmen. Zu dieser Methode sind nun in neuester Zeit andere hinzugekommen, die den Zweck haben, eine Potenz- in eine andere Reihe umzuformen, welche wieder eine ana- ıe Function der Veränderlichen x ist, die sich aber bezüglich Geltungsbereiches in vortheilhafter Weise von der analytischen :tzung unterscheidet. Es sind hauptsächlich zwei Gesichts- e, welche zur Einführung dieser letzteren Methoden Anlass gaben. Ist nämlich nur eine Potenzreihe gegeben, und weiß man über die dadurch definierte analytische Function, so bieten Methoden, wie E. Lindelöf im Anfange seiner Arbeit über Gegenstand (Acta soc. scient. Fennicae, t. 24, 1899) be- , eine bedeutende Erleichterung der Untersuchung und der ischen Berechnung der Function für ihre Werte auf dem rgenzkreise der betreffenden Potenzreihe und außerhalb des- . während die Methode der analytischen Fortsetzung in dieser ht meistens ohne praktischen Nutzen ist.

Anderseits ermöglichen diese Methoden die Lösung eines ems, welches A. Pringsheim (Encyklopädie der mathem. nschaften hgb. v. Burkhardt u. Meyer Bd. I, p. 109) in fol- r Weise formuliert: In wieweit kann eine Potenzreihe

x^ν auch dort, wo sie divergiert, zur Definition einer be-

ten von x abhängigen Zahl („Function") $F(x)$ dienen? Und ı gewisse zunächst nur für convergente Reihen definierte ungsoperationen auf solche rein formale Äquivalenzen

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu,$$

welche nur im Falle der Convergenz von $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu$ den Sin
licher Gleichungen annehmen, ohne Widerspruch angewend
den?

Gerade diesen zweiten Gesichtspunkt berücksichtigt be
E. Borel bei der Einführung seines verallgemeinerten Gren
(limite généralisée), den er auf folgende Weise definiert:

$$(1) \qquad \lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu s_\nu}{\nu!} = \lim \text{gen } s_n, \ (\lim n = \infty),$$

$$s_\nu = \sum_0^\nu {}_l a_l x^l.$$

Für alle Werte von x, für welche $\sum_0^\infty {}_l a_l x^l$ convergi
lim gen $s_n = \lim_{n=\infty} s_n$; für jene Werte von x aber, für welch
Potenzreihe nicht mehr convergiert (oscilliert) und der in (
stehende Grenzwert existiert, dient die Gleichung (1) als D
des Grenzwertes von $\sum_0^\infty {}_l a_l x^l$. Diese Definition, die zunäch
dings etwas willkürlich erscheint, wird dann dadurch gerech
dass unter gewissen noch erforderlichen Einschränkungen lin
wirklich die analytische Fortsetzung von $\sum_0^\infty {}_l a_l x^l$ liefert. (Jo
mathem. 1896, p. 103 ff, p. 441 ff; Ann. de l'ecole norm. sup.
außerdem verschiedene Noten in den Comptes rend.). Doch wei
selbst auf die Möglichkeit hin, seine Transformation einer
reihe (limite généralisée) zu gewinnen, ohne von divergenten
sprechen zu müssen; auch erwartet er eine Beziehung z
seiner Methode und der Lindelöfs (Acta soc. scient. Fennica

In der That, berücksichtigt man die von O. Sto
A. Pringsheim aufgestellten Sätze über unendliche Doppe
so erscheinen Borel's und Lindelöf's Methoden unter ein
heitlichen Gesichtspunkte, und zwar kann man Borel's T
mation erhalten durch Verallgemeinerung eines Processes,
Euler'sche Transformation, einen speciellen Fall von L
Methode der conformen Abbildung, liefert. Ferner biete
Sätze über unendliche Doppelreihen nicht nur ein Mittel, v
Verwendung von divergenten Reihen durch directe Transfo
der ursprünglich vorgelegten Potenzreihe zum limite génér
gelangen, sondern man kann dann auch von hier aus l
dem Gesichtspunkte gelangen, von dem Borel selbst ausg
ist (Ann. de l'ecole norm. sup. 1899 p. 52 f.).

Von den Sätzen über unendliche Doppelreihen werden nun die
len unmittelbare Verwendung finden (Pringsheim, Sitzungsber.
baier. Akad. d. Wiss., math.-phys. Cl. Bd. 27, 1899, p. 101 ff.)
Setzt man

$$\left.\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_\mu^{(0)} \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_\mu^{(1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)} \end{array}\right\} = S_\mu^{(\nu)}$$

ßt die unendliche Doppelreihe

$$\left.\begin{array}{l} a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + \cdots + a_\mu^{(0)} + \cdots \\ a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \cdots + a_\mu^{(1)} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} + \cdots + a_\mu^{(\nu)} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

gent, wenn $\lim_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$, ($S$ eine endliche Zahl), d. i.
jeder positiven Zahl ε positive Zahlen m, n so zugeordnet
können, dass für alle ganzzahligen Wertsysteme $\mu > m$, $\nu > n$

$$\left| S_\mu^{(\nu)} - S \right| < \varepsilon;$$

können die Glieder der Doppelreihe reelle oder complexe
sein. S wird dann auch als die Summe der unendlichen
reihe bezeichnet. Damit die Ungleichung (2) bestehe, ist
ndig und hinreichend, dass

$$\left| S_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - S_\mu^{(\nu)} \right| < \varepsilon$$

e Wertsysteme $\mu > m$, $\nu > n$, $\left.\begin{matrix} \varrho \\ \sigma \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, \ldots$
damit diese letzte Ungleichung erfüllt sei, muss nothwendig
$) = 0$ sein, d. h. die Glieder der Hauptdiagonale müssen
iem bestimmten an zur Null convergieren.
erner gelten die beiden Fundamentalsätze:
ine Doppelreihe kann convergieren, ohne dass eine einzige
der Colonne convergiert. Es kann aber immer nur eine
e Anzahl von Zeilen, bzgw. Colonnen eigentlich divergieren
n unendliches Unbestimmtheits-Intervall besitzen, und es

muss das Unbestimmtheits-Intervall aller Zeilen und Colonn einer bestimmten an beliebig klein werden.

Ist außer der unendlichen Doppelreihe jede einzelne $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} a_{\mu}^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots$ (oder jede einzelne Colonne $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_{\mu}^{(\nu)}$ $(\mu = 0$ convergent, so convergiert auch die Reihe der Zeilensumme diejenige der Colonnensummen gegen denselben Grenzw gegen welchen die Doppelreihe convergiert.

Endlich bedürfen wir noch eines Satzes von O. Stolz Ann., 24, p. 169):

Man setze $a_{\mu}^{(\nu)} = a_{\mu,\nu} x^{\mu}$. Die Zeilen $f_{\nu}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} a_{\mu}^{(\nu)}$ $(\nu =$ seien sämmtlich convergent für alle reellen und complexen von x, welche dem absoluten Betrage nach unter der p Zahl R liegen, Es convergiere ferner die aus den Grenz $f_{\nu}(x)$ gebildete Reihe

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_{\nu}(x) + \cdots$$

gleichmäßig für alle Werte $|x| < R$; dann convergiert die reihe, deren Glieder $a_{\mu}^{(\nu)} = a_{\mu,\nu} x^{\mu}$ sind, für jeden Wert von dem absoluten Betrag nach kleiner ist als R.

II.

Diese Sätze über convergente Doppelreihen geben nun genden Bemerkungen Anlass. Verwandelt man eine Pote $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_{\nu} x^{\nu}$ mit endlichem Convergenzkreise auf irgend ei in eine unendliche Doppelreihe, so wird diese im allgemein für solche Werte von x absolut convergieren, welche innerh Convergenzkreises jener Potenzreihe gelegen sind. Verlan aber nur bedingte Convergenz, so ergibt sich leicht die Mögl dass auch für solche Werte von x, für welche die ursprüngli tenzreihe nicht mehr convergiert, die betreffende Doppelreil noch convergieren kann, weil nun die Bedingungen für die genz einer Doppelreihe sehr weite sind. Ferner können dann in Doppelreihenschema auch noch entweder die aus den summen oder den Colonnensummen oder den Diagonalsum bildeten einfachen Reihen convergieren und sogar eine ana Function von x darstellen, welche identisch ist mit der du vorgegebene Potenzreihe definierten. Daher scheint von vor die Verwandlung einer Potenzreihe in eine unendliche Dop sehr dazu geeignet, um jene in einen analytischen Ausdru weiterem Geltungsbereiche zu transformieren.

Unter den vielen möglichen Umformungen einer Potenzreihe

$\sum_\nu x^\nu$ in eine unendliche Doppelreihe ist diejenige am nächsten

en, welche man dadurch erhält, dass man x als Function einer
ı Veränderlichen darstellt und dann nach Potenzen dieser
ı Variablen ordnet, so dass gleiche Potenzen derselben in
und derselben Colonne sich befinden.

Dieses Verfahren hat E. Lindelöf (Acta soc. scient. Fenni-
24. 1899) eingeschlagen; seine Methode lässt sich kurz in fol-
ɐr Weise darstellen. Es sei in der Ebene der complexen Ver-
·lichen x ein einfach zusammenhängendes Gebiet T gegeben,
$f(x)$ sei eine analytische Function von x, die in der Um-
ıg eines jeden Punktes im Innern von T regulär ist. Nach
ı Satze von Riemann existiert dann unter sehr allgemeinen
ıgungen betreffs des Randes von T eine analytische Function
(x), welche diese Fläche T auf den Kreis $|t| \leq 1$ conform
ıet. Nach dem Begriffe der conformen Abbildung ist diese
tion $\varphi(x)$ regulär im Innern von T und ebenso ist aus dem-
n Grunde die umgekehrte Function $x = \psi(t)$ regulär im Innern
Kreises $|t| \leq 1$.

Entspricht dem Mittelpunkte $t = 0$ dieses Kreises der Punkt x_0,
ıt man

$$x - x_0 = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots.$$

Da ferner $f(x)$ im Punkte x_0 zufolge der Voraussetzung holo-
h ist, so hat man in der Umgebung dieses Punktes

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 (x - x_0) + \beta_2 (x - x_0)^2 + \cdots.$$

Setzt man in diese Reihe für $x - x_0$ den obigen Ausdruck
so erhält man für $f(x)$ eine Reihe nach ganzen positiven
ızen von t, welche sicher für genügend kleine Werte von t
ɐrgiert. Es ist also die Function $f(x)$ durch die Substitution
$\psi(t)$ in eine Function von t transformiert $f\{\psi(t)\} = F(t)$,

$$F(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots.$$

Da man diese Transformation nicht nur für den Punkt x_0,
ɐrn für jeden anderen Punkt x_1 im Innern des Gebietes T
en kann, so ist $F(t)$ regulär in jedem Punkte im Innern des
es $|t| \leq 1$. Daraus folgt nun, dass der wahre Convergenz-
der Reihe (3) nicht nur ein Theilgebiet des Kreises $|t| \leq 1$,
ɐrn der Kreis $|t| < 1$ selbst ist. Macht man jetzt in der Reihe
ie Substitution $t = \varphi(x)$, so erhält man als Schlussergebnis
Resultat.

$$f(x) = b_0 + b_1 \varphi(x) + b_2 \{\varphi(x)\}^2 + \cdots;$$

diese Reihe convergiert nun für alle Werte von x im Innei Gebietes T.

Somit hat man hier schon ein Beispiel eines Doppelr schemas, in dem die einzelnen Zeilen divergieren, die Col aber und die aus den Colonnensummen gebildete Reihe c gieren. Ferner ergibt sich unmittelbar aus dem citierten Satz O. Stolz, dass für alle jene Werte von x, für welche die au Colonnensummen gebildete Reihe (4) convergiert, auch di sprechende unendliche Doppelreihe zu demselben Grenzwert vergiert. Wenn man daher die Verwandlung einer Potenzre eine unendliche Doppelreihe berücksichtigt, so erscheint die M der conformen Abbildung als ein specieller Fall dieser Ver lung; denn es ist leicht ersichtlich, dass verschiedene Transformationen einer Potenzreihe in eine unendliche Doppe möglich sind.

Bei solchen Verwandlungen kann der Fall eintreten, dieselbe Doppelreihe durch verschiedene Methoden erhalten w kann. Ein sehr einfaches Beispiel dazu bietet die Euler'sche T formation; man erhält sie, wenn man $x = \frac{t}{1+t}$ und $t = \frac{x}{1-x}$ setzt.

Dadurch geht die Function $f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu$ über in

$$(5)\; f(x) = a_0 + a_1\left(\frac{x}{1-x}\right) + \Delta a_1\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \cdots + \Delta^{n-1} a_1\left(\frac{x}{1-x}\right)^n +$$

wo $\Delta^r a_1 = a_{r+1} - \binom{r}{1} a_r + \binom{r}{2} a_{r-1} + \cdots + (-1)^r a_1$ ist.

Diese Transformation kann man nämlich außer durch stitution auch durch einen andern Process erhalten, durch Verallgemeinerung man eine Potenzseihe in eine solche D reihe umwandeln kann, dass man unmittelbar Borel's Tra mation erhält. Dieser Process ist beinahe derselbe, den Poncelet (Crelle's Journ. f. Math. 13, 1835) zur Convergenz-l suchung der Reihe (5) verwendet hat. Er beruht auf der folg Identität, welche Markoff (Differenzrechnung, übers. v. Friese u. Prümm, p. 101, 102) als die Formel der partiellen Sumr bezeichnet:

$$(6)\qquad \sum_{\alpha}^{\alpha+n\delta}{}_{\nu} \varphi(\nu)\,\Delta\psi(\nu) = \varphi(\alpha+n\delta)\,\psi(\alpha+n\delta) - \varphi(\alpha)\,\psi - \sum_{\alpha}^{\alpha+n\delta}{}_{\nu} \psi(\nu+\delta)\,\Delta\varphi(\nu),$$

wo φ und ψ Functionen von ν sind, und Δ wieder die bekann zeichnung für die Differenz $\Delta\varphi(\nu) = \varphi(\nu+\delta) - \varphi(\nu)$ u. s.

Setzt man jetzt $\delta = 1$ und $\psi(\nu) = \frac{x^\nu}{x-1}$, so ist $\Delta\psi(\nu) = x^\nu$; Gleichung (6) geht dann über in

$$\sum_\nu^n x^\nu \varphi(\nu) = \frac{x^{\alpha+n}\varphi(\alpha+n) - x^\alpha \varphi(\alpha)}{x-1} - \frac{x}{x-1}\sum_\alpha^{\alpha+n}{}_\nu x^\nu \Delta\varphi(\nu).$$

Setzt man ferner $\alpha = 1$, $\varphi(\nu) = a_\nu$ und wendet diese Formel Reihe nach auf die Summen

$$\sum_1^n{}_\nu a_\nu x^\nu, \sum_1^n{}_\nu x^\nu \Delta a_\nu, \ldots, \sum_1^n{}_\nu x^\nu \Delta^{m-1} a_\nu$$

so erhält man ein System von m Gleichungen, aus dem sich ɔt:

$$\sum_1^n{}_\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^m{}_\nu \left(\frac{x}{1-x}\right)^\nu \Delta^{\nu-1} a_1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^m \sum_1^n{}_\nu x^\nu \Delta^m a_\nu$$
$$- \frac{x^n}{1-x}\sum_0^{m-1}{}_\nu \left(\frac{x}{1-x}\right)^\nu \Delta^\nu a_n$$
$$= A + B + C.$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung kann nun in folgender Weise in der Form einer endlichen Doppel- darstellen:

$$\begin{aligned}
&a_1\left[\frac{x}{1-x} - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \cdots + (-1)^{m-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m\right] \\
&+ (-1)^{m-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m [x\Delta a_1 + x^2 \Delta a_2 \cdots + x^n \Delta a_n] - \frac{x^n a_n}{1-x} \\
&a_2\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \binom{-2}{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \cdots + \binom{-2}{m-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m\right] \\
&+ \binom{-2}{m-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m [x\Delta a_2 + x^2 \Delta a_3 \cdots + x^n \Delta a_{n+1}] - \frac{x^{n+1}\Delta a_n}{(1-x)^2} \\
&a_3\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \cdots + \binom{-3}{m-3}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m\right] \\
&+ \binom{-3}{m-3}\left(\frac{x}{1-x}\right)^m [x\Delta a_3 + x^2 \Delta a_4 \cdots + x^n \Delta a_{n+2}] - \frac{x^{n+2}\Delta^2 a_n}{(1-x)^3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_m\left(\frac{x}{1-x}\right)^m + \left(\frac{x}{1-x}\right)^m [x\Delta a_m + x^2 \Delta a_{m+1} \cdots + x^n \Delta a_{n+m}] - \frac{x^{n+m-1}\Delta^{m-1} a_n}{(1-x)^m}.
\end{aligned}$$

Lässt man jetzt m und n gleichzeitig zur Grenze ∞ über- n, so gilt die Gleichung (7) nur für solche Werte von x, für he die dabei auftretenden unendlichen Reihen convergieren; dem können die Reihen auf der rechten Seite von (7) bei $= \infty$, $\lim n = \infty$ auch für solche Werte von x convergieren,

für welche nicht alle Reihen in dem zur Ableitung von (7) d
den Gleichungssysteme convergieren. Es geht nämlich in (
Ausdruck A in die unendliche Reihe auf der rechten Seit
Gleichung (5) über, während die Terme B und C als die b
Euler'schen Transformation auftretenden Restglieder ersch
(vergl. Poncelet a. a. O.), die natürlich für alle Werte von
welche die Gleichung (5) besteht, zur Null convergieren, wa
sofort auch direct ergeben wird. Dadurch ist zunächst bew
dass man die Euler'sche Transformation auch durch successiv
wendung der Formel der partiellen Summation erhalten kan

Ferner geht die endliche Doppelreihe (8), wenn m
sich gleichzeitig der Grenze $+\infty$ nähern, in eine unendliche
und es handelt sich darum zu untersuchen, wann diese unen
Doppelreihe eine convergente ist. Die nothwendige und hinreic
Bedingung zur Convergenz derselben ist:

$$\left|S_{\mu+\varrho}^{\nu+\sigma} - S_{\mu}^{\nu}\right| < \varepsilon,\ \mu > g, \nu > g' \begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix} = 0, 1, 2, \ldots,$$

d. h. es muss der absolute Betrag von

$$\sum_{m}^{m+r}{}_{\nu}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\nu}\Delta^{\nu-1}a_1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{m+r}\sum_{1}^{n+s}{}_{\nu}x^{\nu}\Delta^{m+r}a_{\nu} - \left(\frac{x}{1-x}\right)^{m}\sum_{1}^{n}{}_{\nu}$$
$$- \frac{x^{n+s}}{1-x}\sum_{0}^{m+r-1}{}_{\nu}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\nu}\Delta^{\nu}a_{n+s} + \frac{x^{n}}{1-x}\sum_{0}^{m-1}{}_{\nu}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\nu}\Delta^{\nu}a_{n}$$

kleiner sein, als eine beliebige positive Zahl ε, wenn n
$n > g, \begin{matrix}r\\ s\end{matrix} = 0, 1, 2, \ldots.$

Man sieht leicht, dass zur Erfüllung dieser letzten Bedi
wieder nothwendig und hinreichend ist, dass in (7) für $\lim m =$
$\lim n = \infty$ die Reihe A convergiere und die Doppelreihe B
(zur Null) convergieren. Dies ist aber der Fall für alle Wert
x, für welche die Gleichung (5) besteht; denn dann conve
die unendliche Doppelreihe

$$(9)\quad \begin{cases} a_1\left[\frac{x}{1-x} - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \cdots + (-1)^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right.\right. \\ a_2\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \binom{-2}{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \cdots + \binom{-2}{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\right.\right. \\ a_3\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^3 \cdots + \binom{-3}{n-3}\left(\frac{x}{1-x}\right.\right. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^m \cdots + \binom{-m}{n-m}\left(\frac{x}{1-x}\right.\right. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

chon früher bewiesen wurde. Zufolge der Convergenz dieser
elreihe ist $|S_{m+n}^{(m+n)} - S_m^{(m)}| < \varepsilon,\ m > g,\ n = 1, 2, 3, \ldots g', \ldots$
aber $S_{m+n}^{(m+n)} - S_m^{(m)}$ nicht nur gleich $\sum_1^n{}_r \left(\frac{x}{1-x}\right)^{m+r} \Delta^{m+r-1} a_1$,
:n auch gleich $\left(\frac{x}{1-x}\right)^m \sum_1^n{}_r x^r \Delta^m a_r$; darauss folgt, dass auch
$x\Big)^m \sum_1^n{}_r x^r \Delta^m a_r \Big| < \varepsilon,\ m > g,\ n = 1, 2, \ldots, g', \ldots,$ d. h. es
auch in (7) $|B| < \varepsilon,\ m > g,\ n > g'$.

Ebenso convergiert bei genügend großem m und n die Doppel-
C für alle Werte von x, für welche (5) besteht, zum Grenz-
Null; denn diese Doppelreihe entsteht durch Anwendung
uler'schen Transformation auf das Restglied

$$x^{n-1}(a_n x + a_{n+1} x^2 + \cdots).$$

Somit ist nachgewiesen, dass für alle Werte von x, für welche
leichung (5) besteht, nicht nur die unendliche Doppelreihe
ondern auch die unendliche Doppelreihe (8) für $\lim m = \infty$,
$= \infty$ zum Grenzwert $\sum_1^\infty{}_r \left(\frac{x}{1-x}\right)^r \Delta^{r-1} a_1$ convergiert.

Außerdem sieht man leicht, dass man durch ähnliche Schlüsse
atz nachweisen kann: Für alle Werte von x, für welche die
ung (5) besteht, folgt aus der Convergenz der Doppelreihe
$\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ auch die Convergenz der Doppelreihe
aher sind diese beiden Doppelreihen einander äquivalent.

Endlich wollen wir noch kurz hinweisen, dass man durch
ormel der partiellen Summation sofort auch noch eine etwas
einere Transformation erhalten kann. Dieselbe besteht darin,
nan in der Potenzreihe $\sum_0^\infty{}_\nu a_\nu x^\nu$ für x die Substitution macht
$\frac{\alpha t}{\alpha + t}$, $t = \frac{x}{\alpha - x}$, wo α eine reelle positive Zahl bedeutet.
t man nach Potenzen von t und setzt

$$= \alpha^{n+1} a_{n+1} - \binom{n}{1}\alpha^n a_n + \binom{n}{2}\alpha^{n-1} a_{n-1} \cdots + (-1)^n \alpha a_1,$$

ält man

$$\sum_\nu a_\nu x^\nu = f(x) = a_0 + a_1 \alpha \frac{x}{\alpha - x} + \Delta_\alpha a_1 \left(\frac{x}{\alpha - x}\right)^2 + \cdots$$

löf, Comptes rend., Bd. 126, 1898, p. 632; Acta soc. scient.
:ae 24). Zu dieser Transformation kann man leicht durch

successive Anwendung der Formel der partiellen Summati
langen; man braucht nur zu beachten, dass

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu \alpha^\nu \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\nu = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a'_\nu x'^\nu$$

ist, wodurch die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelb
leuchtet.

III.

Wie schon früher erwähnt, werden wir, indem wir d
thode des vorigen Paragraphen verallgemeinern, durch Umf
einer Potenzreihe unmittelbar zu Borel's limite généralisée ge
Diese Verallgemeinerung besteht einerseits darin, dass wir
Gleichung (6) für $\varphi(\nu)$ nicht mehr den Coefficienten a_ν, s
die Function $a_\nu x^\nu$ einführen, welche jetzt nicht nur von ν, s
auch von x abhängt. Wir wenden nämlich die Formel d
tiellen Summation nicht mehr auf die Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu$ an, s
auf die Reihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu a_\nu x^\nu$, die für $\lim a = +\infty$ gleich
zum Grenzwerte $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu$ convergiert, da

$$\lim_{a=\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right) = \lim_{a=\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{a}}\right) = 1$$

ist.

Ferner treffen wir auch für die Function $\psi(\nu)$ von
(Gleichung (6)) eine etwas allgemeinere Wahl; wir setzen

$$\psi(\nu) = \frac{\left(\frac{a}{a+r}\right)^\nu}{\frac{a}{a+r} - 1} = -\frac{a}{r}\left(\frac{a}{a+r}\right)^{\nu-1}$$

und daher

$$\Delta\psi(\nu) = \left(\frac{a}{a+r}\right)^\nu, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann wenden wir die Formel der partiellen Summat
Reihe nach an auf die Summen

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu a_\nu x^\nu, \quad \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\frac{a}{a+2}\right)^\nu \Delta a_\nu x^\nu, \quad \ldots \quad \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \left(\frac{a}{a+m}\right)^\nu \Delta^{m-}$$

erhalten so analog dem Früheren folgendes Schema von m chungen:

$$\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu a_\nu x^\nu = -a\left[\left(\frac{a}{a+1}\right)^n a_n x^n - a_1 x\right] + a\sum_2^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+1}\right)\Delta(a_\nu x^\nu)$$

$$\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+2}\right)^\nu \Delta(a_\nu x^\nu) = -\frac{a}{2}\left[\left(\frac{a}{a+2}\right)^n \Delta(a_n x^n) - \Delta(a_1 x)\right]$$

$$+\frac{a}{2}\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+2}\right)^\nu \Delta^2(a_\nu x^\nu)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+m}\right)^\nu \Delta^{m-1}(a_\nu x^\nu) = -\frac{a}{m}\left[\left(\frac{a}{a+m}\right)^n \Delta^{m-1}(a_n x^n) - \Delta^m(a_1 x)\right]$$

$$+\frac{a}{m}\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+m}\right)^\nu \Delta^m(a_\nu x^\nu).$$

Wenn man jetzt in diesen Gleichungen a zur Grenze $+\infty$ ehen lässt, so ist zwar für endliche Werte von r

$$\lim_{a=\infty}\left(\frac{a}{a+r}\right) = \lim\left(\frac{a}{1+\frac{r}{a}}\right) = 1,$$

$$\lim_{a=\infty}\left(\frac{a}{a+r}\right) = \lim_{a=\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right).$$

Sobald aber auch r zum Grenzwert $+\infty$ übergeht, wird $\left(\frac{a}{a+r}\right)$ unbestimmt; doch tritt dieser Fall nicht mehr ein, man den Grenzübergang so macht, dass $\lim \frac{r}{a} = 0$ wird, n man z. B. $r = \mu t$, $a = \nu t^2$, $\lim t = \infty$ annimmt; denn ist auch für $r > G$, wo G eine beliebig große positive ganze bedeutet, $\lim_{t=\infty} \frac{\mu t}{\nu t^2} = 0$ und demnach für diesen Fall auch $\left(\frac{a}{a+r}\right) = 1$. Auf Grund dieser Bemerkungen erhält man aus Gleichungen (10) die Formel:

$$\lim_{a=\infty}\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu a_\nu x^\nu = \lim_{a=\infty}\sum_1^m{}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\Delta^{\nu-1}(a_1 x) +$$

$$+\lim_{a=\infty}\frac{a^m}{m!}\sum_1^n{}_\nu \left(\frac{a}{a+m}\right)^\nu \Delta^m(a_\varepsilon x^\nu) - \lim_{a=\infty}\sum_1^m{}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\Delta^{\nu-1}(a_n x^n).$$

Lässt man jetzt m und n gleichzeitig zum Grenzwert übergehen — natürlich immer unter der Voraussetzung, $\lim_{a=\infty} \frac{a}{a+r} = 1\ (r = 1, 2, \ldots)$ —, so treten in den Gleich (10) und (11) unendliche Reihen auf, so dass diese Gleich nur dann einen Sinn haben, wenn die betreffenden Reihen c gieren. Dies ist aber sicher der Fall für alle Werte von x, v dem Convergenzkreise der Reihe $f(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu\, x^\nu$ angehören, Radius wir der Einfachheit wegen gleich 1 annehmen wolle

Zunächst convergieren nämlich die Reihen $\Delta^r(a_1\, x)$ fü Werte von x innerhalb des Convergenzkreises, weil auch die mische Reihe einen Convergenzkreis mit dem Radius 1 h Ferner convergieren auch die Reihen von der Form

$$\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a}{a+r}\right)^\nu \Delta^r(a_\nu\, x^\nu).\ (r = 1, 2, \ldots m \ldots).$$

Setzt man z. B. $r = 1$, so entsteht die Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu \Delta$ dadurch, dass man die Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu a_\nu\, x^\nu$ gliedweise v Reihe $\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu a_{\nu+1}\, x^{\nu+1}$ subtrahiert; die durch Subt von zwei absolut convergenten Reihen entstandene Reihe mu wieder absolut convergieren und zwar unter denselben Bedin wie die beiden anderen Reihen. Dieselbe Schlussweise kan jetzt auch auf die neu erhaltene Reihe anwenden und von liebig fortsetzen. Somit convergieren die Reihen $\sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a}{a+r}\right)^\nu \Delta^r$ für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist und für alle $a > G$ (G eine beliebig große positive Zahl) zwar ist die Convergenz, wie man sich leicht überzeugen eine gleichmäßige sowohl in Bezug auf alle diese Werte als auch betreffs aller a für $a > G$.

Aus der absoluten Convergenz der Reihe

$\lim_{a=\infty} \sum_1^\infty {}_\nu \left(\frac{a}{a+r}\right)^\nu \Delta^r(a_\nu\, x^\nu)$ folgt $|\Delta^r(a_\nu\, x^\nu)| < \varepsilon_r$, wenn $\nu >$ (ε_r eine positive von r abhängige Zahl). Da diese Reihe nac Obigen aber für jedes beliebige r convergiert, so kann ma andere positive Zahl ε so wählen, dass sie gleich oder grö als die größte dieser ε_r, und man hat dann auch unabhäng $r\ |\Delta^r(a_\nu\, x^\nu)| < \varepsilon,\ \nu > n$. Ferner ist

$$|\Delta^{r+1}(a_\nu x^\nu)| = |\Delta^r(a_{\nu+1} x^{\nu+1}) - \Delta^r(a^\nu x^\nu)| \leqq 2\varepsilon_r$$

daher allgemein

$$|\Delta^{r+k}(a_\nu x^\nu)| \leqq 2^k \varepsilon_r.$$

Betrachtet man die Reihe

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_1 x) = \sum_1^N {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_1 x) + \sum_{N+1}^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_1 x),$$

t für

$$\nu \geqq N+1 \quad |\Delta^{\nu-1}(a_1 x)| \leqq 2^{\nu-N-1} \varepsilon_N;$$

r convergiert diese Reihe absolut und gleichmäßig für alle te von x, für welche $|x|<1$, und als Potenzreihe von a auch hmäßig für alle $a > G$, da $\varepsilon_N < \varepsilon$.

Aus gleichen Gründen muss endlich auch noch die Reihe

$\frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^{\nu-1}(a_n x^n)$ für $|x|<1$ und $a > G$ gleichmäßig und absolut

ergieren. Somit ist für alle $|x|<1$ und $a > G$ die Zulässigkeit des Grenzüberganges $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ in Gleichung nachgewiesen.

Bevor wir die rechte Seite von (11) in der Form einer Doppel- darstellen, nehmen wir noch zwei kleine Änderungen daran Bezeichnet man mit

$$s_0, s_1(x), s_2(x), \ldots s_n(x), \ldots$$

auch kürzer mit $s_0, s_1 s_2 \ldots s_n \ldots$ die Partialsummen der nzreihe $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu$, so ist

$$a_1 x = \Delta s_0, \ldots, \Delta^{\nu-1}(a_1 x) = \Delta^\nu s_0, \ldots$$

Berücksichtigt man noch, dass $\lim_{a=\infty} \frac{a}{a+r} = \lim_{a=\infty} \frac{a}{a+1} = 1$ ist, eht Gleichung (11) über in

$$\sum_\nu a_\nu x^\nu = \lim_{a=\infty} \left[\sum_0^m {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_0 + \frac{a^m}{m!} \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{a}{a+m}\right)^\nu \Delta^{m+1} s_{\nu-1} - \sum_1^m {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_{n-1} \right]$$

In ähnlicher Weise wie im früheren Paragraphen kann den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung in fol endliche Doppelreihe anordnen:

$$(12)\quad \begin{cases} s_0\left[1-a+\frac{a^2}{2!}\cdots+(-1)^m\frac{a^m}{m!}\right]+(-1)^m\frac{a^m}{m!}\left[\left(\frac{a}{a+m}\right)\Delta s_0\right. \\ \qquad\left.+\left(\frac{a}{a+m}\right)^n\Delta s_{n-1}\right]-a\,\Delta s_{n-1} \\ a\,s_1\left[1-a\cdots+(-1)^{m-1}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}\right]+\binom{-2}{m-1}\frac{a^m}{m!}\left[\left(\frac{a}{a+m}\right)\Delta s\right. \\ \qquad\left.+\left(\frac{a}{a+m}\right)^n\Delta s_n\right]-\frac{a^2}{2!}\Delta^2 s_{n-1} \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{a^m}{m!}\Delta \\ \qquad\qquad\frac{a^m}{m!}s_m+\frac{a^n}{m!}\left[\left(\frac{a}{a+m}\right)\Delta s_m\right. \\ \qquad\left.+\left(\frac{a}{a+m}\right)^n\Delta s_{n+m}\right]. \end{cases}$$

Lässt man jetzt m und n gleichzeitig zur Grenze $+\infty$ gehen, so geht auch diese Doppelreihe in eine unendliche Auf dieselbe Weise wie im früheren Paragraphen kann man schließen, dass diese unendliche Doppelreihe zum Grenz $\lim_{a=\infty}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{a^\nu}{\nu!}\Delta^\nu_{s_0}$ convergiert, wenn diese letztere Reihe selbst vergiert und die Restglieder $\lim_{a=\infty}\frac{a^m}{m!}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{a}{a+m}\right)^\nu\Delta^{m+1}_{s_\nu}$ ($\lim m=$ und $\lim_{a=\infty}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{a^\nu}{\nu!}\Delta^\nu_{s_{n-1}}$ ($\lim n=+\infty$) den Grenzwert Null h Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, ergibt sich aus den Gründen wie früher, dass auch die folgende unendliche Doppe zum Grenzwerte $\lim_{a=\infty}\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{a^\nu}{\nu!}\Delta^\nu_{s_0}$ convergiert:

$$(13)\quad \begin{cases} s_0\left[1-a+\frac{a^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{a^n}{n!}\cdots\right] \\ \qquad a\,s_1\left[1-a+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\cdots\right] \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\frac{a^m}{m!}s_m\left[1\cdots+(-1)^{n-m}\frac{a^{n-m}}{(n-m)!}\cdots\right] \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ebenso gilt auch wieder umgekehrt, wenn die unendliche Reihe (13) convergiert, so convergiert auch (12) bei $\lim m = \lim n = +\infty$ zu demselben Grenzwerte.

Auf Grund dieses Satzes ergibt sich, dass diese beiden Doppel-

für alle $|x|<1$ wirklich zum Grenzwerte $\lim_{a=\infty} \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a_\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_0$ con-

ren (natürlich immer unter der Voraussetzung, dass $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu$ $|<1$ convergiert und dass $\lim_{a=\infty} \frac{a}{a+r} = 1, r = 1, 2 \ldots$). Da

h für alle $|x|<1$ die Reihe $\lim_{a=\infty} \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_0$ gleichmäßig con-

t, außerdem eine Potenzreihe nach ganzen positiven Potenzen ist und endlich die einzelnen Colonnen der Doppelreihe (13) convergieren, so kann man auch hier den Satz von O. Stolz wenden. Es convergieren somit für alle $|x|<1$ die Doppel-

(13) und (12) zum Grenzwert $\lim_{a=\infty} \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_0$, und demnach

gieren für $\lim m = +\infty$ $\lim n = +\infty$ auch die Restglieder $\frac{1}{\nu!} \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{a}{a+m}\right)^\nu \Delta^{m+1}$ und $\lim_{a=\infty} \sum_1^m {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_{n-1}$ zum Grenzwerte daraus folgt jetzt auch, dass für $|x|<1$, $\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu x^\nu = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} \Delta^\nu s_0$ ist.

Aus der Convergenz der unendlichen Doppelreihe (13) lässt eiter die Folgerung ziehen, dass unter den bisher gemachten setzungen auch die aus ihren Zeilensummen gebildete Reihe giert. Wenn nämlich die unendliche Doppelreihe (13) con-t, so müssen die Diagonalglieder von einem bestimmten an ll convergieren. Es muss also $\left|\lim_{a=\infty} \frac{a^m}{m!} s_m(x)\right| < \varepsilon$, wenn m ist als eine beliebig gegebene positive Zahl G; daher ist auch

$$\left|\lim_{a=\infty} \frac{a^m}{m!} s_m(x)\left(1 - a + \frac{a^2}{1!} \ldots\right)\right| < \varepsilon', \; m > G.$$

a selbstverständlich auch für $m < G$ $\lim_{a=\infty} e^{-a} \frac{a^m}{m!} s_m(x)$ zur Null giert, so convergiert jede Zeile dieser unendlichen Doppel- und infolge dessen auch die aus den Zeilensummen gebildete

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu(x) \ldots ; \tag{14}$$

der Grenzwert $s(x)$ dieser letzteren Reihe ist gleich dem Grenz
der aus den Colonnensummen gebildeten Reihe. Daher hat
für $|x|<1$

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu = \lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu(x),$$

wo die Reihe rechts gleichmäßig convergiert für $|x|<1$
ebenso für $a>G$.

Jetzt kann man nun umgekehrt die Voraussetzung ma
dass die Reihe (14) für alle Werte von x innerhalb eines bestim
Bereiches A und ebenso für $a>G$ gleichmäßig convergiere
ergibt sich dann, dass für alle diese Werte von x auch die D
reihe (13) zu demselben Grenzwert $s(x)$ convergiert. Es ist nä

$$S_{m+r}^{n+s} - S_m^n = \left[\sum_{0}^{n+s}{}_{\nu}(-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\right]\left[\sum_{0}^{m+r}{}_{\nu} \frac{a^\nu s_\nu}{\nu!}\right] - \left[\sum_{0}^{n}{}_{\nu}(-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\right]\left[\sum_{0}^{m}{}_{\nu} a^\nu\right.$$

$$= \left[\sum_{0}^{n}{}_{\nu}(-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\right]\left[\sum_{m+1}^{m+r}{}_{\nu} \frac{a^\nu s_\nu}{\nu!}\right] + \left[\sum_{n+1}^{n+s}{}_{\nu}(-1)^\nu \frac{a^\nu}{\nu!}\right]\left[\sum_{0}^{m+r}{}_{\nu} a_\nu\right.$$

$$= P + Q, \quad \left.\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots$$

Wenn nun $\left| e^{-a} \sum_{m}^{m+r}{}_{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu \right| < \varepsilon$ für $m>\mu$, $a>G$ und f
Werte von x innerhalb des Bereiches A, so ist zunächst $|P$

In ähnlicher Weise folgt dann auch $|Q| < \varepsilon_2$. Daher ist
diesen Bedingungen $|S_{m+r}^{n+s} - S_m^n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon_3$; somit i
obige Behauptung bewiesen.

Während man aber früher zeigen konnte, dass auch d
den Zeilensummen gebildete Reihe convergiert, wenn dies f
aus den Colonnensummen gebildete Reihe der Fall ist, so
man nicht das Umgekehrte zeigen. Die Potenzreihe $\sum_{0}^{\infty}$
ist also mit Hilfe der Formel der partiellen Summation in ei
endliche Doppelreihe verwandelt worden, die auch dann, we
einzelnen Colonnen und die ursprüngliche Reihe divergieren
noch convergieren kann und zwar zu demselben Grenzwer
die Reihe der Zeilensummen. So sieht man schon die Mögli

ie Reihe (14) als eine Umwandlung der vorgegebenen Potenz-
in einen Ausdruck mit weiterem Geltungsbereich dienen kann.

Wenn nun durch $f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$ für einen bestimmten Be-
A' der Ebene eine analytische Function definiert ist, so han-
s sich darum, ob der Grenzwert der Reihe (14) falls ein
auch außerhalb des Convergenzkreises von $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$, vor-
ı ist, mit dem Werte der durch diese Reihe definierten ana-
en Function übereinstimmt. Bei der Lösung dieser Frage
Borel in folgender Weise vor. (Journ. de math., 1896, p. 115).
ıämlich die Reihe (14) die analytische Fortsetzung von
x^ν liefern, so muss diese Reihe für alle Werte von x inner-
es Bereiches A und für $a > G$ gleichmäßig convergieren
ır Grenzwert eine analytische Function $\varphi(x)$ sein für alle
von x innerhalb eines gewissen Bereiches A'', der sowohl
alb A als auch innerhalb A' liegen muss. Wenn diese Voraus-
gen erfüllt sind, hat man zwei analytische Functionen, die
alb des Convergenzkreises von $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$ identisch sind. Da
diese Potenzreihe beide Functionen bestimmt sind, so muss
ihe (14) für alle Werte von x innerhalb A'' die analytische
zung von $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu$ liefern. Somit kann die Reihe (14) wirk-
der Weise verwendet werden, wie sich gerade früher zu-
nur als wahrscheinlich ergab, sobald man weiß, wann sie
ıalytische Function von x ist, und welches der Geltungs-
ı dieser Function ist.

ur Beantwortung der ersten Frage brauchen wir auch bei
Art der Einführung des limite généralisée nur die betref-
Andeutungen Borel's (Journ. de math., 1896, p. 114; Ann.
ole norm. 1899, p. 55, Anmerk.) vollständig auszuführen.
geht aus von der Reihe

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, [e^{-(\nu+1)}\, s(\nu+1, x) - e^{-\nu}\, s(\nu, x)], \ldots,$$

$$s(\nu, x) = s_0 + \nu\, s_1(x) + \frac{\nu^2}{2!}\, s_2(x) + \cdots$$

Diese Reihe convergiert gleichmäßig für alle Werte x, für welche die Ungleichung besteht

$$(16)\quad |e^{-(\nu+r)}\, s(\nu+r, x) - e^{-\nu} s_\nu(x)| < \varepsilon \text{ für } \nu > n, r = 0, 1, \ldots$$

ihr Grenzwert ist gleich

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu(x) - s_0 = s(x) - s_0.$$

Weil nun die Reihe (15), die für alle Werte von x im jenes Bereiches, für welche die Ungleichung (16) besteht, eine tische Function von x ist, so folgt, dass auch der Grenzw Reihe (14) eine analytische Function von x ist, wenn (16) ist; denn es unterscheiden sich die Grenzwerte von (14) u nur um eine Constante. Da die Reihe (14), wenn (16) best Bezug auf a und in Bezug auf x gleichmäßig convergiert, s man nach dem Mittelwertsatze

$$e^{-(\nu+r)}\, s(\nu+r, x) - e^{-\nu} s(\nu, x) = r \frac{d\,[e^{-(\nu+\Theta r)}\, s(\nu+\Theta r,}{d\,\nu}$$

$$\nu > n, 0 < \Theta < 1;$$

daher geht die Ungleichung (16) über in

$$\left|\frac{d\,[e^{-a}\, s(a, x)]}{d\,a}\right| < \varepsilon,\ a > G.$$

Man darf nun unter den hier gemachten Voraussetzung Reihe (14) gliedweise nach a differentieren und erhält

$$(17)\quad \frac{d\,[e^{-a}\, s(a, x)]}{d\,a} = e^{-a}\,[s(a, x) - s(a, x)] = e^{-a}\, u_1(a, x),$$

wo

$$u_1(a, x) = a_1 x + a.a_2 x^2 + \frac{a^2}{2!} \cdot a_3 x^3 + \cdots$$

ist.

Für alle jene Werte von x und a, für welche die Rei gleichmäßig convergiert, muss auch $e^{-a} u_1(a_1 x)$ gleichmäß vergieren. — Endlich sieht man leicht, dass für alle Werte für welche die Reihe (14) gleichmäßig convergiert und ihr wert eine analytische Function von x ist, dasselbe von der Rei gilt. Daher gelangt man durch Einführung der Reihe (1 Satze: Die nothwendige und hinreichende Bedingung, d Grenzwert der Reihe $\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_0^\infty {}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu(x)$ eine analytische F von x darstellt, ist, dass der absolute Betrag von $\lim_{a=\infty} e^{-a}$ zur Null convergiert.

Falls diese Bedingung erfüllt ist, folgt leicht aus der Gleichung
wie Borel gezeigt hat, dass sie auch ersetzt werden kann
die Ungleichung

$$| e^{-a} u(a, x) | < \varepsilon, a > G,$$

$$u(a, x) = a_0 + a . a_1 x + \frac{a^2}{2!} a_2 x^2 + \frac{a^3}{3!} a_3 x^3 + \cdots$$

Von diesem Ausdrucke kann man jetzt in derselben Weise
orel dazu übergehen, dass

$$\lim_{a=\infty} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-a} u(a, x)\, da$$

dass dieses Integral und die Reihe auf der linken Seite dieser
ung einander vollständig gleichwertig sind für alle Werte
, für welche die letzte Ungleichung erfüllt ist. Ferner benützt
zu einer weiteren Umformung des Ausdruckes $e^{-a} u(a_1 x)$
atz über das Cauchy'sche Integral: Ist $f(x)$ eine analytische
on, so ist

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(u)}{u - x}\, du,$$

eine einfache geschlossene Linie ist, innerhalb der und auf
x) eindeutig, stetig und mit einem vollständigen Differential-
iten begabt ist, der selbst wieder eine stetige Function von x
Dadurch erhält man

$$e^{-a} u(a, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(u)}{u} e^{a\left(\frac{x}{u} - 1\right)}\, du.$$

Mit diesen Hilfsmitteln gelingt es nun auch etwas über den
gsbereich der Function $\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu(x)$ zu erfahren, und
gelangt Borel (Journ. de mathem. 1896, p. 443—45) durch
ndung von Sätzen der elementaren Geometrie zu folgendem

Die Reihe (14) ist eine analytische Function von x (die Be-
g (18) ist erfüllt) wenigstens innerhalb eines convexen Poly-
las in folgender Weise bestimmt ist: Man zieht vom Mittel-
O des Convergenzkreises von $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} a_\nu x^\nu$ Radienvectoren zu
inzelnen singulären Punkten der durch diese Reihe definierten
schen Function $f(x)$, errichtet in jedem derselben eine Senk-

rechte auf den betreffenden Radiusvector und lässt dann jene der Ebene weg, der vom Punkte O aus betrachtet außerhall Senkrechten liegt.

Zwar ist damit noch nicht gesagt, dass der Geltungs der Reihe (14) nicht über dieses Polygon hinausgehen kön in einfachen Fällen (geometrische und logarithmische Rei Borel (Journ. d. mathem. 1896, p. 116, 117) gezeigt, da durch diese Construction den wirklichen Geltungsbereich de (14) erhält. Auch bei der Reihe für den arc tang x kan direct zeigen, dass der Ausdruck (14) gleichmäßig conver dem Streifen, welcher von den beiden Tangenten eingesc ist, die in den Punkten $x = +i$ und $x = -i$ an den Con kreis gezogen werden können; den man hat hier

$$e^{-a}\, u\,(a, x) = e^{-a} \cdot \frac{1}{a} \sin a\, x = \frac{1}{2\,i} \frac{e^{a(x\,i-1)} - e^{-a(x\,i+1)}}{a}$$

Bei dieser und bei der logarithmischen Reihe führt die Rechnung deswegen zum Ziele, weil die Ableitung die For geometrischen Reihe hat; im allgemeinen kann man a Function $u\,(a, x)$ nur in der Form einer unendlichen Rei stellen.

Indem wir also wie Lindelöf davon ausgegangen sin Potenzreihe in eine Reihe mit größerem Geltungsbereich z formieren, sind wir mit Hilfe der unendlichen Doppelre Borel's limite généralisée in ganz analoger Weise gelangt Euler'schen Transformation. Nur unterscheidet sich Lindelöf' formation dadurch von der Borel's, dass jener durch d wendung der Sätze über conforme Abbildung den Geltung der transformierten Reihe von vornherein genau angebe Doch zeigen beide Methoden wieder insofern Ähnlichkeit, ebenfalls Borel's Transformation als eine Art von Abbil weiterem Sinne auffassen kann, wie dies Pincherle (C rendus, 1899, Bd. 128, p. 407) hervorhebt.

IV.

Den Ausdruck $\lim_{a=\infty} e^{-a} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a^\nu\, s_\nu\,(x)}{\nu!}$, der bisher nur lytische Function von x betrachtet werde, kann man anderer Weise auffassen, indem man seinen Bau berück

Es ist ja $e^{-a} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!} s_\nu\,(x)$ ein Bruch, dessen Nenner gl

$$1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots,$$

ssen Zähler dadurch erhalten wird, dass man die einzelnen ummen

$$s_0, s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots$$

ebenen Potenzreihe der Reihe nach mit

$$1, a, \frac{a^2}{2!}, \ldots, \frac{a^n}{n!}, \ldots,$$

ciert. Man kann daher den Ausdruck (14) als eine Art von wischen den einzelnen Partialsummen $s_0, s_1(x), \ldots, s_n(x), \ldots$. Zu dieser Auffassung als Mittel bietet außerdem seine haft Anlass, dass er auch dann convergieren kann, wenn x) divergiert. Ferner folgt aus (17) leicht, dass ein Grenz-

ır von den Summen $s_n(x)$ abhängt, die genügend großen von n entsprechen. Endlich sieht man auch, dass der k (14) für jene Werte x' außerhalb des Convergenzkreises

$a_\nu x''$, für welche er die analytische Fortsetzung $f(x')$ von

liefert, sogar dann zur numerischen Berechnung von $(f\,x')$

enn nur die numerischen Werte der einzelnen Reihenglieder ht deren analytisches Bildungsgesetz bekannt sind. Nur r Weise aufgefasst erscheint daher die Borel'sche Trans- n einfach als ein Process zur numerischen Berechnung ') aus den numerischen Werten von $s_\nu(x')$. So sind wir ie Entwicklung der Eigenschaften des Ausdruckes (14) zu sichtspunkte gelangt, von welchem Borel ausgegangen ist; angeführten Eigenschaften dieses Ausdruckes haben nämlich eranlasst, denselben als den verallgemeinerten Grenzwert ') (lim gen $s_n(x)$) zu definieren. Diese Definition rechfertigt rel in der schon § I. erwähnten Weise.

ıfachere Arten von Mittelbildungen wurden schon von ı i u s (Crelles Journ. f. Math. Bd. 89, 1880, p. 262) und von (Math. Ann. Bd. 20, 1882, p. 535) behandelt und von C e s à r o des sciences mathem. 1890, p. 114) weiter ausgebildet. e letztere Arbeit knüpft Borel an (Ann. de l'ecole norm. 52); doch bleibt er bei der Verwendung der e-Function elbildung nicht stehen, sondern zeigt auch, unter welchen ngen man eine allgemeine Function $\varphi(a)$ verwenden kann. — ıeliegende Verallgemeinerung des limite généralisée ist hier wegen bemerkenswert, weil man sie auch durch die Methode gen Paragraphen erhalten kann. Sie besteht darin, dass Stelle von $u(a, x)$ die Function

$$\psi_p(a,x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} + a\,(a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + a_{2p-1} x^{2p-1} + \frac{a^2}{2!}(a_{2p} x^{2p} + \cdots + a_{3p-1} x^{3p-1}) + \cdots$$

bildet und so das Integral $\int_0^\infty e^{-a} \psi_p(a_1 x)\, da$ erhält (Borel, A l'école norm., 1899, p. 72). Um diese Verallgemeinerung die frühere Methode zu erhalten, braucht man nur anstatt der $\lim_{a=\infty} \sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{a}{a+1}\right)^\nu a_\nu x^\nu$ die Reihe

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} + \left(\frac{a}{a+1}\right)(a_p x^p + \cdots + a_{2p-1} x^{2p} + \left(\frac{a}{a+1}\right)^2 (a_{2p} x^{2p} + \cdots + a_{3p-1} x^{3p-2}) + \cdots$$

zu betrachten. — Die Resultate Borel's sind endlich ein spe Fall der Resultate, welche G. Mittag-Leffler durch d nützung von n fach unendlichen Reihen und durch Einführu „Sternes" erhalten hat (Acta mathem., 23, 1900 p. 43, ff.; Gö Nachrichten, mathem.-phys. Cl. 1900, p. 194 ff).

Der Ausdruck (14) lässt sich außerdem noch von andern Gesichtspunkte aus betrachten, indem man zwei Fundam eigenschaften desselben berücksichtigt. Neben seiner einen schaft, dass durch ihn auch einer divergenten numerischen ein Grenzwert zugeordnet werden kann, besitzt er noc folgende:

Sind $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu$ und $\sum_0^\infty{}_\nu \varphi_\nu$ zwei „summierbare" Reihen, u

$$s_\nu = f_0 + f_1 + \cdots + f_\nu$$
$$s'_\nu = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_\nu,$$

so dass $\lim \text{gen}\, s_\nu = s$ und $\lim \text{gen}\, s'_\nu = s'$ ist, so erhält ma $\text{gen}\,(\alpha s_\nu + \beta s'_\nu) = \alpha \lim \text{gen}\, s_\nu + \beta \lim \text{gen}\, s'_\nu$, wo α und stante bedeuten. Diese zwei Eigenschaften haben mit dem i généralesée auch die gerade erwähnten Verallgemeinerunge selben gemeinsam; es gehören daher alle diese Functional- tionen in die Gruppe derjenigen, welche Pincherle als butive Functional-Operationen bezeichnet und in seiner Arbeit Ann. 49, p. 325) in allgemeiner Weise untersucht hat. Ins dere steht der limite généralisée, insofern man an Stelle de druckes (14) das ihm äquivalente Integral setzen kann, in

ung zu einer distributiven Functional-Operation, welche schon (Oevres, II, p. 67) verwendet. Abel transformiert nämlich

'unction $f(x)$ in ein Integral $f(x) = \int_0^\infty e^{ax} \varphi(a)\, da$ und be-

et f als die „fonction génératrice" der „fonction determi-de f^{α}, φ. Bei der geometrischen Reihe fällt nun die Borel'-'ransformation mit der Abel'schen zusammen; denn man hat

$$\frac{1}{1-x} = \int_0^\infty e^{ax} . e^{-a}\, da,$$

der reelle Theil von x kleiner ist als die Einheit. Die Be-g der Abel'schen Transformation zur Borel'schen Transfor-einer beliebigen Potenzreihe ergibt sich daraus, dass man rel'sche Transformation einer solchen Reihe auf die Trans-ion der geometrischen Reihe zurückführen kann (Borel, Ann. ole norm. 1899, p. 66, 67). Stellt man nämlich eine Func-urch das Cauchy'sche Integral dar, so hat man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(u)}{u} \left(1 + \frac{x}{u} + \frac{x^2}{u^2} + \cdots\right) du.$$

'ransformiert man jetzt die hier auftretende geometrische so erhält man

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(u)}{u} \left[\int_0^\infty e^{-a} \left(1 + a \cdot \frac{x}{u} + \frac{a^2}{2!} \frac{x^2}{u^2} + \cdots\right) da \right] du.$$

)ieses Integral existiert für alle Werte von x, für welche lle Theil von $\frac{x}{u} - 1$ kleiner ist als eine bestimmte nega-ihl $-\varepsilon$. Man hat dann $e^{a\left(\frac{x}{u} - 1\right)} < e^{-a\varepsilon}$ und daher

$$e^{-a} \left| u(a, x) \right| < k e^{-a\varepsilon}, \text{ wo } k = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(u)}{u} du$$

nstante Zahl bedeutet.

's existiert also für alle diese Werte von x auch die ung

$$(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-a} \left[\int_{(+C)} \frac{f(u)}{u} e^{\frac{ax}{u}} du \right] da = \int_0^\infty e^{-a} u(a, x)\, da.$$

es sind für alle Werte von x, für welche der reelle Theil kleiner ist als die Einheit, die beiden Integrale (19) und nander gleich. Somit kann die Borel'sche Transformation eliebigen Potenzreihe auch dadurch erhalten, dass man die

Coefficienten a_ν dieser Reihe durch das Integral $a_\nu = \int_{(+C)} \frac{f(u}{u^{\nu+}}$ darstellt und auf die so erhaltene geometrische Reihe die Abel Transformation anwendet. — In einer anderen Form hat Lapl die Beziehung zwischen der „fonction génératrice“ und der „ tion determinante“ derselben ausgedrückt und es kommt auch s bei ihm das Integral $\int_0^\infty e^{-a}\, u(a)\, da$ vor (Theorie analytique probabilités, 2. partie, chap. I, p. 90).

Da man die Borel'sche Transformation einer Potenzreihe die Transformation der geometrischen Reihe zurückführen l erhält man schließlich noch ein anderes Verfahren, um d directe Umformung einer Potenzreihe zum limite généralisée z langen. Jetzt kommt es nämlich zunächst darauf an, die ge trische Reihe in eine Reihe mit weiterem Geltungsbereich zu t formieren. Diese Aufgabe kann man lösen, indem man die metrische Reihe durch das Cauchy'sche Integral darstellt und eine neue Integrations-Veränderliche einführt. Es ist

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} \frac{1}{(1-u)(u-x)}\, du =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} \frac{1}{(1-u)u}\left(1+\frac{x}{u}+\frac{x^2}{u^2}+\cdots\right) du;$$

die Reihe unter dem Integral convergiert nur für die Werte x, für welche $|x| < |u|$. Nun handelt ss sich darum, dieses gral so zu transformieren, dass die unter dem Integrale auftre Reihe für Werte von x convergiert, die einem größeren Gelt bereiche angehören. Da die e-Reihe eine beständig conver Reihe ist, liegt es am nächsten, dieses Integral in ein solches der Form $\int e^{\varphi(a,x)}\, da$ zu transformieren; denn es ist die B gung, dass die Reihe unter dem Integrale convergiere, scho füllt, und es bleibt nur noch die Bedingung, dass das Int existiert und sein Wert gleich ist $\frac{1}{1-x}$. Diese Lösung ist noch unbestimmt, weil die Function $\varphi(a, x)$ und die Integra grenzen willkürlich sind. Jedoch erhält man eine Transform welche dieser Bedingung genügt, wenn man setzt

$$u = \frac{x - e^{\varkappa}}{1 - e^{\varkappa}},\quad \varkappa = 2\pi i . e^{a(x-1)},$$

wo a die neue Veränderliche bedeuten soll. Es ist dann:

$$\frac{du}{da} = \left(\frac{1}{1-e^{\varkappa}}\right)^2 [(-\varkappa)\, e^{\varkappa}\,(1-x)^2],\quad \frac{1}{(1-u)(u-x)} = \frac{(1-e^{\varkappa}}{-(1-x)}$$

laher

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)}\frac{du}{(1-u)(u-x)}=\int_{(+W)}e^{a(x-1)}\,da,$$

r Weg W noch zu bestimmen ist. Dieser ergibt sich jedoch aus der Bedingung, dass das Integral rechts gleich $\frac{1}{1-x}$ uss. Somit haben wir auch auf diesem Wege die Borel'sche ormation der geometrischen Reihe erhalten $\frac{1}{1-x}=\int_0^\infty e^{a(x-t)}\,da.$

ier aus kann man wegen des gerade früher erwähnten Zuenhanges zwischen der Transformation der geometrischen und der Transformation einer beliebigen Potenzreihe, zur ormation der letzteren übergehen, erhält das Integral $\int u(a,x)\,da$, das äquivalent ist der Reihe $\lim_{a=\infty} e^{-a}\sum_0^\infty{}_\nu \frac{a^\nu}{\nu!}s_\nu(x)$

ann von hier aus wiederum die schon bekannten Eigenen dieses Ausdruckes ableiten.

So sind wir ohne willkürlich erscheinende Definition zum généralisée gelangt, und es ist diese Lücke in Borel's Meausgefüllt; zugleich erscheinen mit Rücksicht auf die n-fach ichen Reihen die Methoden von Mittag-Leffler, Borel und öf unter einem einheitlichen Gesichtspunkte.[1])

) Wie man mittels der Methode der partiellen Summation den von Borel llten allgemeinen Typus der Mittelbildung auf Doppelreihen bezw. auf ch unendlichen Reihen Mittag-Leffler's zurückführen kann, wird in einer n Arbeit gezeigt werden. — Zugleich muss hier noch erwähnt werden, el in seinen Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901 wiesen hat, dass der Geltungsbereich der Reihe (14) nicht über das der Summierbarkeit hinausgeht; doch war es nicht mehr leicht möglich eweis erst nachträglich im Texte zu berücksichtigen.

nderabdruck aus Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. VIII. 3. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Stäckel, Paul.

arris Hancock, Lectures on the theory of maxima and minima of functions of several variables (Weierstrass' Theory). Publications of the University of Cincinnati, Series II, Vol. 2, Cincinnati 1903.

Mehr als zwanzig Jahre sind vergangen, seitdem Weierstraß die röffentlichung seiner *Vorlesungen über Variationsrechnung* ernstlich ins ıge faßte, aber noch immer ist sein Wunsch nicht in Erfüllung gegangen, d dunkel ist auch, wie jeder Kundige weiß, die Aussicht für die Zukunft. ücklicher Weise sind die originalen und fruchtbaren Gedanken, mit denen eierstraß die Variationsrechnung bereichert hat, nicht in der Verborgen- it geblieben. Die von dem Mathematischen Verein der Universität Berlin sorgte Ausarbeitung der Vorlesung vom Sommersemester 1879 hat weite rbreitung gefunden, und in einigen Dissertationen und Abhandlungen sind chtige Ergebnisse der Weierstraßschen Untersuchungen allen Mathematikern gänglich gemacht worden. Sie haben den Ausgangspunkt für weitere rschungen gebildet, durch die neuerdings so erhebliche Fortschritte erzielt rden, daß die Vorlesungen von Weierstraß bald wohl vorwiegend his- isches Interesse haben werden[1]). Wohl lediglich historisches, ja man mte fast sagen biographisches Interesse hat aber gegenwärtig das Kapitel er die Theorie der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren ränderlichen, das Weierstraß der eigentlichen Variationsrechnung voraus- chicken pflegte. Dieses Kapitel als „Weierstraßsche Theorie" zu be- chnen, wie es Herr Hancock tut, scheint mir nicht angebracht, denn eierstraß hat ausdrücklich hervorgehoben, daß er darin im wesentlichen die Ergebnisse älterer Autoren[2]) ableiten wolle, allerdings mittels der eigentümlichen Methoden. Wenn aber Herr Hancock damit ausdrücken l, daß er sich darauf beschränkt hat, die Weierstraßsche Vorlesung zu roduzieren, so ist das erst recht zu beanstanden. Wie Peano (1884) Scheeffer (1885) gezeigt haben, liefern jene von Weierstraß über- mmenen älteren Ergebnisse keineswegs eine befriedigende Lösung des blems der Maxima und Minima. Wer heute, wo die richtige Lösung eits in die Lehrbücher übergegangen ist (vergl. C. Jordan, *Cours nalyse*, 2me éd. t. I, Paris 1893, S. 381—384 und Kiepert-Stegemann, *ferential-Rechnung*, 9. Aufl. Hannover 1901, § 156) und wo die Ency- pädie der mathematischen Wissenschaften (Artikel Differential- und

1) Anders steht es wohl mit *Aufzeichnungen* von Weierstraß, die noch immer t veröffentlicht sind, weil sie sich im *„Privatbesitz"* befinden. Als ob nicht alles, was Weierstraß geschrieben hat, die mathematische Welt ein Anrecht e!

2) Zu diesen älteren Autoren gehört auch Richelot, dessen fundamentale andlung: *Bemerkungen zur Theorie der Maxima und Minima*, Astr. Nachr. 48 (1858) S. 274—288 Weierstraß gewiß benutzt hat. Heute ist sie in Ver- enheit geraten und wird sogar in der Encyklopädie der Mathematischen senschaften nicht erwähnt.

Integralrechnung von A. Voß[1])) in so bequemer Weise Auskunft gibt, e
Vorlesung über die Theorie der Maxima und Minima hält, und wer n
dazu, wie Herr Hancock in seiner Einleitung, seinen Zuhörern versprie
sie auf die Höhe der modernen Wissenschaft zu führen, der darf
Untersuchungen von Peano und Scheeffer, Stolz und v. Dantscher ni
unberücksichtigt lassen. So gern ich daher den Fleiß und die Sorg
anerkenne, mit der Herr Hancock die „Weierstraßsche Theorie" bearbe
hat, so wenig bin ich damit einverstanden, daß er blindlings auf die W
des Meisters schwört; nicht der ist ein treuer Schüler von Weierstr
wer kritiklos hinnimmt, was dieser gelehrt hat, sondern wer bemüht
nach seinen Kräften die Teile der mathematischen Wissenschaft zu förd
die dem Meister am Herzen lagen.

In diesem Sinne sei es mir gestattet, auf eine Stelle der Weierstraßsc
Vorlesung einzugehen, die der Berichtigung bedarf. Der Einfachheit hal
werde ich mich dabei auf zwei unabhängige Veränderliche beschränken
annehmen, die Funktion $z = f(x, y)$ sei nebst ihren ersten und zwei
Ableitungen p, q, r, s, t für die betrachteten Wertsysteme x, y eindeu
endlich und stetig. Daß unter diesen Voraussetzungen an der Stelle ei
Extremums die beiden ersten Ableitungen p und q verschwinden müs
hatte bereits Euler erkannt (Inst. calc. diff., 1755). Bald darauf
Lagrange (Misc. Taur. I. 1759) ein Kriterium für die Existenz ei
Maximums oder Minimums gegeben, das bis fast ans Ende des 19. Ja
hunderts als *endgültige* Erledigung der Frage gegolten hat. Er verfährt

Verschwinden p und q an der Stelle a, b, so ist in der Nähe:

$$(1)\quad f(a+h, b+k) - f(a,b) = \tfrac{1}{2} r(a+\vartheta h, b+\vartheta k)h^2 + s(a+\vartheta h, b+\vartheta k) + \tfrac{1}{2} s(a+\vartheta h, b+\vartheta k)k^2,$$

wo ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet, dessen Wert im allgemei
von h und k abhängt. Soll z an der Stelle a, b ein Maximum oder Minim
haben, so muß der Ausdruck auf der rechten Seite für alle Wertsysteme h
bei denen h und k absolut genommen kleiner sind als eine hinreich
kleine positive Größe ϱ, ausgenommen $h = 0$, $k = 0$, entweder stets pos
oder stets negativ ausfallen. Bedingungen hierfür zu finden, sagt Lagra
in der Darstellung, die er später in der *Théorie des fonctions analytiq*
gegeben hat, scheine sehr schwierig zu sein, da r, s, t Funktionen von h
k sind. „Aber ich bemerke, daß, wenn man $\vartheta = 0$ setzt, diese Funktio
unabhängig von h und k werden und bestimmte Werte erhalten. Man fin
dann, wie sich sogleich herausstellen wird, zwischen diesen Größen
dingungen und zwar lediglich Ungleichheiten für Ausdrücke, die aus ih
gebildet sind. Bestehen aber diese Ungleichheiten, so bleiben sie a
gültig für jene Funktionen, solange ϑh und ϑk gewisse Grenzen nicht üb
schreiten, diese Größen kann man jedoch beliebig klein machen." Um
Verhalten des Ausdruckes

$$(2)\qquad V = \tfrac{1}{2} r(a,b)\, h^2 + s(a,b)hk + \tfrac{1}{2} t(a,b)k^2$$

1) *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band II, Heft 1, Leip
1899, S. 82—87. Bei dieser Gelegenheit möchte ich einige Druckfehler ber
tigen, die sich auf diesen Seiten finden. S. 82, Anm. 125 muß es heißen C
diff. p. 645 statt 648, Anm. 126: Th. des fonct. p. 283 statt 263, S. 83, A
128: Th. des fonct. p. 286 statt 266 und Math. Ann. 35 statt Math. Ann. 37.

ıtersuchen, transformiert ihn Lagrange in die Summe von zwei Quadraten findet so als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß V beig negativ sein soll:

$$r < 0, \quad t < 0, \quad rt - s^2 > 0,$$

dafür, daß V beständig positiv sein soll:

$$r > 0, \quad t > 0, \quad rt - s^2 < 0.$$

diese Ungleichheiten erfüllt, ist also, um den modernen Ausdruck zu uchen, V eine *definite quadratische Form* von h und k, so hat, wie ·ange mit Recht schließt, z an der Stelle a, b ein Maximum oder num. Ebenso richtig ist auch sein Schluß, daß, wenn rt negativ oder ı Null und $rt - s^2$ negativ ist, wenn also die Form V *indefinit* aus- z an der Stelle a, b kein Extremum aufweisen kann. Wenn er aber r behauptet, daß

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r < 0, \quad t < 0, \quad rt - s^2 > 0$$

Bedingungen des Maximums,

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r > 0, \quad t > 0, \quad rt - s^2 > 0$$

Bedingungen des Minimums seien, so übersieht er die Möglichkeit, daß eterminante $rt - s^2$ verschwinden, also die Form V *semidefinit* sein kann. iesem Falle versagt die vorhergehende Deduktion, denn es ist alsdann glich, etwas über das Vorzeichen der Determinante der Form auszusagen, leich $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ ist. Ist V semidefinit, so bleibt es unentschieden, ob ein Extremum stattfindet oder nicht. Die einfachen iele:

$$z = x^2 + y^4 \text{ und } z = x^2 - y^4$$

ı, daß die Entscheidung nur gefällt werden kann, wenn man auch die er höherer Ordnung hinzunimmt.

Lagrange hat also richtig erkannt und bewiesen, daß ein Extremum ndet, wenn V eine definite quadratische Form ist, und daß kein mum stattfindet, wenn V eine indefinite quadratische Form ist. Inso- er übersehen hat, daß noch eine dritte Möglichkeit vorhanden ist, nämlich V auch semidefinit sein kann, haben seine Darlegungen *Lücke*, und die von ihm angegebenen Bedingungen sind zwar hinnd, aber nicht notwendig.

Sehen wir nun zu, was Weierstraß lehrt. Nachdem er die Gleichung ı aller Strenge hergeleitet hat, sagt er (Hancock, S. 39): „On account ir presupposed continuity, the quantities

$$r(a + \vartheta h, b + \vartheta k), \quad s(a + \vartheta h, b + \vartheta k), \quad t(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$$

$$r(a, b), \quad s(a, b), \quad t(a, b)$$

values of h and k taken sufficiently small, differ from each other as as we wish and are of the same sign; hence, with small values of h the functions

$$+ \vartheta h, b + \vartheta k)h^2 + s(a + \vartheta h, b + \vartheta k)hk + \tfrac{1}{2}t(a + \vartheta h, b + \vartheta k)k^2$$

and

$$\tfrac{1}{2}r(a,b)h^2 + s(a,b)hk + \tfrac{1}{2}t(a,b)k^2$$

have always the same sign, and we therefore may confine ourselves t investigation of the latter function."

Die Deduktion von Weierstraß beruht auf zwei *Hilfssätzen*, die so aussprechen lassen. Erstens. *Ist $F(h,k)$ eine in der Nähe der $0,0$ stetige Funktion, so hat in der Nähe von $0,0$ $F(h,k)$ dasselbe zeichen, wie $F(0,0)$.* Dieser Hilfssatz ist augenscheinlich nur richtig, $F(0,0)$ ein Vorzeichen hat, das heißt, wenn es von Null verschiede Ist aber $F(0,0)=0$, so läßt sich über das Vorzeichen von $F(h,k$ der Nähe der Stelle $0,0$ nichts aussagen. Mithin setzt Weierstraß schweigend voraus, daß die Größen

$$r(a,b), \quad s(a,b), \quad t(a,b)$$

alle von Null verschieden seien. Falls auch nur eine von ihnen verschwi versagt seine ganze Deduktion. Zweitens. *Ist*

$$W = A(h,k)h^2 + 2\,B(h,k)hk + C(h,k)k^2,$$

wo $A(h,k)$, $B(h,k)$ und $C(h,k)$ in der Nähe der Stelle $0,0$ stetig und sich für sie auf die von Null verschiedenen Werte A_0, B_0 un reduzieren, so haben W und die quadratische Form

$$W_0 = A_0h^2 + 2\,B_0hk + C_0k^2$$

für hinreichend kleine Werte von h und k dasselbe Vorzeichen. Daß d Hilfssatz *falsch* ist, zeigt das einfache Beispiel:

$$W = h^2 + 2\,hk + (1-k)k^2,$$

wo also

$$W_0 = h^2 + 2\,hk + k^2$$

wird, denn hier ist W_0 niemals negativ, während W für $h=-u^2, k=$ den negativen Wert $-u^6$ erhält; dabei darf u beliebig klein sein. zweite Hilfssatz ist allerdings richtig, wenn W eine definite quadrati Form ist, das bedarf aber eines Beweises, von dem sich bei Weierst keine Spur findet. Daß dieser geglaubt hat, der zweite Hilfssatz sei allge richtig, zeigen die Worte (Hancock, S. 51): „In order that a maxi and a minimum of the function $f(x,y)$ may in reality enter on the pos a, b, which is determined through the equations $p=0$, $q=0$, it is *neces* if the second derivatives of the function do not vanish at this posi that the aggregate of the terms of second degree be a *definite* quadratic fo denn diese Bedingung ist in Wahrheit nicht notwendig, sondern nur reichend.

Es ist auffallend, daß der kritische Scharfsinn von Weierstraß versagt hat; quandoque bonus dormitat Homerus.

Kiel. Paul Stäckel.

No. CCCCXVII.] NEW SERIES. [January, 1906.

THE

MESSENGER OF MATHEMATICS.

EDITED BY

J. W. L. GLAISHER, Sc.D., F.R.S.,
FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

VOL. XXXV.—NO. 9.

MACMILLAN AND CO.
London and Cambridge.
1906.

Price—One Shilling.

METCALFE AND CO. LIMITED, CAMBRIDGE.

The second term is less than a constant multiple of $\int_{A-\delta}^{A} \bar{\phi} dx$,
d may be made $< \sigma$ by taking δ small enough. Having
osen δ we can choose N_1, so that

$$\left| \sum_{N_1}^{N_2} \phi_n \right| < \sigma$$

: all values of x in $(a, A-\delta)$, and all values of $N_2 \geqq N_1$.

Then $$\left| \sum_{N_1}^{N_2} \int_a^A \phi_n f dx \right| < K\sigma,$$

ıere K is a constant. It follows that the series (3) is
nvergent. Hence

$$\sum_0^\infty \int_{A-\varepsilon}^{A} \phi_n f dx$$

convergent. Its modulus is plainly not greater than a
rtain constant multiple of

$$\int_{A-\varepsilon}^{A} \bar{\phi} dx,$$

d its limit for $\varepsilon = 0$ is zero. The theorem is accordingly
ablished.

§ 4. If, *e.g.*,

$$\phi(x) = (1-x)^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \quad a = 0, \ A = 1,$$

$$\phi_n(x) = \frac{\alpha.(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots n} > 0,$$

that $\phi(x) \equiv \bar{\phi}(x)$, and the conditions are satisfied. Thus,

$$\int_0^1 (1-x)^{-\alpha} f(x)\, dx = \Sigma \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)} \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

If $\alpha = \beta + i\gamma$, where $0 < \beta < 1$, ϕ and $\bar{\phi}$ are no longer
ntical. But it is easy to see that however small be the
itive quantity k,

$$|\alpha + \nu| < \beta + \nu + k$$

all values of ν after a certain finite value. Hence (after
nite number of terms),

$$|\phi_n(x)| < K \frac{(\beta+k)(\beta+k+1)\ldots(\beta+k+n-1)}{1.2\ldots n},$$

l so $$\bar{\phi}(x) < K(1-x)^{-\beta-k}.$$

We can choose k so that $\beta + k < 1$. Hence

$$\int_0^1 \bar{\phi}(x)\,dx$$

is convergent. The integration term by term is the still valid.

§ 5. An almost obvious generalisation is the follo *if* (i) *f is continuous in $(a, A-\varepsilon)$, and $\Sigma\phi_n$ uniformly vergent in $(a, A-\varepsilon)$, however small be ε, and* (ii) *the inte*

$$\int_a^A |f|\,\bar{\phi}\,dx$$

is convergent, then the integration term by term is permiss

Precisely similar reasoning leads to the result t (i) *f is continuous for all finite values of x,* (ii) *$\Sigma\phi_n$ is unif convergent in an arbitrary interval (a, A), and* (iii)

$$\int_a^\infty |f|\,\bar{\phi}\,dx$$

is convergent, then

$$\int_a^\infty f\Sigma\phi_n\,dx = \Sigma\int_a^\infty f\phi_n\,dx.$$

For example, take the case in which the lower limit $f = e^{-ax^2}$, and $\phi = \cos 2bx$, so that

$$\phi_n = \frac{(-)^n}{2n!}(2bx)^{2n}.$$

Here
$$\bar{\phi} = \sum^{\infty} \frac{(2bx)^n}{2n!} = \cosh 2bx,$$

and the conditions are obviously satisfied. If $f = e^{-ax}$, $\phi = c$ $\bar{\phi} = \cosh bx$, and the conditions are satisfied only if $a > b$ this case the integral series is

$$\Sigma \frac{(-)^n}{2n!} b^{2n} \int_0^\infty e^{-ax} x^{2n}\,dx = \Sigma\,(-)^n \frac{b^{2n}}{a^{2n+1}},$$

which is divergent if $b > a$. This last example would it appear that the limitations of the theorem are not u narrow.

ELEMENTARY STANDARD FORMS OF THE INTEGRAL CALCULUS.

By *T. J. I'a. Bromwich*, Queen's College, Galway.

1. It seems somewhat surprising that most of the English ext-books on the Integral Calculus give forms for the standard ntegrals

$$(\alpha)\ \int_0^a (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx, \qquad (\beta)\ \int_0^x (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx, \qquad (\gamma)\ \int^x (x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

hich are not wholly accurate.* The forms usually given are

$$(\alpha)\ \sin^{-1}(x/a), \quad (\beta)\ \sinh^{-1}(x/a), \quad (\gamma)\ \cosh^{-1}(x/a),$$

hich are only correct if a is positive for (α), (β), and if x/a positive for (γ).

As a matter of fact the formulæ should be

$$(\alpha)\ \sin^{-1}(x/|a|),$$

$$(\beta)\ \sinh^{-1}(x/|a|) = \log[\{x+(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\}/|a|],$$

$$(\gamma)\ \pm\cosh^{-1}(|x|/|a|) = \log[|x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}|].$$

ıere in (γ) the sign $\pm$ is to be the same as the sign of x.

Of course, in most applications of these forms the sign of a ı be foreseen, and it is then generally taken positively; but occasionally happens that the sign of a depends on other mbers, and in such cases errors may occur through not phasising the proper sign. Thus the integral

$$\int_0^a (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

uld be taken as $\sin^{-1}(1) = \frac{1}{2}\pi$ by the ordinary formula; but true value is $\sin^{-1}(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}\pi$, where the ambiguous sign he same as the sign of a.

It is often better to use the standard forms, of which the t is given by Stolz:

$$(\alpha)\ \tan^{-1}(x/y), \quad y=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(\beta)\ \tanh^{-1}(x/y), \quad y=(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(\gamma)\ \tanh^{-1}(y/x), \quad y=(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}.$$

---

* We assume that the square-roots are real and *positive*; and that the angles tween $-\frac{1}{2}\pi$ and $+\frac{1}{2}\pi$.

From (γ) we can infer the obvious corollary that $\int_0^\theta \sec\theta$ which is frequently given as $\cosh^{-1}(\sec\theta)$, should really be

$$\pm\cosh^{-1}(\sec\theta) = \tanh^{-1}(\sin\theta) = \log(|\sec\theta + \tan\theta|),$$

where θ lies between $-\frac{1}{2}\pi$ and $+\frac{1}{2}\pi$.

2. The standard forms referred to in § 1 will cover cases of the type

$$\int_{x_0}^{x_1} dx/y, \quad y^2 = ax^2 + 2bx + c$$

by applying a linear transformation to x; in many of ordinary calculations this method is as simple as any. it is sometimes more convenient to apply the formula

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y} = \frac{2}{\alpha}\tanh^{-1}\frac{\alpha(x_1 - x_0)}{y_1 + y_0}, \text{ if } a = \alpha^2 > 0;$$

$$\text{or } \frac{2}{\beta}\tan^{-1}\frac{\beta(x_1 - x_0)}{y_1 + y_0}, \text{ if } a = -\beta^2 < 0.$$

This result does not appear to have been given in a text-book, and it is not very easy to deduce from the previ formulæ; the following investigation is simple and straigt forward, although several other more or less obvious meth can easily be found.

Let $$t = \frac{x - x_0}{y + y_0},$$

then
$$y\frac{dt}{dx} = \frac{y}{y + y_0} - \frac{x - x_0}{(y + y_0)^2}\, y\frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{y}{y + y_0} - \frac{x - x_0}{(y + y_0)^2}(ax + b)$$

$$= \frac{yy_0 + axx_0 + b(x + x_0) + c}{(y + y_0)^2}.$$

Also

$$1 - at^2 = 1 - a\frac{(x - x_0)^2}{(y + y_0)^2} = 2\frac{yy_0 + axx_0 + b(x + x_0) + c}{(y + y_0)^2}.$$

Hence $$y\frac{dt}{dx} = \tfrac{1}{2}(1 - at^2),$$

so that

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{y} = 2\int_0^{t_1}\frac{dt}{1-at^2} = \frac{2}{\alpha}\tanh^{-1}(\alpha t_1), \text{ if } a = \alpha^2,$$

$$\text{or } \frac{2}{\beta}\tan^{-1}(\beta t_1), \text{ if } a = -\beta^2.$$

To illustrate the result take the following cases:

(i) $u = \int_0^1 dx/y, \quad y^2 = [1-(1-p^2)x][1-(1-q^2)x].$

Here $x - x_0 = 1$, $y + y_0 = 1 + pq$, taking p and q to be positive. Thus if $(1-p^2)(1-q^2)$ is positive,

$$u = \frac{2}{\sqrt{\{(1-p^2)(1-q^2)\}}}\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{\{(1-p^2)(1-q^2)\}}}{1+pq}\right),$$

$$= 2\omega/(p+q)\sinh\omega, \text{ where } \cosh\omega = (1+pq)/(p+q).$$

When $(1-p^2)(1-q^2)$ is negative, the hyperbolic functions are replaced by circular functions.

This result occurs in calculating the attraction between two halves of a homoeoid.

(ii) $u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}d\theta, \quad x = \cosh\alpha\cos\theta + \cosh\beta\sin\theta.$

If we write $\xi = \cosh\alpha\sin\theta - \cosh\beta\cos\theta,$

we get

$$\frac{d\xi}{d\theta} = x, \quad x^2 + \xi^2 = \cosh^2\alpha + \cosh^2\beta = 1 + A, \text{ say.}$$

Then $$u = \int_{-\cosh\beta}^{+\cosh\alpha}(A - \xi^2)^{-\frac{1}{2}}d\xi,$$

so that

$$\xi_1 - \xi_0 = \cosh\alpha + \cosh\beta, \quad y_1 + y_0 = \sinh\alpha + \sinh\beta,$$

taking α and β as positive.

Thus

$$u = 2\tan^{-1}[\coth\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)] = \pi - \tan^{-1}[\sinh(\alpha+\beta)].$$

(iii) $u=\int_{-1}^{+1} dx/y, \quad y^2=(1-2hx+h^2)(1-2kx+k^2).$

Then $y_1+y_0=|(1-h)(1-k)|+|(1+h)(1+k)|.$

Thus, if $|h|<1, \quad |k|<1,$

we have $y_1+y_0=2(1+hk).$

Hence we find

$$u=\frac{1}{l}\tanh^{-1}\left(\frac{2l}{1+l^2}\right)=\frac{2}{l}\tanh^{-1}(l), \quad \text{if } hk>0;$$

or $$\frac{1}{l}\tan^{-1}\left(\frac{2l}{1-l^2}\right)=\frac{2}{l}\tan^{-1}(l), \quad \text{if } hk<0,$$

where $l^2=|hk|$.

If $|h|$, or $|k|$, or both, should be greater than 1, t results will be altered; the general form is

$$(2/l)\tanh^{-1}(m) \text{ or } (2/l)\tan^{-1}(m),$$

where m is positive and less than 1, and m^2 is one of the fo expressions

$$|hk|, \quad |h^{-1}k|, \quad |hk^{-1}|, \quad |h^{-1}k^{-1}|.$$

This integral occurs in Legendre's method for findi $\int_{-1}^{+1} P_m(x)P_n(x)\,dx.$

(iv) The potential of a uniform rod, lying along the ax of z from $z=-a$ to $z=+a$, is proportional to

$$\int_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{[x^2+y^2+(z-\xi)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

So, applying our formula, we obtain Tait's result

$$2\tanh^{-1}\left(\frac{2a}{r_1+r_0}\right),$$

where $r_1^2=x^2+y^2+(z-a)^2, \quad r_0^2=x^2+y^2+(z+a)^2.$

The reader will find that in any of these examples t ordinary methods of integration do not lead very readily t results which are as simple as those given above.

3. It is not difficult to obtain a result similar to that 2 for the integral

$$u=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{ax^2+2bx+c}.$$

In fact, if $ac-b^2$ is positive and equal, say, to γ^2, we have

$$u=\frac{1}{\gamma}\left[\tan^{-1}\left(\frac{ax_1+b}{\gamma}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{ax_0+b}{\gamma}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\gamma}\tan^{-1}\left[\frac{\gamma(x_1-x_0)}{ax_1x_0+b(x_1+x_0)+c}\right].$$

The angle in this formula must lie between $-\pi$ and $+\pi$, a further condition is necessary to fix it precisely; in ctice the most satisfactory method is to see if u is positive negative, which can usually be settled by inspection; the le is then uniquely determined.

The result can also be put in the form*

$$u=\frac{1}{\gamma}\sin^{-1}\left[\frac{\gamma(x_1-x_0)}{y_1y_0}\right]$$

ase $ax^2+2bx+c$ is positive and equal to y^2. But in this it is less easy to fix the angle uniquely.

n case $ac-b^2$ is negative and equal to $-k^2$, we have, out ambiguity,

$$\frac{1}{k}\tanh^{-1}\left[\frac{k(x_1-x_0)}{ax_1x_0+b(x_1+x_0)+c}\right]=\frac{1}{k}\sinh^{-1}\left[\frac{k(x_1-x_0)}{y_1y_0}\right].$$

When $ac-b^2$ is negative, the roots of $ax^2+2bx+c=0$ are and may (one or both) fall within the interval (x_0, x_1). is happens the integral diverges, but its principal value is n by

$$\sinh^{-1}\left[\frac{ax_1x_0+b(x_1+x_0)+c}{k(x_1-x_0)}\right] \text{ or } \frac{1}{k}\tanh^{-1}\left[\frac{k(x_1-x_0)}{ax_1x_0+b(x_1+x_0)+c}\right],$$

rding as one or both of the roots are contained between x_0 x_1.

inally, in case $ac-b^2=0$, the expression

$$ax^2+2bx+c=(ax+b)^2/a;$$

---

* Because $y_1^2y_0^2=[ax_1x_0+b(x_1+x_0)+c]^2+\gamma^2(x_1-x_0)^2$.

and so $$u=\frac{1}{ax_0+b}-\frac{1}{ax_1+b}=\frac{x_1-x_0}{ax_1x_0+b(x_1+x_0)+c},$$

which is equal to the limit of either of the other results w γ (or k) is made to approach zero as a limit.

(i) As a first example, take Hermite's integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$$

Applying the formula we get $\frac{1}{2}$ when α is π; and genel

$$\frac{1}{\sin\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)=\frac{1}{2\sin\alpha}(2r\pi+\pi-\alpha),$$

where r is an integer. If we suppose α to lie betwee and 2π, there is no difficulty in seeing that (since the inte is always positive) we must take $r=0$, so that

$$\int_0^1 \frac{\sin\alpha\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\tfrac{1}{2}(\pi-\alpha),\quad 0<\alpha<2\pi.$$

(ii) Two similar integrals are given by

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2\pm 2x\cosh\alpha+1}.$$

Here we find, taking the + sign

$$\frac{1}{\sinh\alpha}\tanh^{-1}\left(\frac{\sinh\alpha}{1+\cosh\alpha}\right)=\frac{\alpha}{2\sinh\alpha}$$

without ambiguity. With the − sign the principal valu $\frac{1}{\sinh\alpha}\tanh^{-1}\left(\frac{1-\cosh\alpha}{\sinh\alpha}\right)=\frac{-\alpha}{2\sinh\alpha}$. Thus

$$\int_0^1 \frac{\sinh\alpha\,dx}{x^2\pm 2x\cosh\alpha+1}=\pm\tfrac{1}{2}\alpha.$$

(iii) Thirdly, take

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}=\int_0^1\frac{2dx}{(a-b)x^2+2cx+(a+b)}$$

where $x=\tan\frac{1}{2}\theta$. This is equal to

$$\frac{2}{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\left[\frac{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{a+b+c}\right],$$

ssuming that $a^2 > b^2 + c^2$. The angle will be positive or egative according to the sign of a. Similarly we find

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + c\sin\theta} = \frac{2}{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}} \tan^{-1}\left[\frac{(a^2-b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\right],$$

ıe sign of the angle being fixed by a as before. In particular, ·ith $c=0$, we find (if $a^2 > b^2$)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}} \tan^{-1}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}} \tan^{-1}\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{b},$$

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{\pm\pi}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}},$$

ıe sign of the angle being, in both cases,* the same as the gn of a.

(iv) As a fourth example take

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{a+b\cosh u} = 2\int_0^1 \frac{dx}{bx^2+2ax+b}, \quad (a>b>0),$$

here $x = e^{-u}$. This gives†

$$\frac{2}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}} \tanh^{-1}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}} \tanh^{-1}\frac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}.$$

---

* The determination of the sign is omitted in the ordinary text-books: and ually the extension of the results to cover the case when b is a pure imaginary is correctly given. If $b = ic$, we can write

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{a+ic\cos\theta} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a-ic\cos\theta}{a^2+c^2\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\infty} \frac{a\,dt}{(a^2+c^2)+a^2t^2} - \int_0^1 \frac{ic\,dx}{(a^2+c^2)-c^2x^2},$$

ıere $t = \tan\theta$ and $x = \sin\theta$. We then obtain the value

$$\frac{1}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\pm\frac{\pi}{2} - i\tanh^{-1}\frac{c}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

If the integral is taken between the limits 0 and π, the result is

$$\pm\pi/(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}},$$

ıere the sign is again the same as the sign of a. This case is of importance in pressing Legendre's coefficients as definite integrals.

† If b is a pure imaginary ($= ic$, say) we find by a process similar to that of the st footnote

$$\int_0^1 \frac{a\,dt}{(a^2+c^2)-a^2t^2} - \int_0^{\infty} \frac{ic\,dx}{(a^2+c^2)+c^2x^2},$$

ıere $t = \tanh u$ and $x = \sinh u$. These integrals give the value (c being positive)

$$\frac{1}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\tanh^{-1}\frac{a}{(a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\pi i}{2}\right].$$

4. The two last of the ordinary standard types are

$$u=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{(x-p)\,y}, \qquad v=\int_{x_0}^{x_1}\frac{(Px+Q)\,dx}{z^2 y},$$

where $y^2=ax^2+2bx+c$ and $z^2=a'x^2+2b'x+c'$.

We suppose that* in u *either* $x_1>x_0>p$ *or* $p>x_1>x_0$. It will be found that then

$$u=\frac{2}{q}\tanh^{-1}\left[\frac{(x_1-x_0)\,q}{y_0(x_1-p)+y_1(x_0-p)}\right], \quad \text{if } ap^2+2bp+c=q^2;$$

$$\text{or } \frac{2}{r}\tan^{-1}\left[\frac{(x_1-x_0)\,r}{y_0(x_1-p)+y_1(x_0-p)}\right], \quad \text{if } ap^2+2bp+c=-r^2.$$

We leave the proof to the reader, but it is probably easiest to take $(x-p)^{-1}$ as a new variable and then apply the formula of § 2 to the resulting integral. We could also apply the same transformation as in § 2, which gives

$$x=\frac{x_0+2y_0t+(ax_0+2b)\,t^2}{1-at^2}.$$

As an example, take

$$\int_0^\infty\frac{du}{a+b\cosh u}=\int_1^\infty\frac{dx}{(a+bx)(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (a>b>0),$$

where $x=\cosh u$. This gives

$$\frac{2}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}\tanh^{-1}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}},$$

as found in (iv) of § 3.

The integral v can be expressed as the sum of two integrals of the type u, when the factors of the quadratic $a'x^2+2b'x+c'$ are real; thus the only point of novelty occurs when these factors are *complex*. It is known† that then real numbers p, q,

---

* If p is between x_0 and x_1, the integral is divergent, but its principal value is easily found to be

$$\frac{2}{q}\tanh^{-1}\left[\frac{y_0(x_1-p)+y_1(x_0-p)}{(x_1-x_0)\,q}\right].$$

† See, for example, my forthcoming tract on *Quadratic Forms* (No. 3 of the Cambridge University Press Tracts).

The fact that A, B must have the same sign is evident because the roots of $=0$ are complex. This sign may be supposed positive without loss of generality.

B, λ, μ can be found such that

$$y^2 = A\lambda\,(x-p)^2 + B\mu\,(x-q)^2,$$

$$z^2 = A\,(x-p)^2 + B\,(x-q)^2,$$

A, B will be positive.

Thus the integral v can be divided into two others

$$v_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-p)\,dx}{yz^2}, \quad v_2 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-q)\,dx}{yz^2},$$

hat $$v = Lv_1 + Mv_2,$$

re L, M are constants and are easily expressed in terms of Q and p, q. If $(x-q)/z$ is introduced as a new independent iable in v_1 (and $(x-p)/z$ in v_2) it will be found that the nula of § 2 gives

$$(p-q)\,v_1 = -\frac{2}{[B(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}}} \tan^{-1}\frac{[B(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}}[(x_1-q)z_0-(x_0-q)z_1]}{y_1z_0+y_0z_1},$$

$$(p-q)\,v_2 = \frac{2}{[A(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}}} \tanh^{-1}\frac{[A(\lambda-\mu)]^{\frac{1}{2}}[(x_1-p)z_0-(x_0-p)z_1]}{y_1z_0+y_0z_1},$$

ming* that λ is greater than μ.

The special case given by $b=0$, $b'=0$ has some interest; ıay be regarded as the limit of the last case when $p=0$, q tends to ∞, while B tends to zero and Bq^2 to c'. ıce, or by a direct calculation, we find

$$= \frac{2}{k\gamma} \tanh^{-1}\frac{k\,(x_1z_0 - x_0z_1)}{\gamma\,(y_1z_0+y_0z_1)}, \quad \int\frac{x\,dx}{yz^2} = \frac{2}{k\alpha} \tan^{-1}\frac{k\,(z_1-z_0)}{\alpha\,(y_1z_0+y_0z_1)},$$

re $$y^2 = ax^2 + c, \quad z^2 = a'x^2 + c',$$

$$k^2 = ac' - a'c, \quad \alpha^2 = a', \quad \gamma^2 = c'.$$

f $ac'-a'c$ is negative ($=-l^2$), k must be replaced by l the circular and hyperbolic functions interchanged.

The case $\lambda=\mu$ can only occur when y^2 is a mere multiple of z^2, because the atic form z^2 is necessarily positive. The indefinite integral is then algebraic, form $(Rx+S)/z$.

NOTE ON THE SOLUTION OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS OF DEFINITE INTEGRALS.

By *H. Bateman.*

In the standard methods for solving linear differential equations by means of definite integrals it is assumed that the integral which represents a solution of the equation can be differentiated under the integral sign. Now it is possible to satisfy a linear differential equation by means of an integral which cannot be differentiated by the rule of Leibnitz, but which can be integrated.

The method to be adopted is as follows: Let $P_x(w) = 0$ be a linear differential equation of the nth order, and suppose that two functions $f(x, t)$, $F(x, t)$ and a second differential equation $Q_t(v) = 0$ have been found such that

$$P_x(f) \equiv Q_t(F).$$

If T is an integrating factor of the equation $Q_t(v) = 0$, the integral which we consider is

$$w = \int_c f(x, t)\, T dt.$$

Assuming first that this can be differentiated n times, we find that

$$P_x(w) = \int_c P_x(f)\, T dt = \int_c Q_t(F)\, T dt.$$

Now $Q_t(F)\, T$ is a perfect differential dV. Accordingly if the path of integration is chosen so that V takes the same value at each end, we shall have $P_x(w) = 0$, and one solution of the equation is known.

Next, suppose that the integral can only be differentiated m times, but on the other hand can be integrated $n - m$ times. We then integrate the identity

$$P_x(f) = Q_t(F)$$

$n - m$ times, and transform each term by integrating by parts so as to remove as many of the high differential coefficients as is necessary. We shall finally obtain an equation of the form

$$R_x(f) = Q_t\{\iiint F dx\, dx\} = Q_t(\phi),$$

where R_x is an operator consisting partly of integrations and partly of differentiations, the integrations will in general not act on f alone, but on f multiplied by some function of x.

Now operate on the integral $\int_c f(x, t)\,T dt$, assuming that ll the operations can be effected, then

$$R_x(w) = \int_c R_x(f)\,T dt = \int_c Q_t(\phi)\,T dt = \int_c dW.$$

The boundary condition which we have to satisfy is now lightly different; assuming that a suitable path has been hosen we shall have

$$R_x(w) = 0.$$

Differentiating this $n - m$ times so as to get rid of the ntegrations, we return to the original equation $P_x(w) = 0$. Accordingly, the quantity w is a solution.

By way of illustration I shall consider the equation

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dw}{dx} + xw = 0,$$

which is satisfied by the functions $J_0(x)$ and $K_0(x)$. It can asily be verified that*

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + x\right)\sin(x\cosh t) = \frac{d}{dt}\{\sinh t\cos(x\cosh t)\}.$$

Now it is by no means easy to choose a real path of ntegration which will satisfy the boundary condition

$$\{\sinh t\cos(x\cosh t)\}_1^2 = 0,$$

nd at the same time allow the integral $\int \sin(x\cosh t)\,dt$ to be ifferentiated,† but if we integrate the above equation twice, btaining the identity

$$x\sin(x\cosh t) - \int \sin(x\cosh t)\,dx + \iint x\sin(x\cosh t)\,dx$$
$$= -\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\cos(x\cosh t)\right\},$$

t is easy to see that the boundary condition is satisfied by aking the limits $t = 0$ and $t = \infty$. Thus we obtain the olution

$$w = \int_0^\infty \sin(x\cosh t)\,dt,$$

which can be identified† with $\frac{\pi}{2}J_0(x)$.

---

* This result is obtained at once from the general formula for the Laplace ransformation. See Forsyth's *Differential Equations*, p. 224.

† The conditions can be satisfied by taking the limits to be 0 and $i\pi$.

‡ Whittaker's *Analysis*, Ex. XII., p. 306. The above integral is indeterminate n the vicinity of $x = 0$, but so long as we do not integrate through this point our ethod will be legitimate.

THE POWER SERIES FOR $\sin x$, $\cos x$.

By *Prof. E. J. Nanson.*

THE power series for $\sin x$, $\cos x$ follow at once from the two inequalities

$$\sin x \text{ lies between } S_n,\ S_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\cos x \text{ lies between } C_n,\ C_{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

where
$$S_n = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$C_n = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(2n-2)!},$$

and, as is well known, these two inequalities are readily derived from the rules for differentiating $\sin x$, $\cos x$. But as Professor Hill has recently (*Messenger*, Vol. XXXV., pp. 58–69) called attention to the importance of simplifying the trigonometrical proofs of (1), (2), and has shown how to extend Le Cointe's proof of (1) for the case $n=1$ so as to obtain a general proof of (1), (2), so long as x is acute it may not be amiss to show how the older and simpler method of proving (1) for the case $n=1$ by making use of Euler's product can also be extended to prove (1), (2) for all angles less than four right angles.

In the first place it is readily shown that (1) follows from (2) for all real values of x. For if there are m angles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, we have

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \ldots = 2^{-m} \Sigma \cos(\pm\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots).$$

Hence, according as

$$\cos x \gtrless a_0 + \Sigma a_r x^{2r},$$

we have
$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \ldots \gtrless a_0 + \Sigma a_r S_r,$$

where
$$S_r = 2^{-m} \Sigma (\pm\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots)^{2r}.$$

Now take $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ to be $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \frac{x}{2^3}, \ldots, \frac{x}{2^m}$. Then we have

$$S_r = \frac{2x^{2r}}{2^{m(2r+1)}} t_r,$$

ere t_r is the sum of the $2r$th powers of the odd numbers
om 1 to 2^m-1, so that

$$t_r=\frac{1}{2r+1}\,\frac{2^{m(2r+1)}}{2}(1+\epsilon),$$

ere ϵ can be made as small as we please by taking m large
ough.

Thus we have

$$S_r=\frac{x^{2r}}{2r+1}(1+\epsilon).$$

Again, since

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}},$$

ollows that

$$\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}\gtrless a_0+\Sigma\frac{1}{2r+1}a_r(1+\epsilon)x^{2r},$$

ording as

$$\cos x\gtrless a_0+\Sigma a_r x^{2r}.$$

Now take

$$a_r=\frac{(-1)^r}{(2r)!},\quad r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

l make m infinite, and we see that (1) follows from (2).

In the next place, as shown by Professor Hill, if (1) is
nted it follows that $\cos x$ lies between C_{n+1}, C_{n+2} provided x
cute. But as a matter of fact the proof applies if x lies
ween zero and four right angles. To show this, let

$$U_n=u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n,$$

h similar formulæ for V, v, W, w, and let

$$w_r=u_1v_r+u_2v_{r-1}+\ldots+u_rv_1,$$

n it is readily seen that

$$\begin{aligned}(-1)^n(U_nV_n-W_n)&=u_2v_n+u_3(v_{n-1}-v_n)+u_4(v_{n-2}-v_{n-1}+v_n)+\ldots\\&\quad+u_n\{v_2-v_3+v_4-\ldots+(-1)^nv_n\}.\end{aligned}$$

Hence it follows that, if, for $r>1$, u_r is positive and $v_r>v_{r+1}$, or v_r is positive and $u_r>u_{r+1}$, then $U_nV_n-W_n$ is positive or negative according as n is even or odd. Now if u_r, v_r are both positive it follows that $U_{n+1}\gtrless U_n$, $V_{n+1}\gtrless V_n$, and therefore also $U_{n+1}V_{n+1}<U_nV_n$ according as n is even or odd. Hence

$$W_n,\ U_nV_n,\ U_{n+1}V_{n+1},\ W_{n+1}$$

are in order of magnitude. Thus if U lies between U_n, U_{n+1}, and V between V_n, V_{n+1}, it follows that UV lies between W_n, W_{n+1} provided that for $r>1$ u_r, v_r are positive, and either $u_r>u_{r+1}$ or $v_r>v_{r+1}$.

Taking $U_n=V_n=S_n$, it follow from (1) that $\sin^2x$ lies between W_n, W_{n+1}, where

$$W_n=w_1-w_2+w_3-\ldots+(-1)^{n-1}w_n,$$

$$w_r=x^{2r}\Sigma\,\frac{1}{(2p-1)!\,(2q-1)!},$$

Σ denoting summation for

$$p+q=r+1,\quad p=1,\ 2,\ \ldots,\ r,$$

so that

$$w_r=\frac{2^{2r-1}x^{2r}}{(2r)!}.$$

Hence, using the formula $\cos 2x=1-2\sin^2x$ and replacing $2x$ by x, it follows from (1) that $\cos x$ lies between C_{n+1}, C_{n+2}.

For the applicability of the process it is necessary that $x^2<20$, or with the final and altered value of x that $x^2<80$ or $x<8.9$, and this is satisfied if $x<2\pi$. Since, then, it is known that (1), (2) are true when $n=1$ for all real values of x, it follows by induction that (1) and (2) are true when $0<x<2\pi$.

Melbourne,
October 24th, 1905.

Über trigonometrische Reihen.

Von Josef Heckel.

Die von Fourier so genannten trigonometrischen Reihen, d. h. die Reihen der Form:

$$\sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots$$

len in demjenigen Teile der Mathematik, wo ganz willkürliche Funktionen kommen, eine ganz bedeutende Rolle; ja es läßt sich mit Grund behaupten, die wesentlichsten Fortschritte in diesem Teile der Analysis, der besonders die Physik wichtig ist, von der vollständigen Einsicht in die Natur dieser hen abhängig gewesen ist.

d'Alembert befaßte sich als erster mit der Lösung der Differentialgleichung die Schwingung gespannter Saiten, die ihn auf solche periodische Funktionen rte. Nach ihm beschäftigte sich Euler mit demselben Thema und gab in Berliner Abhandlungen vom Jahre 1748 diesen d'Alembertschen Arbeiten neue Darstellung, in welcher er die Bedingungen, denen die obigen Funkien genügen müssen, richtiger erkannte. In den „Mémoires de l'académie Berlin" 1753 erschien eine dritte von diesen beiden ganz verschiedene Bedlung desselben Gegenstandes von Daniel Bernoulli, die sich auf Beobtungen und Sätze stützte, die seinerzeit Taylor in seinem Werke „de hodo incrementorum" veröffentlicht hatte. Auch Lagrange trat nun als ter an das Problem heran, das er von einem ganz anderen Gesichtspunkte behandelte, und glaubte schließlich die Möglichkeit beweisen zu können, auch eine analytisch gegebene periodische Funktion sich nicht immer durch trigonometrische Reihe darstellen lasse. Bei all diesen Lösungen mußten ner noch Bedingungen aufgestellt und Beschränkungen geltend gemacht den und fast ein halbes Jahrhundert verging, ohne daß in der Frage über analytische Darstellbarkeit willkürlicher Funktionen ein wesentlicher Fortritt gemacht worden wäre.

Erst Fouriers Arbeiten über die Wärme im Jahre 1807 brachten neue ichtspunkte und eine neue Epoche in der Entwicklung dieses Teiles der hematik begann, die sich auch bald äußerlich in großartigen Erweiterungen mathematischen Physik kund tat. Es war ihm gelungen, eine irgendwie ebene Funktion in einer Reihe darzustellen, welche nach trigonometrischen ktionen der Vielfachen fortschreitet, und die einzelnen Koeffizienten a_n b_n zu berechnen.

Doch da drängten sich vorerst folgende Fragen auf:

1. Stellt die nach dem gefundenen Gesetze dargestellte Reihe die Funktio auch wirklich dar?

2. Welche Eigenschaften muß eine solche Funktion haben, damit sie sic nach dem vorgeschriebenen Gesetze entwickeln lasse?

3. Ist die Entwicklung eindeutig?

4. Wann ist eine solche Reihe konvergent, d. h. welche Koeffizienter eigenschaften müssen erscheinen, damit Konvergenz stattfinde?

Nach Fouriers Meinung sind diese Reihen überhaupt konvergent un deshalb trat er gar nicht einmal erst an diese Frage näher heran. Im Jahre 182 erbrachte der französische Mathematiker Cauchy einen Beweis für die Kor vergenz einer Sinusreihe, deren Koeffizienten alle eine gleich große Konstant sind. Das Verhältnis der Glieder dieser Reihe zu denen der Fourierschen wic um so weniger von der positiven Einheit ab, je weiter die Glieder in der En wicklung standen, und so schloß er aus der Konvergenz seiner Reihe auf d Konvergenz der Fourierschen. Diese falsche Schlußweise erkannte Dirichl sofort und wurde gerade durch dieselbe auf seine späteren Überlegungen un Schlüsse geführt.

Er veröffentlichte im Jahre 1829 im Crelleschen Journal, Band IV, ein Abhandlung, in der für Funktionen, die durchgehends eine Integration zulasse und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, die Frage ihrer Da stellbarkeit durch trigonometrische Reihen in aller Strenge entschieden wurd Er erkannte ferner auch, daß fast alle Sätze der Analysis reeller Funktione mit der Theorie der trigonometrischen Reihen in einem innigen Zusamme hange stehen.

Ganz unabhängig von Dirichlet veröffentlichte Professor Dirksen i Berlin eine Abhandlung „über die Konvergenz einer nach Sinussen und Cos nussen der Vielfachen fortschreitende Reihe". W. Thomson und P. G. Ta brachten dann in dem Handbuche für theoretische Physik einen neuen Bewe für die Konvergenz der Fourierschen Reihe, der jedoch nicht auf strenge Schlußfolgerungen aufgebaut ist. Nach Dirichlet bearbeiteten Riemann, Lip schitz, Cantor und Heine die Fragen der Konvergenz der Fourierschen Reih und der eindeutigen Darstellbarkeit einer Funktion durch eine Fouriersche Reih

---

Die Form der Fourierschen Reihe wird von ihm selbst angegeben al

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots,$$

deren Koeffizienten sich durch die Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\,dx \text{ und } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

bestimmen lassen.

Vor allem ist nun die Konvergenz der obigen Reihe nachzuweisen und
r erbrachte Heine in seinem Aufsatze „Über trigonometrische Reihen"
Borchardts Journal, Band LXXI, einen klaren und deutlichen Beweis.
nüpfend an den von Weierstraß ausgesprochenen Satz, daß das Integral
konvergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrationsgrenzen
ich bleiben, nur dann gleich der Summe der einzelnen Glieder ist, wenn
Reihe nicht nur konvergiert, sondern in gleichem Grade konvergiert, weist
e nach, daß der Satz: „Eine zwischen $x = +\pi$ und $x = -\pi$ gegebene
iche Funktion $f(x)$ läßt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische
e von der Form:

$$(x) = \frac{1}{2} b_0 + (b_1 \cos x + a_1 \sin x) + (b_2 \cos 2x + a_2 \sin 2x) + \ldots$$

ickeln", hinfällig geworden sei und durch die Arbeiten von Dirichlet,
hitz und Riemann sei daher nur festgestellt worden, daß eine Funktion
x in einer Anzahl von Fällen sehr allgemeiner Natur sich in eine Reihe von
obigen Form, deren Koeffizienten bekannt sind, entwickeln lassen, aber
auf wieviele Arten diese Entwicklung geschehen könne.

Die Bedeutung, welche der Darstellung einer Funktion durch eine trigono-
ische Reihe bisher zukam, beruhte zum großen Teile in der Einheit der
icklung, also in der Sicherheit, dieselbe Reihe zu finden, auf welchem
man auf die Funktion in die Reihe transformieren mochte. Er vertauscht
den vorstehenden Satz mit einem anderen, der die Einheit der Entwicklung
rherstellt und für mancherlei Bedingungen ausreicht.

Eine leichte Überlegung zeigt zwar, daß eine Reihe von der obigen Form
welche gleich einer diskontinuierlichen Funktion ist, selbst wenn sie
ch bleibt, unmöglich in gleichem Grade konvergieren kann; es ist aber
nicht bekannt, daß oder vielmehr ob eine Reihe, welche eine kontinuier-
Funktion darstellt, in gleichem Grade konvergieren muß, was man wohl
hweigend angenommen hat. Hierüber sowie über die ähnliche Frage
en Fall noch anderer endlich bleibender Funktionen gibt der folgende Satz
hluß, zu dessen Beweis man die wesentlichsten Elemente in Dirichlets
unter Arbeit findet:

I. Satz: Die Fouriersche Reihe für eine endliche Funktion $f(x)$, die eine
che Anzahl Maxima und Minima besitzt, d. h. diejenige ganz bestimmte
von der Form

$$x) = \frac{1}{2} b_0 + (b_1 \cos x + a_1 \sin x) + (b_2 \cos 2x + a_2 \sin 2x) + \ldots,$$

elcher

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin m x \, dx \text{ und } \pi b_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos m x \, dx$$

ist, konvergiert in gleichem Grade, sobald $f(x)$ kontinuierlich von $-\pi$ inklusive $+\pi$ und $f(\pi) = f(-\pi)$ ist. In allen anderen Fällen ist sie nur allgemeinen in gleichem Grade konvergent. Der Ausdruck im allgemein wird hier und im folgenden gebraucht, wenn die Ausnahme sich auf eine endlic Anzahl von Punkten bezieht. Die Ausnahmsstellen im obigen Satze sind übrige leicht anzugeben, sie sind nämlich die Umgebungen der Unstetigkeitspunkte insoferne die Unstetigkeiten in diesen Punkten nicht durch Abänderung der Funktion fortgeschafft werden können — und außerdem $x = \pm\pi$, we nicht $f(\pi) = f(-\pi)$ ist.

Durch diesen Satz ist der Weg angebahnt, auf welchem man von d unbewiesenen Satze an der Spitze zu einem sicheren gelangen kann. Das geschie zwar sofort, wenn man den Schlußworten desselben noch die Bedingung hinz fügt „die in gleichem Grade konvergiert", er würde aber zu enge sein, weil seine Bedeutung schon verliert, wenn es sich nicht gerade um eine kontinui liche Funktion handelt, für die noch außerdem $f(\pi) + f(-\pi)$, weil wie ob bemerkt wurde, in den anderen Fällen keine einzige in gleichem Grade k vergente Entwicklung existiert.

Wir vertauschen diesen Satz mit folgendem Satz II: „Eine im all meinen stetige, nicht notwendig endliche Funktion $f(x)$ läßt sich höchst auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form:

$$f(x) = \frac{1}{2} b_0 + (b_1 \cos x + a_1 \sin x) + (b_2 \cos 2x + a_2 \sin 2x) + \ldots .$$

entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im allgemein in gleichem Grade zu konvergieren. Die Reihe stellt die Funktion im gemeinen von $-\pi$ bis $+\pi$ dar". Der Schluß dieses Satzes bedarf noch ei Erläuterung: Entwickelt man eine gegebene endliche Funktion in eine F rierschе Reihe, so kann man darauf verzichten, daß die Reihe die gegeb Funktion genau darstellt; an den Stellen der Diskontinuität gibt sie bekanntli einen gewissen Mittelwert.

Die nächste Frage würde nun sein, ob diejenige Funktion, welche gen gleich der Fourierschen Reihe ist, auch noch genau durch eine andere trigo metrische Reihe von der obigen Form dargestellt werden kann. Der zwe Satz gibt nun das Resultat an, wenn auf die Übereinstimmung in diesen u noch in irgendwelchen anderen Punkten in endlicher Anzahl verzichtet wi

III. Satz: Der zweite Satz kann auch in folgender Weise dargestellt geda werden, in welcher er bewiesen werden soll:

„Soll eine trigonometrische Reihe $f(x)$ von $(-\pi)$ bis $(+\pi)$ im allgemein im gleichen Grade konvergieren und im allgemeinen Null darstellen, wo nicht vorausgesetzt wird, daß sie da, wo sie nicht verschwindet, einen endlich Wert behält, so müssen alle Koeffizienten a und b verschwinden, und die Re stellt daher überall 0 vor".

Zum Beweise des III. Satzes schicken wir einige Definitionen voraus: $G_2 \ldots Gm$ heißt konvergent, wenn von einem angebbaren Werte n an für s wachsende Werte von n die Summe $G_n + G_{n+1} + \ldots + G_{n+m}$ er jede beliebig gegebene von 0 verschiedene Größe ε herabsinkt, welche itiven Werte man dem m auch geben möge. Hängen die Glieder G von einer änderlichen x ab, welche alle Werte von α bis β (inklusive α und β) durch-'en darf, so heißt die Reihe innerhalb dieser Grenzen in gleichem Grade vergent, wenn das Kriterium der Konvergenz für jedes gegebene ε, während lle Werte durchläuft, durch dasselbe n erfüllt wird; für n hat man erst dann n anderen Wert zu nehmen, wenn ein anderes ε gegeben ist.

Im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Umgebung gewisser Punkte, gleichen Grade konvergent von α bis β nennen wir eine Reihe, welche das terium der gleichmäßigen Konvergenz auf der ganzen Linie von α bis β llt, nachdem man aus derselben vorher beliebig viele kleine Stücke aus-hieden hat, welche die erwähnten Punkte einschließen. Ob die Reihe an kritischen Punkten selbst konvergiert oder divergiert, ist hierbei durchaus rheblich, es konvergieren z. B. die Fourierschen Reihen für die endlichen ıktionen mit endlichen Sprüngen auch an den Sprungstellen und sie sind noch unmöglich in gleichem Grade konvergent.

In der Tat, es sei x_0 ein solcher kritischer Punkt, so stellt in demselben Reihe, welche im allgemeinen $f(x)$ ist, wie man weiß, das arithmetische tel aus $f\ x_0 + 0)$ und $f(x_0 - 0)$ dar; es ändert sich also bei der geringsten lerung von x an der Stelle x_0 [es handelt sich hier nur um sehr kleine Dif-nzen $(x - x_0)$], die Fouriersche Reihe um mehr als eine endliche Größe δ, che kleiner ist als der Wert von $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$.

Setzt man nun für ε einen aliquoten Teil von d, z. B. $\varepsilon = 0{\cdot}01\, d$ und mt an, daß für dieses ε ein festes n existiert, so besteht ein Widerspruch. erseits ändert sich nämlich die unendliche Reihe $G_1, G_2, \ldots$, wie oben bemerkt de, um mehr als d; an beiden Stellen unterscheidet sich aber, nach der nahme, die unendliche Reihe von der Summe der ersten n Glieder höchstens ε; folglich ändert sich diese unendliche Summe $G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n$, wenig man auch das x ändert, wenigstens um $\delta - 2\varepsilon$. Andererseits kann ı x so wenig ändern daß jedes Glied G sich höchstens um den $n$ten Teil ε, also die endliche Reihe $G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ sich höchstens um ε ver-ert, was mit dem Resultate, daß die Änderung wenigstens $d - 2\varepsilon$ beträgt, ıt übereinstimmt.

Es ist zunächst zu beweisen, daß eine trigonometrische Reihe, wenn sie allgemeinen konvergiert, zu denen gehört, bei welchen die Glieder für jeden rt von x zuletzt unendlich klein werden, wie der Ausdruck von Riemann r trigonometrische Reihen lautet. Es ist nur nötig, dies gesondert für eine und eine *sin*-Reihe zu zeigen; denn die Summe oder Differenz zweier in

gleichem Grade konvergenten Reihen ist gleich einer Reihe von derselb Eigenschaft und da x die Werte von $-\pi$ bis $+\pi$ durchläuft, so sind die Reih mit den $n$ten Gliedern:

$$b_n \cos nx + a_n \sin nx \text{ und } b_n \cos nx - a_n \sin nx$$

nach unserer Annahme beide im allgemeinen gleichmäßig konvergent.

Um nun zu zeigen, daß in der Kosinusreihe:

$$\frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots$$

das b_n mit wachsendem n unter jede gegebene noch so kleine Größe ε her sinkt, scheiden wir die kritischen Punkte aus. Es sei nachher $\overline{pq}$ irgend zusammenhängendes Stück, so daß, wenn man x nur Werte gibt, die $\overline{pq}$ gehören, die Reihe dort in gleichem Grade konvergiert, also n so groß genomm werden kann, daß für dieses und die größeren n alle der Strecke $\overline{pq}$ an hörenden x das Glied $b_n \cos nx$ kleiner als ε machen. Ist nun n so groß, d $\frac{\pi}{n} < \overline{pq}$, so wird für wenigstens einen Grenzwert von m sicher $x = \frac{m\pi}{n}$ die Linie $\overline{pq}$ fallen, also $b_n \cos nx$, d. h. b_n unter ε liegen müssen. Ähnl verhält es sich mit der Sinusreihe. Zum Beweis hat man hier $x = \frac{2m+1}{2n}$ zu setzen.

Nach diesen Bemerkungen wird es genügen den dritten Satz gesond für eine *sin*- und dann für eine *cos*-Reihe zu erweisen. Es sei die Sinusrei $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$ im allgemeinen im gleichen Gra konvergent und 0. x_0, x_1, $x_2 \ldots x_\tau$ sollen der Größe nach geordnet 0, π u die positiven Abszissen der kritischen Punkte darstellen, wobei es gleichgült ist, ob x_0 und x_τ, d. h. 0 und π zu diesen gehören oder nicht. Kritische Punk heißen die, in welchen die Reihe entweder nicht verschwindet, oder in der Umgebung sie nicht im gleichen Grade konvergiert.

Bedeutet σ irgendeine ganze Zahl von 1 bis τ, so ist es erlaubt, wenn m die Gleichung: $\Sigma a_n \sin nx = 0$ nach x integriert, und die Integrationsgrenz zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ eingeschlossen sind, das Integral der Summe mit d Summe der Integrale zu vertauschen. Man hat daher

$$\Sigma a_n \frac{\cos nx - \cos nz}{n} = 0,$$

wenn z irgendeine Konstante bedeutet, die ebenso wie x zwischen $x_{\sigma-1}$ u x_σ liegt. Es ist nicht gestattet, die vorstehende Reihe in die Differenz zwei Teile aufzulösen, von welchen der eine nur x enthält, der andere nur z, da nic bewiesen ist, daß jeder Teil für sich konvergiert. Die Reihe konvergiert ab ebenso wie die, aus welcher sie durch Integration entstanden ist, solange x inn halb seiner Grenzen bleibt, in gleichem Grade. Daher kann man bei einer zweit

ıtegration zwischen denselben Grenzen die Summation auf die Integration ılgen lassen. Hiedurch entsteht:

$$\Sigma a_n \left(\frac{\sin\ n\,x - \sin\ n\,z}{n^2} - (x - z)\,\frac{\cos\ n\,z}{n} \right) = 0.$$

ie Glieder a_n nehmen mit wachsendem n zu Null ab, es sind daher die Reihen it den $n$ten Gliedern $a_n \frac{\sin n\,x}{n^2}$, $a_n \frac{\sin n\,z}{n^2}$ unbedingt (absolut) konvergent ıd es folgt aus der früheren Gleichung, daß auch die Reihe mit dem n ten liede $a_n \frac{\cos n\,z}{n}$ konvergent und gleich einer Konstanten ist, die k oder elmehr k_σ heißen soll. Setzt man $\Sigma a_n \frac{\sin n\,x}{n^2} = F(x)$ und bedeutet dann ıch c_σ eine Konstante, so hat man daher:

$$F(x) = \Sigma a_n \frac{\sin\ n\,x}{n^2} = c_\sigma + x\,k_\sigma \quad (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma).$$

Nachdem so die Form der Funktion $F(x)$ gefunden wurde, handelt es ch um die Bestimmung der Konstanten c und k, zu der wir die erforderliche ınzahl von Gleichungen erhalten, wenn wir von zwei verschiedenen Gesichts- ınkten ausgehen.

a) Erst sieht man ein, daß die vorstehende Gleichung, da $F(x)$ eine absolut ınvergente Reihe ist und die rechte Seite eine lineare Funktion von x ist, noch r die Grenzen $x = x_{\sigma-1}$ und $x = x_\sigma$ selbst gilt. Man erhält daher an sämt- ıhen $\tau + 1$ Punkten x_0, x_1, x_2 ... x_τ für $F(x)$ Doppelgleichungen, nämlich + 1), von der Form:

$$F(x_\sigma) = c_\sigma + x_\sigma\,k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma\,k_{\sigma+1} \quad (0 < \sigma < \tau)$$

ıd für

$x_0 = 0$ und $x_\tau = \pi$ ... $F(x_0) = 0 = c_1$ und $F(x_\tau) = 0 = c_\tau + \pi\,k_\tau$.

veitens kann man sich des Satzes bedienen, den Riemann aufgestellt hat, ch welchem $\frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha}$ stets mit α unendlich klein rd. Setzt man hier x_σ für x, so liegt $(x + \alpha)$ bei positiv genommenem α ischen x_σ und $x_{\sigma+1}$, dagegen $(x - \alpha)$ zwischen $x_{\sigma-1}$ und x_σ. Man hat daher:

$$F(x_\sigma + \alpha) = c_{\sigma+1} + (x_\sigma + \alpha)\,k_{\sigma+1}$$
$$F(x_\sigma - \alpha) = c_\sigma + (x_\sigma - \alpha)\,k_\sigma$$
$$2F(x_\sigma) = (c_\sigma + x_\sigma\,k_\sigma) + (c_{\sigma+1} + x_\sigma\,k_{\sigma+1})$$

d nach Substitution dieser Werte nach Riemanns Satz $k_\sigma = k_{\sigma+1}$.

Da nunmehr gefunden ist, daß alle k gleich sind, so folgt aus dem ersten ile, daß alle c gleich, also gleich $c_1 = 0$ werden. Hieraus ergibt sich, indem $+ \pi\,k_\tau = 0$, daß $k_\tau = 0$; also alle $k = 0$, ebenso wie alle c. Es verschwindet her die absolut konvergente Reihe: $F(x) = \Sigma a_n \frac{\sin n\,x}{n^2}$ für alle x von

0 bis π, so daß alle a verschwinden und somit der Teil des dritten Satzes, welche sich auf die Sinusreihen bezieht, erwiesen ist.

Der dritte Satz soll nun auch für eine Kosinusreihe:

$\frac{1}{2} b_0 + \Sigma b_n \cos nx \ldots n > 0$ bewiesen werden, wobei die Buchstaben z, σ, τ c, k eine ähnliche Bedeutung für die Kosinusreihe haben, wie im vorigen Teil für die Sinusreihe. Man setze ferner:

$$F(x) = \Sigma b_n \frac{\cos nx}{n} \ldots n > 0.$$

Eine zweimalige Integration verschafft, wenn x und z zwischen $x_{\sigma-1}$ und x liegen, die Gleichung:

$$\frac{1}{4} b_0 (x-z)^2 - \Sigma b_n \left(\frac{\cos nx - \cos nz}{n^2} + \frac{x-z}{n} \sin nz \right) = 0,$$

also $$F(x) = c_\sigma + x k_\sigma + \frac{1}{4} b_0 x^2 \ldots (x_{\sigma-1} < x < x_\sigma).$$

Diese Gleichung muß auch noch an den Grenzen x_σ und $x_{\sigma-1}$ gelten, so daß man wiederum ein System von Gleichungen erhält $c_\sigma + x_\sigma k_\sigma = c_{\sigma+1} + x_\sigma k_{\sigma+1} \ldots (0 < \sigma < \tau)$. Wie oben ergibt sich: $k_1 = k_2 = \ldots = k_\tau$ und hieraus $c_1 = c_2 = \ldots c_\tau$, also von $x = 0$ bis $x = \pi : F(x) = c + kx + \frac{1}{4} b_0 x^2$, wo c und k dieselben Konstanten im ganzen Intervalle bezeichnen.

Um diese zu bestimmen, bemerke man, daß die Reihe für $F(x)$ absolut konvergiere, daß also die Gleichung besteht:

$$\frac{b_n}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{n^2 \pi} \left(\frac{\pi}{2} b_0 \cos nx - 2k \sin^2 \frac{n\pi}{2} \right).$$

Setzt man den gefundenen Wert von b_n in die gegebene Kosinusreihe ein, über sieht man sofort, daß sie nicht konvergiert, während sie doch im allgemeinen die Summe 0 haben soll, wenn nicht alle b_0 und k, folglich alle b verschwinden. Wodurch der Beweis des Satzes gegeben ist.

Durch die Arbeiten von Dirichlet steht fest, daß eine stetige Funktion $f(x)$, die für alle reellen Werte von x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ willkürlich gegeben ist, die ferner nur eine angebbare Anzahl mal vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, innerhalb dieses Intervalles durch eine Fouriersche Reihe dargestellt werden kann, d. h. durch eine trigonometrische Reihe:

$$\frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots,$$

in welcher die Koeffizienten a und b die Werte besitzen

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

illt eine Bedingung fort — die der Stetigkeit nämlich, nicht aber die der End-hkeit — und ist die Funktion von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$, die Grenzen $-\pi$ id $+\pi$ mit eingeschlossen, willkürlich gegeben, so stellt die Reihe nur inso-rn $f(x)$ dar, als man auf eine Übereinstimmung der Reihe mit der Funktion der endlichen Anzahl der Unstetigkeitsstellen und in den Punkten $\pm\pi$ ver-chtet. Die Reihe nimmt nämlich, nach Dirichlets Beweis, für jedes x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ den völlig bestimmten Wert:

$$\frac{1}{2}\Big[f(x+0)+f(x-0)\Big]$$

ı und

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$$

r $x = \pm\pi$, wenn man durch $f(x \pm 0)$ die Grenze bezeichnet, welcher $f(x \pm z)$ ıstrebt, während die positive Größe z sich der 0 nähert.

Dirichlets Methode reicht auch hin zu zeigen, daß in demselben Sinne e Reihe noch gleich Funktion $f(x)$ wird, wenn die Funktion noch dazu an nzelnen Stellen ins Unendliche geht, vorausgesetzt, daß $\int f(x)\,dx$ endlich ıd kontinuierlich von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ bleibt. Ferner ist auch die Reihe demselben Sinne gleich der Funktion, wenn $f(x)$ in der Umgebung einzelner ınkte unendlich oft vom Wachsen zum Abnehmen übergeht und umgekehrt, ler, wie man sich auszudrücken pflegt, unendlich viele Maxima und Minima ıt. Der Ausdruck „in der Umgebung" ist hier wie üblich so zu fassen, daß an die betreffenden Punkte durch beliebig kleine, festzuhaltende Stücke ein-hließt. Außerhalb dieser Stücke soll die Zahl der Maxima und Minima endlich eiben.

Die Untersuchungen über den Wert, welchen dann die Reihe in den kri-schen Punkten selbst darstellt, hat den Scharfsinn der Mathematiker beschäftigt. ie völlig kontinuierliche Funktion $f(x)$, welche zwischen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ eichgesetzt wird $x\cos\frac{1}{x}$, für $x = 0$ aber, wo $x\cos\frac{1}{x}$ keine Bedeutung hat, eich 0 genommen wird, läßt sich in eine Fouriersche Reihe entwickeln, e offenbar, da sie eine Sinusreihe gibt, für $x = 0$ Null gibt, also im kritischen ınkte die Funktion selbst darstellt. Lipschitz findet ferner Gattungen von ınktionen, welche, obgleich sie in einem Punkte unendlich viele Maxima und inima haben, der Reihe nach in dem kritischen Punkte gleich bleiben. Anderer-its hat du Bois-Reymond eine kontinuierliche Funktion von x mit unendlich elen Maxima und Minima in eine trigonometrische Reihe entwickelt, die an en kritischen Stellen mit ihr übereinstimmt, die nämlich dort unendlich wird.

Riemann sagt, daß die bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand den weck hatten, die Fouriersche Reihe für die in der Natur vorkommenden Fälle ı beweisen. Und in der Tat, indem die Methode von Dirichlet nicht einmal

voraussetzt, daß die Funktion $f(x)$ differentiiert werden kann, hat man hi Funktionen von einer Allgemeinheit betrachtet, die für diesen Zweck erschöpfen schien. Es mag dahingestellt bleiben, ob in der Natur die diskontinuierliche Funktionen wirklich vorkommen, oder ob die mathematische Theorie d Physik sie nur einführt, indem sie Annahmen macht, welche dem wirkliche Sachverhalt angenähert zu entsprechen scheinen, und mathematische Au gaben stellt, welche sie den wirklich vorkommenden Problemen assimilier Untersucht man z. B. den Wärmezustand eines Körpers, dessen Begrenzun fortwährend in einer gegebenen Temperatur erhalten wird, so läßt die mathe matische Theorie zu, daß die anfängliche Erwärmung eines Punktes auf de Oberfläche sich von der eines beliebig nahen, nicht auf der Oberfläche liegende Punktes um eine endliche Größe unterscheidet, nimmt also eine völlige Di kontinuität an.

Während sich infolge einer Bemerkung von Dirichlet die Aussicht eröffne seine Resultate auch auf allgemeinere Funktionen übertragen zu können, s schien andererseits die Anwendung der Fourierschen Reihen auf das Äußerst beschränkt werden zu müssen, nachdem der Begriff der „Konvergenz i gleichem Grade" aufgetreten war. Man wußte nicht einmal, ob eine periodische völlig kontinuierliche Funktion $f(x)$ mit einer endlichen Anzahl Maxima un Minima immer eine Fouriersche Reihe gibt, welche im gleichen Grade konvergiert während eine endlich bleibende Funktion, bei der nicht $f(\pi) = f(-\pi)$, ode die nicht überall kontinuierlich ist, eine Fouriersche Reihe liefert, die siche nicht im gleichen Grade konvergiert. Bedeutet $\psi(x)$ eine zwischen 2 Grenze α und β kontinuierliche Funktion, so dürfte man daher selbst in einfache Fällen, welche „in der Natur vorkommen", nicht schließen, es sei:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\psi(x)\,dx = \frac{1}{2}\,b_0 \int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx + \sum_1^\infty n \int_\alpha^\beta (b_n \cos nx + a_n \sin nx)\,\psi(x)\,dx$$

Damit fällt aber ein wesentlicher Teil des Wertes fort, den die Entwicklun einer Funktion in eine trigonometrische Reihe hat.

Die Fouriersche Reihe für eine jede endliche Funktion, die nur eine end liche Anzahl Maxima und Minima und Unterbrechungen der Stetigkeit besitzt konvergiert im allgemeinen im gleichen Grade, nämlich mit Ausnahme de Unstetigkeitspunkte und insofern nicht $f(\pi) = f(-\pi)$ der Punkte $\pm\pi$. De früher übliche Beweis dafür, daß eine Funktion höchstens auf eine Art in ein trigonometrische Reihe, d. h. in eine Reihe von der Form $\Sigma b_n \cos nx + a$ $\sin nx$ entwickelt werden könne, war aber durch die erwähnten Umständ hinfällig geworden, der Satz selbst aber ist jetzt durch neue Methoden bewiesen Die Feststellung zweier Punkte ist hiezu erforderlich:

1. Ist nachzuweisen, daß 0 nur dann durch eine immer konvergente tri gonometrische Reihe dargestellt werden kann, wenn alle a und b Null sind

2. ergibt sich als Vervollständigung der Satz, daß die Koeffizienten selbst
nn noch 0 sind, wenn man auch für eine endliche Anzahl Werte von x auf
Konvergenz der Reihe oder darauf verzichtet, daß die Summe der Reihe
ich Null ist. Der erste von diesen beiden Sätzen war früher nur unter der
raussetzung bewiesen, daß die trigonometrische Reihe der Bestimmung
terworfen wird, wenigstens im allgemeinen in gleichem Grade zu konvergieren.

Den zweiten Satz leitete Cantor in der Arbeit des 71. Bandes aus dem
ten durch eine Methode ab, die erlaubte, ihn in allen Fällen auszusprechen,
welchen der erste gilt, nämlich indem er den zweiten von zwei Lehrsätzen
rwendete, welche Riemann im § 8 seiner Abhandlungen aufgestellt hat, wo-
rch er zum erstenmal nach Dirichlets Arbeiten die Untersuchungen über
gonometrische Reihen in neuere Bahnen lenkte. Er gründet auch darauf
nen allgemeinen Beweis des ersten Satzes auf den ersten Satz von Riemann
der erwähnten Stelle.

Setzt man $c_n = a_n \sin nx + b_n \cos nx$ und soll die trigonometrische
ihe $c_0 + c_1 + c_2 + \ldots$ für alle Werte von x die Null darstellen, macht man
ner

$$\frac{1}{2} c_0 x^2 + F(x) = c_1 + \frac{c_2}{2^2} + \ldots + \frac{c_n}{n^2} + \ldots$$

folgt aus dem ersten Lehrsatze von Riemann unmittelbar, daß der Differential-
otient

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha\alpha}$$

t α zu Null konvergiert.

Der zweite Satz von Riemann besagt, daß der Quotient

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

t α zu Null konvergiert, auch wenn die vorliegende Reihe $c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$
$c_n + \ldots$ nicht die Null darstellt.

Mit Hilfe eines Satzes, den Cantor aufgestellt und Schwarz bewiesen hat,
h welchem eine Funktion, wenn sie den hier geltenden Stetigkeit bedingungen
terworfen ist und wenn ihr zweiter Differentialquotient für jedes x gleich
ll wird, vom ersten Grade sein muß, schließt Cantor aus dem ersten Lehrsatz
n Riemann, daß auch in dem von ihm behandelten allgemeinen Falle $F(x)$
e Funktion ersten Grades sei. Hieraus folgt sogleich die Einheit der Ent-
klung von Null in dem Falle des oben angegebenen ersten von den beiden
rsätzen.

Die Theorie der trigonometrischen Reihen wird hier nur so weit behandelt,
die Methoden zur Beleuchtung ähnlicher Untersuchungen für die Kugel-
ktionen dienen und die gewonnenen Resultate für uns von Wichtigkeit sind.

Nur ein positives Resultat soll noch hervorgehoben werden, welches d Herren Ascoli und du Bois-Reymond gewonnen haben, indem sie den Bewe lieferten, daß eine Funktion, wenn sie eine Integration und die Entwicklu in eine trigonometrische Reihe zuläßt, nur in eine Fouriersche Reihe entwicke werden kann, daß also die Koeffizienten dann auch durch

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ cos\ n\,x\ d\,x \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ sin\ n\,x\ d\,x$$

gegeben werden. Eine Grenze der Freiheit, welche man einer Funktion lasse kann, ohne daß sie aufhört die Entwicklung in eine trigonometrische Reihe z gestatten, hat sich trotz der Bemühungen hervorragender Gelehrter nicl ergeben, was durch die große Allgemeinheit des Funktionsbegriffes erklärlich is

Im folgenden handeln wir von der Summierung der Fourierschen Reil und über die Art ihrer Konvergenz.

Setzt man in der Reihe

$$\frac{1}{2}\,b_0 + b_1\ cos\ x + b_2\ cos\ 2x + \ldots + a_1\ sin\ x + a_2\ sin\ 2x + a_3 sin\ 3x + .$$

für a und b ihre Ausdrücke:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ cos\ n\,x\ d\,x \quad \text{und} \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ sin\ n\,x\ d\,x$$

ein, wodurch sofort alle Funktionen $f(x)$ ausgeschlossen werden,welche kei Integration zulassen, so verwandelt sich

$$s_n = \frac{1}{2}\,b_0 + b_1 cos\ x + b_2 cos\ 2x + \ldots + b_n cos\ nx + a_1 sin\ x + \\ + a_2 sin\ 2x + \ldots + a_n\ sin\ nx$$

in den Ausdruck:

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\beta)\,\frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(\beta - x)}{sin\ \frac{1}{2}\,(\beta - x)}\,d\,\beta.$$

Dieser geht nach Substitution von $\beta - x = 2\,\alpha$ über in

$$s_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{+\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2\alpha)\,\frac{sin\,(2n+1)\,\alpha}{sin\ \alpha}\,d\,\alpha.$$

Man sucht die Summe s der unendlichen Reihe, d. h. die Grenze s, der ch s_n nähert und fragt, ob s_n sich dem s in gleichem Grade nähert, was auch sei. Wird $s = f(x)$ so stellt die unendliche Reihe die Funktion $f(x)$ dar.

Wir leiten nun folgenden Satz ab:

1. Satz: Bezeichnet $f(x)$ eine endliche integrable Funktion, welche zwischen $-\pi$ und $+\pi$ nicht unendlich oft vom Wachsen ins Abnehmen übergeht und cht unendlich viele Unstetigkeiten besitzt, so ist die Grenze s von s_n für $n = \infty$

$$s = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \quad \text{wenn} \quad -\pi < x < +\pi$$

nd ferner

$$s = \frac{1}{2}[f(\pi-0) + f(-\pi+0)], \quad \text{wenn} \quad x = \pm\pi.$$

2. Satz: Unter den gleichen Bedingungen kann man n so groß nehmen, aß $s - s_n$ kleiner bleibt als jede gegebene feste Größe, während x die Werte wischen $-\pi$ und $+\pi$ durchläuft, die Grenzen $\pm\pi$ eingeschlossen. Dadurch, aß man n so groß nimmt, kann man die Differenz $(s - s_n)$ noch kleiner machen. an zieht aus ihnen die Folgerungen:

1. Folgerung: So lange $f(x)$ kontinuierlich zwischen $-\pi$ und $+\pi$ bleibt, t die Reihe gleich $f(x)$ und zwar im gleichen Grade konvergent. Ist $f(x)$ in nzelnen Punkten diskontinuierlich, so gilt im allgemeinen, d. h. mit Ausschluß er Umgebung dieser Punkte dasselbe. Die Punkte $x = \pm\pi$ verhalten sich ie die Punkte der ersten oder zweiten Art, je nachdem $f(\pi)$ gleich oder nicht leich $f(-\pi)$ ist.

2. Folgerung: Besitzt $f(x)$ in der Umgebung einzelner Punkte $x_1, x_2, x_3 \ldots$ nendlich viele Maxima oder Minima, so bleibt noch immer der erste und zweite atz bestehen, wenn man beliebig kleine endliche Strecken ausschließt, mit enen man jene Punkte umgibt, und x keinen solchen Wert erteilt, der in diesen aum fallen würde. Gleiches gilt, wenn $f(x)$ in einzelnen Punkten $x_1, x_2 \ldots$ nendlich wird, aber nur von der Art, daß $(x - x_1)^{\nu_1} f(x)$, $(x - x_2)^{\nu_2} f(x) \ldots$ ir $x = x_1, x_2, \ldots$ endlich bleibt und ν feste, positive Zahlen unter 1, also $< \nu < 1$ sind. Auch diese Folgerung, die man in bezug auf die Maxima und linima mit einer noch weiter gehenden — Strecken statt der Punkte betreffend — ertauschen könnte, bedarf keines eigentlichen Beweises, sondern ergibt sich nmittelbar aus den Elementen der Integralrechnung. Bezeichnet man durch eine endliche Funktion mit einer endlichen Anzahl Maxima und Minima, ie mit f überall, außer in der Umgebung der Punkte $x_1, x_2 \ldots$, übereinstimmt, o gelten nämlich die beiden Sätze, wenn man f mit φ vertauscht; wird aber, enn man $f - \varphi$ für f setzt, beliebig klein, indem die Funktion unter dem ntegrale $f(x + 2\alpha) - \varphi(x + 2\alpha)$ sich nur in sehr kleinen Intervallen von ull unterscheidet, nämlich für solche Werte von α, für welche $(x + 2\alpha)$ in

die Umgebung kritischer Punkte fällt. Nach der Voraussetzung, daß x kein kritischer Punkt sei, wird in der Umgebung von $\alpha = 0$ die Differenz

$$f(x+2\alpha) - \varphi(x+2\alpha) \text{ sicher Null, also } \frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin n\alpha} < \frac{1}{\sin\alpha}$$

überall endlich, nach Vertauschung von f mit $f - \varphi$ für jedes n beliebig klein also die Grenze von s_n beliebig nahe dem im ersten Satze angegebenen Werte

Nach diesen Bemerkungen wird es auch im folgenden überflüssig sein derartige Ausnahmen, die in Punkten eintreten, zu erörtern.

Um den Beweis der beiden Sätze zu liefern, untersuchen wir die Ausdrücke:

$$A = \int_0^h \psi(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha \text{ und } B = \int_0^h \psi(\alpha) \cos n\alpha\, d\alpha,$$

in welchen ψ eine Funktion von α bezeichnet, welche wie $f(x+2\alpha)$ einen Parameter x enthalten möge, in denen h eine feste, reelle, endliche Zahl und ebenso n eine reelle, ganze oder gebrochene Zahl bezeichnet. Während des Beweises denken wir uns h und n positiv. Zuerst sei $\psi(\alpha)$ endlich und für keinen Wert des Parameters x größer als die feste Zahl γ. Diese Annahme ist hier wesentlich; nur zur Bequemlichkeit wird vorläufig angenommen, daß $\psi(\alpha)$ an den Grenzen 0 und h für α das positive Zeichen hat und nicht zunimmt, so daß $\psi(0) = \gamma$. Man setze ferner $\frac{\pi}{2n} = \delta$. Man zerlege A in eine Summe von Integralen zwischen den Grenzen 0 und δ, δ und $3\delta \ldots$ allgemein $(2m-1)\delta$ und $(2m+1)\delta$, schließlich $(2\mu+1)\delta$ bis h, wo μ eine solche Zahl bezeichnet, daß $(2\mu+1)\delta \leqq h \leqq (2\mu+3)\delta$. Das letzte Integral ist absolut genommen kleiner als $2\gamma\delta$, das erste kleiner als $\gamma\delta$. Jedes der übrigen hat die Form:

$$\int_{(2m-1)\delta}^{(2m+1)\delta} \psi(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha = \int_{(2m-1)\delta}^{2m\delta} \psi(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha + \int_{2m\delta}^{(2m+1)\delta} \psi(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha,$$

sind δ_1 und δ_2 positive Größen, welche δ nicht übersteigen, so werden die beiden Integrale auf der rechten Seite respektive gleich:

$$-\frac{1}{n}\psi(2m\delta - \delta_1) \cos m\pi,\ \frac{1}{n}\varphi(2m\delta + \delta_2) \cos m\pi,$$

das Integral auf der linken Seite also kleiner als

$$\frac{1}{m}[\psi(2m-1)\delta - \psi(2m+1)\delta],$$

hieraus folgt

$$\int_{\delta}^{(2m+1)\delta} \psi(\alpha) \sin n\alpha\, d\alpha < \frac{1}{n}[\psi(0) - \psi(h)] < \frac{\gamma}{n}$$

und fügt man noch das erste und letzte Integral hinzu

$$A < \frac{\gamma}{n}\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ oder } nA < \gamma\varepsilon,$$

ε eine endliche, von der Beschaffenheit unserer Funktion unabhängige Größe ämlich $1+\frac{3\pi}{2}$) bezeichnet.

Indem man das Resultat auf diese Art ausspricht, bleibt es noch gültig, nn man ψ von den oben unwesentlich genannten Beschränkungen befreit; s geschieht nach dem Muster von Dirichlets Arbeit über die trigonometrischen ihen. Zunächst bleibt das Resultat bestehen für den Fall, daß $\psi(\alpha)$ eine nstante γ sei, ferner wenn $\psi(\alpha)$ auch negativ wird. Ist dann noch immer γ r größte Zahlenwert von $\psi(\alpha)$, so wird $\gamma+\psi(\alpha)$ positiv sein und statt $\psi(\alpha)$ A, eingesetzt das Resultat ergeben:

$$n\int_0^h [\gamma+\psi(\alpha)]\, sin\, n\alpha\, d\alpha < \gamma\varepsilon,$$

ε eine endliche Größe bezeichnet. Hieraus ergibt sich derselbe Satz, wenn ch ψ sein Zeichen wechselt. Vertauscht man ψ mit $(-\psi)$, so erhält man s gleiche Resultat für eine immer wachsende Funktion. Da ferner offenbar ch für ein Integral

$$\int_k^h \psi(\alpha)\, sin\, n\alpha\, d\alpha \quad 0<n<h$$

sselbe gilt, auch wenn ψ zwischen 0 und h mehrfach (p mal) vom Abnehmen n Wachsen übergeht und umgekehrt, man A in eine Reihe von $(p+1)$ rartigen Integralen zerlegen kann, so daß in jedem ψ nur wächst oder nur nimmt (respektive konstant bleibt), so wird jetzt $nA<(p+1)\gamma\varepsilon$. Setzt n wieder $nA<\gamma\varepsilon$, so ist jetzt unter ε wieder wie früher eine endliche Größe verstehen. Jetzt ist sie aber nicht völlig unabhängig von ψ, sondern enthält en Faktor $(p+1)$, welcher anzeigt, wieviel größte und kleinste Werte ψ itzt. Diese Zahl ist nach Annahme endlich und da ähnliche Betrachtungen B das gleiche Resultat ergeben, so hat man den

3. Satz: „Ist $\psi(\alpha)$ endlich und für jeden Wert des Parameters x kleiner γ, besitzt ferner $\psi(\alpha)$ von $\alpha=0$ bis $\alpha=h$ eine endliche Anzahl Maxima d Minima, so bleiben die Integrale

$$n\int_0^h \psi(\alpha)\, sin\, n\alpha\, d\alpha \text{ und } n\int_0^h \psi(\alpha)\, cos\, n\alpha\, d\alpha$$

ter $\gamma\varepsilon$, wo γ den absolut größten Wert von $\psi(\alpha)$ und ε eine endliche Zahl leutet, die sich nicht mit dem Parameter x ändert."

Zweitens möge ψ an einer Stelle, und zwar für $\alpha=0$ unendlich werden, ch nur so, daß $\alpha^\nu\psi(\alpha)$ endlich bleibt, wenn ν eine positive Zahl bezeichnet, lche 1 nicht übersteigt (also $0<\nu\leqq 1$). Ferner soll ψ nur Maxima und nima in endlicher Zahl enthalten.

Man führe für ψ eine immer endliche Funktion φ ein, indem man $\psi(\alpha)=\alpha^\nu\varphi(\alpha)$, $(0<\nu\leqq 1)$ setzt, wo φ den Parameter x enthalten wird, und

bezeichne nunmehr den größten Wert, den $\varphi(\alpha)$ von $\alpha = 0$ bis $\alpha = h$ für alle annehmen kann, durch γ. Es wird vorausgesetzt, daß es ein bestimmtes γ gi

Man zerlege A in die Summe zweier Integrale $\left(\frac{m}{n} < h\right)$ also:

$$A = \int_0^k \psi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \int_0^{\frac{m}{n}} \psi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha + \int_{\frac{m}{n}}^h \psi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha.$$

Auf das zweite Integral der rechten Reihe, in welchem $\psi(\alpha)$ endlich bleib läßt sich der dritte Satz anwenden. Dort ist aber statt γ, dem größten We von $\psi(\alpha)$, zu setzen der größte Wert von $\alpha^{-\nu}\varphi(\alpha)$, d. h. γmal der $-\nu$ t Potenz des kleinsten Wertes von α, d. h. $\gamma\left(\frac{n}{m}\right)^\nu$.

Hieraus geht hervor, daß:

$$A - \int_0^{\frac{m}{n}} \psi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha < \frac{\varepsilon\gamma}{m^\nu . n^{1-\nu}},$$

multipliziert man noch mit $n^{1-\nu}$, so entsteht

$$(n^{1-\nu})\left[\int_0^h \varphi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha - \int_0^{\frac{m}{n}} \varphi(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha\right] < \frac{\varepsilon\gamma}{m^\nu},$$

wo ε und γ feste, und nicht von m, n oder dem Parameter x in φ abhängi Größen sind.

Für m nehme man keine feste, sondern eine mit n zugleich beweglic Zahl (m braucht ebensowenig wie n eine ganze Zahl sein), die mit n, ab schwächer als diese, ins Unendliche wächst, so nämlich, daß $\frac{m}{n}$ unendlich kle wird, dies geschieht z. B. wenn man $m = \sqrt{n}$ setzt. Alsdann sinkt die rech Seite unter jeden Grad der Kleinheit herab, und zwar in gleichem Grade f jeden Parameter x, d. h. es läßt sich x so groß nehmen, daß der Ausdruck a der linken Seite für jedes x und dasselbe n unter einer beliebig gegebenen Grö bleibt. Hier gewinnt man also das Resultat, daß die Grenze von

$$n^{1-\nu}\int_0^h \varphi(\alpha) \frac{\sin n\alpha}{\alpha_\nu} d\alpha$$

sich nicht ändert, wenn man h mit einer kleineren, sogar einer solchen obere Grenze $\frac{m}{n}$ vertauscht, die für wachsendes n zu 0 konvergiert.

Um die Gleichung

$$(n^{1-\nu})\left[\int_0^h \varphi(\alpha)\,\frac{\sin n\alpha}{\alpha^\nu}\,d\alpha - \int_0^{\frac{m}{n}} \varphi(\alpha)\,\frac{\sin n\alpha}{\alpha^\nu}\,d\alpha\right] = \frac{\varepsilon\gamma}{m^\nu}$$

quemer anwenden zu können, transformiert man sie nach dem sogenannten eiten Mittelwertssatz (von du Bois-Reymond und Weierstraß). Nach unserer raussetzung, daß $\varphi(\alpha)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, aß φ von $\alpha = 0$ wenigstens bis zu einem sehr kleinen Werte $\left(\frac{m}{n}\right)$ dasselbe ichen behalten und entweder nur wachsen oder nur abnehmen. [Dasselbe tt auch ein, wenn unendlich viele Maxima und Minima vorhanden sind, aber einer anderen Stelle als $\alpha = 0$]. Dann hat man nach dem erwähnten Satze:

$$\int_0^{\frac{m}{n}} \varphi(\alpha)\frac{\sin n\alpha}{\alpha^\nu}\,d\alpha = \varphi(0)\int_0^{\frac{m}{n}}\frac{\sin n\alpha}{\alpha^\nu}\,d\alpha + \left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right) - \varphi(0)\right]\int_\xi^{\frac{m}{n}}\frac{\sin n\alpha}{\alpha^\nu}\,d\alpha,$$

nn ξ eine weder 0 noch $\frac{m}{n}$ überschreitende Größe bezeichnet. Setzt man esen Wert oben ein, so entsteht $(\nu \leqq 1)$

$$n^{(1-\nu)}\int_0^h \varphi(\alpha)\,\frac{\sin n\alpha}{\alpha^\nu}\,d\alpha + \varphi(+0)\int_0^{\frac{m}{n}}\frac{\sin n\alpha}{(n\alpha)^\nu}\,d(n\alpha) -$$

$$-\left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right) - \varphi(0)\right]\int_\xi^{\frac{m}{n}}\frac{\sin n\alpha}{(n\alpha)^\nu}\,d(n\alpha) < \frac{\varepsilon\gamma}{m^\nu}.$$

r gehen nun zu den Grenzen über. Das zweite und dritte Integral auf der ken Seite bleiben endlich; führt man $n\alpha$ als Veränderliche ein, so verwandeln selben sich in die ganz bestimmten Formen

$$\int_0^m \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta, \quad \int_0^m \frac{\sin\beta}{\beta^\nu}\,d\beta,$$

n denen die erste für $n = \infty$, also $m = \infty$, gleich ist

$$\frac{\pi}{2\sin\frac{\nu\pi}{2}\,\Gamma\nu}; \text{ da ferner } \left[\varphi\left(\frac{m}{n}\right) - \varphi(0)\right]$$

Null herabsinkt, so findet man den Satz:

4. Satz: Überschreitet die von $\alpha = 0$ bis $\alpha = h$ für jeden Wert des Parameters endliche Funktion $\varphi(\alpha)$ nicht einen angebbaren Wert γ und hat sie

zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = h$ nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima, ferner $0 < \nu \leqq 1$, so kann man n so groß nehmen, daß:

$$(n^{1-\nu}) \int_0^h \varphi(\alpha) \frac{\sin n\alpha}{\alpha^\nu} d\alpha - \frac{\pi}{2\Gamma\nu \sin \frac{\nu\pi}{2}} \cdot \varphi(+0)$$

und zwar für alle x in gleichem Grade unter jeden Grad der Kleinheit herabsinl

Dieselbe Methode zeigt uns, daß:

$$(n^{1-\nu}) \int_0^h \varphi(\alpha) \frac{\cos n\alpha}{\alpha^\nu} d\alpha - \frac{\pi}{2\Gamma\nu \cos \frac{\nu\pi}{2}} \cdot \varphi(+0)$$

dieselbe Eigenschaft besitzt, wenn $0 < \nu \leqq 1$.

Hieraus erkennt man unmittelbar, wie stark die Koeffizienten a_n und in einer Fourierschen Reihe, welche die Funktion $\varphi(\alpha)$ darstellt, zu Null ko vergieren. Bleibt $\varphi(\alpha)$ endlich, so bleiben na_n und nb_n, wie groß auch n, s im Endlichen. Wird $\varphi(\alpha)$ für $\alpha = x$ so unendlich, daß $(\alpha - x)^\nu \varphi(\alpha)$ für $x =$ endlich bleibt, so bleibt auch $a_n \times n^{1-\nu}$ für $n = \infty$ endlich. Dies ist sog noch der Fall, wenn auch $\varphi(\alpha)$ in einzelnen Punkten, in welchen es nicht u endlich wird, unendlich viele Maxima und Minima hat. Hier wenden wir d Vorhergehende nur zum Beweis der beiden Sätze 1 und 2 an, indem wir i 4. Satze $\nu = 1$ setzen; dadurch findet man, daß, wenn k eine positive Za bezeichnet

$$\int_{-k}^{h} \varphi(\alpha) \frac{\sin n\alpha}{\alpha} d\alpha - \frac{\pi}{2}[\varphi(+0) - \varphi(-0)]$$

mit wachsendem n in gleichem Grade zu Null konvergiert.

Wenn $k = 0$ ist, ferner

$$\int_0^h \varphi(\alpha) \frac{\sin n\alpha}{\alpha} d\alpha - \frac{\pi}{2} \varphi(+0)$$

gleich Null, für $n = \infty$. Es sei nun $-\pi < x < +\pi$, man setze

$$h = \frac{1}{2}(\pi - x),\ k = \frac{1}{2}(\pi + x)\ \varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{\sin \alpha} f(x + 2\alpha)$$

und $(2n + 1)$ für n; dadurch wird

$$\varphi(+0) + \varphi(-0) = f(x + 0) + f(x - 0),$$

so daß der vierte Satz sich in den ersten und zweiten verwandelt.

Der Fall $x = \pm\pi$ bleibt noch übrig, der eine Modifikation des Verfahre deshalb erfordern würde, weil eine von den Größen h oder k gleich π ist, *sin* daher zweimal unter dem Integrale für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ verschwindet. A dem vorigen allgemeinen Resultate ergibt sich aber das Resultat in diese

lle sofort, wenn man $f(x)$ periodisch fortsetzt, so daß z. B. in den Punkten $-\pi-0)$, $(-\pi+0)$ die die Ordinaten sind $f(-\pi-0)$, $f(-\pi+0)$, und n darauf von einem anderen Anfangspunkt zählt.

Man kann aber auch das obige Verfahren für den speziellen Fall passend difizieren. Behandeln wir von den obigen beiden Fällen, z. B. $x=-\pi$. diesem ist:

$$\pi s_n = \int_0^{\pi} f(-\pi+2\alpha)\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ldots$$

rgument unverändert).

Nachdem man im letzten Integral $\pi-\alpha$ für α eingeführt hat, entsteht:

$$\pi s_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\pi-\alpha)+f(-\pi+\alpha)]\frac{\sin(2n+1)\alpha}{\sin\alpha}d\alpha.$$

esen Ausdruck assimiliert man der Gleichung

$$\int_0^{h} \varphi(\alpha)\frac{\sin n\alpha}{\alpha}d\alpha - \frac{\pi}{2}\varphi(+0) = 0,$$

lem man setzt:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{\sin\alpha}[f(\pi-\alpha)+f(-\pi+\alpha)]$$

d erhält dadurch das verlangte Resultat.

Einen schönen Beweis der Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz Fourierschen Reihe liefert Harnack in den Annalen, Band XVII.

Unter einer Fourierschen Reihe verstehen wir eine trigonometrische ihe von der Gestalt

$$\sum_0^{\infty} k(a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

welcher die Koeffizienten die Werte haben:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx \text{ und } b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Integrierbarkeit von $f(x)$ ist dabei notwendige Voraussetzung. Nun kann n aber zuerst beweisen, daß die Fouriersche Reihe, falls $[f(x)]^2$ integrierbar die Eigenschaft hat, daß zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine Zahl n gefunden

werden kann, von der ab nicht nur sämtliche Koeffizienten a_n und b_n ihre Beträge nach kleiner sind als δ, sondern auch

$$\sum_{n}^{n+l} k\,(a_k^2 + b_k^2) < \delta$$

für jeden Wert von l. Setzt man nämlich

$$f(x) - b_0 - \sum_{1}^{n} k\,(a_k \sin k x + b_k \cos k x) = P_n,$$

wobei P_n die Differenz zwischen der Funktion $f(x)$ und beliebig vielen Glieder der Fourierschen Reihe bedeutet, so ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_n^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - b_0 - \sum_{1}^{n} k\,(a_k \sin k x + b_k \cos k x)]^2\,dx,$$

da nun

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k x \cos l x\,dx$$

immer gleich Null ist, ferner

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin k x \sin l x\,dx = 0, \text{ für } k \gtrless l,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 k x\,dx = \pi, \text{ für } k = l, \text{ und}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos k x \cos l x\,dx = 0, \text{ für } k \gtrless l \text{ und}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 k x\,dx = \pi, \text{ für } k = l; \text{ so wird}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_n^2\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2\,dx - 2b_0 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx + b_0^2 \int_{-\pi}^{+\pi} dx - 2 \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sum_{1}^{n} k\,(a_k \sin k x$$

$$+ b_k \cos k x)\,dx + 2b_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{1}^{n} k\,(a_k \sin k x + b_k \cos k x)\,dx + \int_{-\pi}^{+\pi} [\sum_{1}^{n} k\,(a_k \sin k x$$

$$+ b_k \cos k x)]^2\,dx;$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P_n^2\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2\,dx + 2b_0^2\,\pi + \pi \sum_{1}^{n} k\,(a_k^2 + b_k^2) - 2 \int_{-\pi}^{+\pi} b_0 f(x)\,dx$$

$$- 2 \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x) - b_0) \sum_{1}^{n} k\,(a_k \sin k x + b_k \cos k x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2\,dx - 2b_0^2\,\pi$$

$$- \pi \sum_{1}^{n} k\,(a_k^2 + b_k^2), \text{ denn:}$$

$$2\int_{-\pi}^{+\pi} b_0 f(x)\,dx = 2\int_{-\pi}^{+\pi} b_0[b_0 + \sum_1^n k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx)]\,dx = 4\pi b_0^2$$

$$2\int_{-\pi}^{+\pi}[f(x) - b_0]\sum_1^n k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx)\,dx = 2\int_{-\pi}^{+\pi\infty}\sum_1 k\,(a_k \sin kx +$$

$$- b_k \cos kx)\sum_1^n k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx)\,dx = 2\int_{-\pi}^{+\pi}[\sum_1^n k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx)]^2\,dx +$$

$$-2\int_{-\pi}^{+\pi\infty}\sum_n k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx)\sum_1^n k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx)\,dx = 2\pi\sum_1^n k\,(a_k^2 + b_k^2).$$

Diese Gleichung gilt, wie groß auch n genommen wird. Da die rechte Seite bei jedem noch so großen Werte von n eine positive Größe darstellt, so kann auch

$$2b_0^2\pi + \pi\sum_1^n k\,(a_k^2 + b_k^2)$$

bei beliebig wachsendem n nicht über jeden Betrag hinaus wachsen, vielmehr nähert sich diese unbedingt konvergente Reihe einem bestimmten positiven Werte, welcher höchstens gleich ist $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2\,dx$; es muß sich also eine Stelle finden lassen, von der $ab\sum_n^{n+l} k\,(a_k^2 + b_k^2) < \delta$ bleibt für jeden Wert von l. Insbesondere ist auch $lim_{n=\infty}\, a_n = 0$ und $lim_{n=\infty}\, b_n = 0$. Bezeichnet man den Rest der Fourierschen Reihe mit $R_{n,l}$, so zwar, daß:

$$R_{n,l} = \sum_n^{n+l} k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

ist

$$\text{I.}\quad \int_{-\pi}^{+\pi} (R_{n,l})^2\,dx = \pi\sum_n^{n+l} k\,(a_k^2 + b_k^2) < \delta$$

Aus dieser Ungleichung erkennt man eine bestimmte Eigenschaft der Fourierschen Reihe: Eine beliebige unendliche Reihe

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots + f_{n+l}(x) + \ldots,$$

welcher jedes Glied eine stetige Funktion sein soll, heißt in dem Intervalle von a bis b gleichmäßig konvergent, wenn sich zu jeder Zahl δ eine Stelle n angeben läßt, von der ab für jeden Wert von x die Reste

$$R_{n,l} = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+l}(x) + \ldots$$

jedem Betrage nach kleiner bleiben als δ, wie groß auch das l gewählt werde.

„Im allgemeinen konvergent" wollen wir nun eine Reihe nennen, wenn sich eine Stelle n finden läßt, von der ab für jeden Wert von l

$$\int_a^b (R_{n,l})^2\,dx < \delta$$

wird. Dabei kann es noch unendlich viele Stellen geben, an denen R_n oberha einer gewissen (durch δ bedingten) Grenze liegt, oder auch unendlich wi Nur sind solche Stellen in jedem beliebig kleinen Intervalle so verteilt, d sie auf den Wert des Integrales keinen Einfluß üben; sie bilden eine Punk menge erster Gattung.

Somit ist bewiesen: „Die Fouriersche Reihe, bei welcher $f(x)^2$ integrab ist, konvergiert im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ im allgemeinen gleichmäßig

Will man nun hier den Satz von du Bois-Reymond nebst seinem Bew voraussetzen, so kann man dieses Theorem in der allgemeineren Form au sprechen: „Jede trigonometrische Reihe, welche eine nebst ihrem Quadra integrierbare Funktion definiert, konvergiert im allgemeinen gleichmäß denn sie ist eine Fouriersche Reihe".

Wichtiger wird es sein, den Satz von der gleichmäßigen Konvergenz wied zum Fundamente der Untersuchung über die Darstellbarkeit einer willki lichen Funktion zu machen. Man sieht leicht ein: Das Integral jeder im a gemeinen gleichmäßig konvergenten Reihe wird durch die Reihe dargestel welche aus den Integralen der einzelnen Glieder hervorgeht. Denn ist

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_{n-1}(x) + R_n(x)$$

und wird im Intervalle von a bis b bei allen Werten von x mit Ausnahme ein Punktmenge erster Gattung $R_n(x)$ durch Wahl von n kleiner als ein beliebig δ, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_{n-1}(x)\,dx + [< \delta\,(b-a$$

Bezeichnet man den Summenwert der Fourierschen Reihe, deren Ko vergenz nachgewiesen wurde, mit $\varphi(x)$, so ergeben sich aus der Gleichun

$$\varphi(x) = b_0 + \sum_1^{n-1} k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx) + R_n(x)$$

folgende Eigenschaften: Durch Multiplikation mit $\sin k\alpha$ oder $\cos kx$ u Integration folgt:

$$\text{II.} \begin{cases} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin kx\,dx = \pi a_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\,dx \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx\,dx = \pi b_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\,dx \quad (k = 0, 1, 2 \ldots \infty). \end{cases}$$

Ferner folgt durch Multiplikation mit $\varphi(x)$ und Integration

$$\text{III.} \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)^2\,dx = b_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx + \sum_1^{\infty} k \left[a_k \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin kx\,dx + \right.$$

$$\left. + b_k \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx\,dx\right] = 2\pi b_0^2 + b_0 \int_{-\pi}^{+\pi} [\sum_1^{n-1} k\,(a_k \sin kx + b_k \cos kx) +$$

$$+ R_n(x)]\,dx + \pi \sum_1^{\infty} k\,(a_k^2 + b_k^2).$$

Mithin ist bewiesen: Jede durch eine Fouriersche Reihe (in welcher $f(x)^2$ tegrierbar ist) definierte Funktion $\varphi(x)$ wird durch eine Reihe dargestellt, welcher die Koeffizienten auch die in der Gleichung II zuerst stehenden ormen haben. Das Quadrat der Funktion $\varphi(x)$ ist integrierbar und wird durch e Reihe III erhalten.

Es besteht nun die Frage, in welchem Zusammenhange stehen die Werte r Funktion $\varphi(x)$ mit der willkürlichen Funktion $f(x)$? Wenn nachgewiesen erden kann, daß $\varphi(x)$ den gleichen Charakter der Willkürlichkeit besitzt wie x), so ist die Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion $f(x)$ durch eine igonometrische Reihe bewiesen.

Die Darstellbarkeit einer willkürlichen Funktion durch eine Fouriersche eihe wollen wir nun im folgenden untersuchen. Es ist aber vor allem nötig, n Begriff der Darstellung einer willkürlichen Funktion durch eine Reihe harf zu begrenzen. Da es Stellen geben kann, an welchen der Summenwert r Reihe von dem Funktionswerte differiert, so bietet sich folgende Definition ei einer nebst ihrem Quadrate integrierbaren Funktion $f(x)$] als ausreichend r unsere Zwecke dar: Eine Funktion $f(x)$ soll durch eine Reihe im Inter- lle a bis b dargestellt heißen, wenn der Summenwert $\varphi(x)$ dieser Reihe die igenschaften hat, daß

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 \, dx = 0.$$

abei kann es wiederum unendlich viele Stellen geben, an denen $[f(x) - \varphi(x)] > \delta$, ır bilden solche Stellen eine Punktmenge erster Gattung. Es erscheint veckmäßig als Definition einer Punktmenge erster Gattung die folgende fest- halten: Eine Punktmenge heißt von der ersten Gattung, wenn es möglich t, die Punkte der Menge in Intervalle von endlicher Länge einzuschließen, ren Summe beliebig verkleinert werden kann. Aus dieser Definition ergibt ch: Man kann in beliebiger Nähe einer jeden Stelle ein endliches Intervall ıgeben, in welchem kein Punkt der Menge liegt. Denn ist α ein beliebiger ınkt des Intervalles, so ist es nur dann nicht möglich in beliebiger Nähe von ein Intervall ausfindig zu machen, in welchem kein Punkt der Menge liegt, enn in der Nähe eines jeden Punktes, der innerhalb einer bei α beginnenden ıdlichen Strecke von der Länge δ liegt, unendlich viele Punkte der Menge ch befinden. Alsdann wäre es aber auch nicht möglich, sämtliche Punkte r Menge von vornherein in Umgebungen einzuschließen, deren Summe kleiner t als δ, d. h. die Menge ist nicht von der ersten Gattung.

Wir kehren nun zur Frage zurück: In welchem Zusammenhange stehen e durch Gleichung II verbundenen Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$? Setzt man $(x) = f(x) + g(x)$, so hat man an Stelle der Gleichung II die Bedingung

II. $a) \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \sin kx\,dx = 0$ und $\int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \cos kx\,dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots$

also: II. $\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin kx\,dx = \pi a_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\,dx$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos kx\,dx = \pi b_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\,dx.$$

Es soll nun aus diesen Gleichungen gefolgert werden, daß die Funkti $g(x)$, welche nebst ihrem Quadrat integrierbar ist, im allgemeinen verschwind Du Bois-Reymond hat darauf hingewiesen, daß sich die Frage vermittelst ei von ihm angegebenen Satzes erledigen lasse. Dieser lautet:

Wenn das Integral $\int_a^b \lambda(x)\, g(x)\, dx$ Null ist, welche Funktion (mit stetige Differentialquotienten) man auch an die Stelle von $\lambda(x)$ setzen möge, so $g(x)$ eine solche integrierbare Funktion, deren Integral zwischen beliebigen de Intervalle $a\,b$ angehörigen Grenzen Null ist. Der Satz kann in der Allgemeinhe wie er hier zur Anwendung kommt, folgendermaßen bewiesen werden:

Man konstruiere eine Funktion $\lambda(x)$, welche im Intervalle von $-\pi$ $+\pi$ Null ist, mit Ausnahme einer beliebig kleinen Strecke von α bis β, für welc $\lambda(x)$ also $\lambda(\alpha)$ bis $\lambda(\beta)$ den Wert 1 hat. Nach dem Dirichletschen Satz solch eine Funktion durch eine Fouriersche Reihe darstellbar

$$\lambda(x) = \sum_0^\infty k\, a'_k \sin kx + b'_k \cos kx,$$

in welcher die Koeffizienten die Werte haben

$$a'_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \lambda(x) \sin kx\,dx \text{ und } b'k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \lambda(x) \cos kx\,dx.$$

An den Sprungstellen besitzt die Reihe den Wert $\frac{1}{2}$. Diese Fouriersche Rei konvergiert, wie schon bewiesen wurde, im allgemeinen gleichmäßig u folglich ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \lambda(x) g(x)\,dx = \sum_0^\infty k\,[a'_k \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \sin kx\,dx + b'_k \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \cos kx\,dx].$$

Zufolge der Gleichung II*a* ist die rechte Seite gleich Null, da $\lambda(x)$ nur i Intervalle α bis β den Wert 1 hat, im übrigen aber verschwindet.

$$\text{IV. } \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)\lambda(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx = 0, \quad -\pi \leqq \alpha < \beta \leqq \pi.$$

Durch diese Gleichung, in welcher die Grenzen α und β beliebig nahe ewählt werden können, ist aber ausgesprochen, daß die Stellen, an welchen er Betrag von $g(x)$ größer ist als irgendein Wert δ nur eine Punktmenge erster rdnung bilden. Denn weil die Funktion $g(x)$ integrierbar ist, so kann man beliebiger Nähe eines jeden Punktes α ein endliches Intervall angeben, in elchem die Schwankungen kleiner werden als δ. Geht dieses Intervall vom unkte $\alpha + \varepsilon$ bis β, so ist für jeden Punkt ξ im Innern des Intervalles

$$\int_{\xi}^{\beta} g(x)\,dx = (\beta - \xi)\ [g(x) + (< \delta)].$$

er Betrag von $g(\xi)$ ist also durchwegs kleiner als δ und die Punkte, für welche ese Eigenschaft nicht besteht, können in Intervalle $\pm\varepsilon$ eingeschlossen werden, eren Summe beliebig klein wird.

Aus Gleichung I

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} k\, a_k \sin k\,x + b_k \cos k\,x = f(x) + g(x)$$

lgt nun:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) g(x)\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) g(x)\,dx + \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)^2\,dx.$$

Weil also, da $g(x)$ im allgemeinen Null ist,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) g(x)\,dx = 0$$

ird, so ist auch

$$\text{V.}\quad \int_{-\pi}^{+\pi} g(x)^2\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} [\varphi(x) - f(x)]\,dx = 0.$$

Es ist also bewiesen: Bedeutet $f(x)$ eine willkürliche Funktion, deren uadrat im Intervalle $-\pi$ bis $+\pi$ integrierbar ist, so stellt die Fouriersche eihe den Wert derselben derart dar, daß der Summenwert der Fourierschen eihe $\varphi(x)$ sich höchstens in Punkten einer Punktmenge erster Gattung von em Werte $f(x)$ um eine angebbare Größe δ unterscheidet. Es ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2\,dx = 2\pi\, b_0^2 + \pi \sum_{1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2).$$

Zum Schlusse seien noch zwei Beweise für die Verwendbarkeit der Fourier-hen Reihe zur Darstellung, und zwar zur eindeutigen Darstellung einer will-ürlichen Funktion angeführt.

G. Cantor in Halle erbrachte den Beweis, daß eine für jeden reellen Wert on x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur uf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lasse.

„Wenn eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x durch eine f
jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{2} b_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + (a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x) + \ldots$$
$$+ (a_n \sin nx + b_n \cos nx) + \ldots$$

gegeben ist, so ist es von Wichtigkeit zu wissen, ob es noch andere Reihen v
derselben Form gibt, welche ebenfalls für jeden Wert von x konvergieren u
die Funktion $f(x)$ darstellen. Diese Frage kann nicht etwa, wie gewöhnli
angenommen wird, dadurch entschieden werden, daß man jene Gleichung m
$\cos n(x-t)\,dx$ multipliziert und Glied für Glied von $-\pi$ bis $+\pi$ integrie
(wobei auf der rechten Seite in der Tat nur das aus dem $n$ten Gliede hervo
gehende Glied nicht wegfallen würde), da abgesehen davon, daß hierbei d
Möglichkeit der Integration von $f(x)$ vorausgesetzt ist, die Integration ein
Reihe $A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$, in welcher A_n Funktionen einer Verände
lichen x sind, durch Integration ihrer Teile nur dann ohne Bedenken ausgefüh
werden kann, wenn der Rest, welcher nach Abtrennung der ersten n-Glied
übrig bleibt, für alle Werte von x, welche im Integrationsintervalle liege
gleichzeitig unendlich klein wird.

Also muß, wenn man

$$f(x) = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n + R_n$$

setzt, bei gegebener Größe ε, eine ganze Zahl m vorhanden sein, so beschaffe
daß für $n \geqq m$ der Rest R_n seinem absoluten Betrage nach kleiner ist als
für alle Werte von x, welche in Betracht kommen. Es ist nämlich die kleins
ganze Zahl m, welche für ein gegebenes x die Bedingung erfüllt, daß der ab
solute Betrag von R_n kleiner ist als ε, wenn $n \geqq m$, als eine unstetige Funktio
von x und ε zu betrachten; bezeichnet man sie unter diesen Umstände
genauer mit $m_{(x,\,\varepsilon)}$, so weiß man nicht, ob die Funktion $m_{(x,\,\varepsilon)}$ bei gegebenem
für alle Werte von x unterhalb einer endlichen Grenze liegt; es ist daher leic
einzusehen, daß, wenn $f(x)$ für $x = x_1$ eine Unstetigkeit hat, die Funktio
$m_{(x,\,\varepsilon)}$ Werte annehmen muß, welche jede angebbare Grenze übersteige
wenn bei festgehaltenem ε das x dem Werte x_1 unendlich nahe rückt. Hierau
geht hervor, daß die Eindeutigkeit der Darstellung einer Funktion durch ein
für jeden Wert von x konvergierende trigonometrische Reihe auf diesem Weg
nicht ergründet werden kann."

Cantor betont nun, daß er durch Riemanns Abhandlung auf einen anderen
das Ziel erreichenden Weg geführt worden sei und fährt in seinem Beweise fort

„Zuerst hebe ich hervor, daß bei einer trigonometrischen Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots,$$

welche für sämtliche Werte von x in einem gegebenen, übrigens beliebig kleine
Intervalle des reellen Größengebietes konvergiert, die Koeffizienten a_n und b

it wachsendem n unendlich klein werden. Denkt man sich nun zwei trigonometrische Reihen, welche für jeden reellen Wert von x konvergieren und denselben Wert annehmen, mithin dieselbe Funktion $f(x)$ darstellen, so folgt durch ziehen der einen von der anderen eine für jeden Wert von x konvergente arstellung der Null

$$O = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n + \ldots\ldots,$$

$C_0 = \frac{1}{2} d_o$ und $C_n = c_n \sin n x + d_n \cos n x$, wobei die Koeffizienten c_n id d_n mit wachsendem n nach dem eben Gesagten unendlich klein werden.

Ich bilde mit Riemann aus der obigen Reihe die Funktion

$$F(x) = C_0 \frac{x x}{2} - C_1 - \frac{C_2}{2 \cdot 2} - \ldots\ldots - \frac{C_n}{n \cdot n} - \ldots\ldots$$

e ist in der Nähe eines jeden Wertes von x eine stetige Funktion von x, welche e Eigenschaft hat, daß für jeden Wert von x der zweite Differentialquotient

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha . \alpha}$$

it unendlich abnehmendem α sich der Grenze 0 nähert.

Halten wir diese beiden Eigenschaften für die Funktion $F(x)$ fest,

1. daß sie stetig ist in der Nähe eines jeden Wertes von x,

2. daß die Grenze ihres zweiten Differentialquotienten mit unendlich nehmendem α für jeden Wert von x gleich Null ist, so läßt sich daraus zeigen, ß $F(x)$ eine ganze Funktion ersten Grades $cx + c'$ ist."

Der folgende Beweis ist von Schwarz in Zürich.

Man denke sich bei einer in einem Intervalle $(a \ldots b)$ der reellen Veränderhen x gegebenen Funktion $F_1(x)$ die Bedingungen 1 und 2 erfüllt und zwar e erste in der Nähe eines jeden Wertes von x im Intervalle, die zweite für len Zwischenwert x, und betrachte, indem man unter i die positive oder gative Einheit, unter k irgendeine reelle Größe versteht, die Funktion

$$\varphi(x) = i \left\{ F_1(x) - F_1(a) - \frac{x-a}{b-a} [F_1(b) - F_1(a)] \right\} - \frac{k^2}{2} (x-a)(b-x).$$

Aus den Voraussetzungen über $F_1(x)$ folgt, daß $\varphi(x)$ im Intervalle $a \ldots b$ tig ist und daß die Grenze des zweiten Differentialquotienten von $\varphi(x)$ ich k^2 ist für jeden Zwischenwert x bei unendlich abnehmendem α. Ferner $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 0$.

Bezeichnen wir daher $\varphi(x+\alpha) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\alpha)$ mit $\varphi(x, \alpha)$, so ist $x, \alpha)$ für jeden Zwischenwert x bei unendlich abnehmendem α annähernd ich $k^2 \alpha^2$, also positiv und von Null verschieden für hinreichend kleine erte von α.

Daraus folgt, daß $\varphi(x)$ für keinen Wert von x im Intervalle positiv ist. der Tat an den Grenzen ist $\varphi(x) = 0$, würde $\varphi(x)$ für einen Zwischenwert

positiv sein, so wäre das Maximum der Werte, welche $\varphi(x)$ annehmen ka ebenfalls eine positive Größe und würde zum mindesten für einen Zwisch wert x_0 von x erreicht; es wäre also für hinreichend kleine Werte von α

$$\varphi(x_0 + \alpha) - \varphi(x_0) \leqq 0 \text{ und } \varphi(x_0 - \alpha) - \varphi(x_0) \leqq 0,$$

mithin auch $\varphi(x_0, \alpha) \leqq 0$, während doch $\varphi(x_0, \alpha)$ für hinreichend kleine We von α positiv ist. Man hat also für jeden Wert von x im Intervalle $a \ldots$ für $i = \pm 1$ und für einen beliebigen Wert von $k \ldots \varphi(x) \leqq 0$.

Läßt man hierin k unendlich klein werden, so folgt:

$$F_1(x) = F_1(a) + \frac{x - a}{b - a}[F_1(b) - F_1(a)].$$

Es ist also unter den gemachten Voraussetzungen $F_1(x)$ eine ganze Funkti ersten Grades von x.

Daraus ergibt sich für unsere Funktion $F(x)$ (da hier die Grenze belie erweitert werden kann) die für alle Werte von x gültige Form $F(x) = cx +$ und man hat daher für jeden Wert von x

$$C_0 \frac{xx}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \ldots + \frac{C_n}{n \cdot n} + \ldots.$$

Aus der Periodizität auf der rechten Seite ergibt sich zunächst, daß sow $c = 0$, wie auch $C_0 = \frac{d_0}{2} = 0$ sein muß, und man erhält daher die Gleichu

$$-c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \ldots\ldots + \frac{C_n}{n \cdot n} + \ldots.$$

Die Reihe rechts ist von der Art, daß man bei gegebenem ε eine ganze Zahl angeben kann, so daß, wenn $n \geq m$ ist, der Rest der Reihe R_n seinem absolut Betrage nach kleiner ist als ε für alle Werte von x.

Man kann die obige Gleichung nach Multiplikation mit $\cos n(x - t)$ Glied für Glied von $-\pi$ bis $+\pi$ integrieren, das Resultat ist:

$$c_n \sin nt + d_n \cos nt = 0,$$

wo unter t eine beliebige reelle Größe zu verstehen ist. Man hat also $C_n =$ und $d_n = 0$, während schon früher gefolgert wurde, daß $d_0 = 0$ sei.

Es ergibt sich also das Resultat, daß eine für jeden einzelnen reellen We von x konvergente Darstellung der Null durch eine trigonometrische Reih

$$0 = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots$$

nicht anders möglich ist, als wenn die Koeffizienten d_0, c_n, d_n sämtlich = sind und man hat den Satz:

„Wenn eine Funktion einer reellen Veränderlichen x durch eine für jed Wert von x konvergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so gibt es kei andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von x ko vergiert und die nämliche Funktion $f(x)$ darstellt."

Durch den Cantorschen Satz ist die Eindeutigkeit der Entwicklung von x) in eine trigonometrische Reihe bewiesen. Es ist aber auch vermittelst eses Satzes leicht die Identität einer trigonometrischen Reihe mit der Fourierhen Reihe nachzuweisen. Es sei $f(x)$ definiert durch eine trigonometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} k\, a'_k \sin k\,x + b_k' \cos k\,x,$$

ıer deren Koeffizienten a' und b' sei keinerlei Voraussetzung gemacht, nur ll $f(x)$ nebst seinem Quadrate integrierbar sein. Bildet man nun die ıuriersche Reihe

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) = \sum_{0}^{\infty} k\, a_k \sin k\,x + b_k \cos k\,x,$$

ıbei a_k und b_k durch die Gleichungen:

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\,dx,\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin k\,x\,dx \text{ und } b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos k\,x\,dx$$

geben sind, so ist

$$g(x) = \sum_{0}^{\infty} k\,(a_k - a'_k) \sin k\,x + (b_k - b'_k) \cos k\,x,$$

ıe durch eine trigonometrische Reihe definierte Funktion, deren Wert, wie zeigt wurde, mit Ausnahme einer Punktmenge erster Gattung Null ist. Es issen daher die Koeffizienten dieser Reihe sämtlich verschwinden, d. h. x) ist in diesem Falle gleich Null und es wird:

$$a'_k = a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin k\,x\,dx \text{ und } b'_k = b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos k\,x\,dx.$$

† Prof. Franz Himml.

Der Verblichene war zu Groß-Holletitz bei Saaz am 9. September 18 geboren. Er studierte vom Jahre 1874 bis 1882 am Kommunal-Realgymnasiu in Kaaden und am Kommunal-Gymnasium in Komotau, legte die Reifeprüfu mit Auszeichnung ab und bezog dann die deutsche Universität in Pra wo er sich (1882—1886) den germanistischen Studien widmete. Schon a Gymnasium wie später während der Hochschulstudien war er, da ihm vo Hause keine Unterstützung gewährt werden konnte, ganz auf seine eige Kraft angewiesen; den schweren Kampf ums Dasein lernte er so frühzeit kennen. — Im Jahre 1889 erlangte er die Lehrbefähigung für Deutsch a Hauptfach, Latein und Griechisch als Nebenfächer, im Jahre 1900 auch f Geographie und Geschichte als Nebenfächer. Das Probejahr verbrachte 1889/90 am k. k. Stephansgymnasium in Prag und wirkte hierauf bis zu Jahre 1897 als Supplent an der genannten Anstalt, am k. k. Staatsgymnasiu in Mies und an der k. k. Staatsrealschule in Leitmeritz. Im Jahre 1897 erhi er eine definitive Lehrstelle an der k. k. Staatsgewerbeschule in Reichenbe Nach fünfjähriger Lehrtätigkeit daselbst kam er an das k. k. Staatsgymnasiu in Arnau und von dort im Jahre 1907 an das k. k. Staatsgymnasium Reichenberg. Im Jahre 1903 wurde er in die VIII. Rangklasse befördert.

Am 1. Mai d. J. raffte ihn mitten in der Ausübung seines Berufes e jäher Tod hinweg. Ein Gehirnschlag setzte seinem redlichen und erspriel lichen Wirken in voller Manneskraft ein Ziel.

Der Lehrkörper betrauert den Verlust eines Kollegen, der sich dur ein offenes, gerades Wesen auszeichnete und, unbekümmert um zerstreuen Geselligkeit und das Treiben der Öffentlichkeit, seinen eigenen Weg gin seinem Berufe und seiner Familie lebend. Den Schülern gegenüber verbar er Strenge mit Wohlwollen.

Ehre und Frieden seinem Andenken!

Prof. **Jakob Neubauer.**

Schulnachrichten.

I. Personalstand des Lehrkörpers.

a) Bewegung im Lehrkörper.

Es schieden aus:

1. Prof. **Robert Müller** wurde auf eigenes ısuchen mit Ende Juli 1910 in den blei- nden Ruhestand versetzt (M.-E. v. 4. Juni 10, Z. 21.313 K.-U.).

Mit Allerhöchster Entschließung vom August 1910 wurde ihm taxfrei der Titel ıes Schulrates verliehen.

2. Prof. **Dr. Ludwig Adamek** erhielt eine hrstelle am Staatsgymnasium im XVI. iener Gemeindebezirk (M.-E. v. 30. Juni 10, Z. 26.994 K.-U.).

3. Dem Prof. **Dr. Heinrich Thume** wurde ıe Lehrstelle am Staatsgymnasium mit utscher Unterrichtssprache in Prag, II. ephansgasse) verliehen (M.-E. v. 13. Juni 10, Z. 19.563 K.-U.).

4. Nebenlehrer **Johann Mikulec.**

5. Supplent **Florian Holfeld.**

6. Prof. **Franz Himmel** starb am Mai 1911.

Es traten ein:

1. Wirklicher Lehrer **Dr. Heinrich Barth,** früher Supplent am Staatsrealgymnasium in Kaaden (M.-E. v. 16. Juni 1910, Z. 23.620 K.-U.).

2. Wirklicher Lehrer **Karl Simm,** früher Supplent am deutschen Staatsgymnasium in Prag-Kleinseite (M.-E. v. 13. Juni 1910, Z. 19.563 K.-U.).

3. Wirklicher Lehrer **Ottomar Rödling,** bisher Supplent am Staatsgymnasium in Mies (M.-E. v. 30. August 1910, Z. 35.419 K.-U.).

4. Der für Deutsch als Hauptfach, Latein und Griechisch als Nebenfächer approbierte Lehramtskandidat, **Dr. Gustav Jungbauer,** als Supplent zur Vertretung des beurlaubten Prof. Leop. Tertsch (L.-S.-R.-E. v. 6. Oktober 1910, Z. 54.420).

5. und 6. Die für Geschichte und Geographie approbierten Lehramtskandidaten **Heinrich Glaser** und **Franz Nevečeřel,** zur Ablegung des Probejahres der Anstalt und zur Einführung in das praktische Lehramt dem Prof. Neubauer zugewiesen (L.-S.-R.-E. v. 19. Nov. 1910, Z. 65.866, bezw. v. 2. Dez. 1910, Z. 68.372).

b) Stand am Schlusse des Schuljahres.

Name, Charakter.	Verwendung.			Anmerkung.
	Gegenstand.	Klasse.	Wöchentl. Stunden.	
Regierungsrat **Josef Grünes,** k. k. Direktor (VI. Rangklasse).	Latein.	VIII.	5	Direktor-Stellvertreter der Prüfungskommission für allgem. Volks- u. Bürgerschulen in Reichenberg.
Johann Baer, k. k. Professor.	Mathematik, Naturgeschichte, bezw. Physik und Chemie.	I., III., IV., I., II., IV., V., VI.	21	Ordinarius der IV. Kl., Verwalter d. naturhistorischen Kabinettes.
Phil. Dr. **Heinrich Barth,** k. k. wirkl. Lehrer.	Latein, Philos. Propädeutik.	V., VI., VII., VIII.	16	
Reinhold Eiselt, k. k. Professor.	Kath. Religion, seit 1. Mai auch Mathematik.	I.—VIII., II.	19	Weltpriester, Th. Dr. (Rom).

Zahl.	Name, Charakter.	Verwendung.			Anmerkung.
		Gegenstand.	Klasse.	Wöchntl. Stunden.	
5	**Josef Heckel,** k. k. Professor.	Mathematik, Physik.	V.—VIII., III., VII., VIII.	21	Ordinarius der VII. K Verwalter des physikalischen Kabinett
6	**Franz Kühnl,** k. k. Professor.	Deutsch, Latein, Griechisch.	II., II., VIII.	16	Ordinarius der VIII. K Verwalter der Schüler bibliothek.
7	**Jakob Neubauer,** k. k. Professor (VIII. Rangklasse).	Geschichte, Geographie, Geschichte u. Geographie, seit 1. Mai auch Deutsch.	IV., V., VI., IV., V., VI., VII., VIII., VIII.	22	Ordinarius der VI. Kl Verwalter des geogra phisch-historischen Kabinettes.
8	**Augustin Potuček,** k. k. Professor (VIII. Rangklasse).	Latein, Griechisch, Böhmisch.	III., III., VII., I., II., IV. Abt.	21	Ordinarius der III. Kl. Verwalter der Lehrer bibliothek, d. archäolog schen Kabinettes und d Münzensammlung.
9	**Ottomar Rödling** k. k. wirkl. Lehrer.	Latein, Griechisch, Schreiben, Deutsch (seit 2. Mai).	IV., V., VI., I., III.	20	Ordinarius der V. Kl.
10	**Karl Simm,** k. k. wirkl. Lehrer.	Deutsch, Latein, Stenographie.	I. I., VII., I. A Kurs.	19	Ordinarius der I. Kl., Verwalter der Programmesammlung.
11	**Leopold Tertsch,** k. k. Professor (VII. Rangklasse).	Zur Leitung des städtischen Mädchenlyzeums beurlaubt (M.- v. 16. August 1910, Zahl 34.140 K.-U.).			
12	Phil. Dr. **Gustav Jungbauer,** Supplent.	Deutsch, Griechisch, Geschichte, Geographie, Deutsch (seit 2. Mai).	IV., VI., VII., IV., II., II., V.	20	Ordinarius der II. Kl.
13	**Karl Sitte,** Supplent und Nebenlehrer.	Freihand-zeichnen.	I. Kl. (obl.), IV. Abt. (unobl.).	5	Professor an der hiesig Staatsrealschule.
14	**Heinrich Glaser,** Probekandidat.	Geschichte.	V.*)	3	*) Seit Februar.
15	**Franz Nevečeřel,** Probekandidat.	Geschichte, Geographie**).	VII.,*) III.,**) I., III.	9	*) Seit Februar. **) Seit 2. Mai.
16	Phil. Dr. Prof. **Emil Hofmann,** isr. Religionslehrer.	Isr. Religion.	2 Abteilungen.	4	Rabbiner d. isr. Kultus gemeinde in Reichenber
17	**Hugo Piesch,** evangelischer Religionslehrer.	Evang. Religion A. B.	2 Abteilungen.	4	Evangelischer Pfarrer in Reichenberg.

Name, Charakter.	Verwendung.			Anmerkung.
	Gegenstand.	Klasse.	Wöchtl. Stunden.	
Phil. Dr. **Josef Gränzer,** Nebenlehrer.	Stenographie.	I. B Kurs.	2	Professor an der hiesigen Staatsrealschule.
Norbert Haidl, Nebenlehrer.	Turnen.	3 Abteilungen.	6	Turnlehrer an der hiesigen Staatsrealschule.
Julius Landig, Nebenlehrer.	Freihand-zeichnen.	II. u. III. Abt.	4	Professor an der hiesigen Staatsrealschule.
Eduard Proksch, Nebenlehrer.	Gesang.	4 Abteilungen.	4	Volksschullehrer in Reichenberg.
Leopold Richter, Nebenlehrer.	Französisch.	II. Kurs.	2	Professor an der hiesigen Staatsrealschule.

II. Lehrverfassung.

der I.—VI. Klasse wurde der Unterricht nach dem neuen Lehrplane vom Jahre 1909 erteilt und in der VII. und VIII. Klasse nach dem Lehrplane vom Jahre 1900.

A. Ausweis über die in der deutschen, lateinischen und griechischen rache durchgenommene **Lektüre.**

1. Deutsche Sprache.

Schul- und Privatlektüre.

Klasse: Schullektüre — nach dem Lesebuche. — Privatlektüre: Beowulf. Das Rolandslied. Das Alexanderlied. Aus dem Nibelungenliede: XXXVII. Âventiure. Aus Gudrun: Hagen von Irland, Horand und Hilde (nach der Inhaltsangabe von Uhland). Einige Sprüche und Lieder Walters von der Vogelweide. Goethes „Reineke Fuchs".

Klasse: Schullektüre — nach dem Lesebuche; überdies: „Minna von Barnhelm". „Götz von Berlichingen". „Die Räuber". Mörike, Mozart auf der Reise nach Prag. — Privatlektüre: „Hamlet". „Egmont". Ausgewählte Stücke aus dem Lesebuche.

I. Klasse: Schullektüre — nach dem Lesebuche; überdies: „Iphigenie auf Tauris". „Die Räuber". „Hermann und Dorothea". „Wilhelm Tell". — Privatlektüre: „Julius Cäsar". „Götz von Berlichingen". „Egmont". „Tasso". „Kabale und Liebe". „Wallenstein". Ausgewählte Stücke aus dem Lesebuche.

II. Klasse: Schullektüre — nach dem Lesebuche; überdies: „Wilhelm Tell". „Hermann und Dorothea". „Die Jungfrau von Orleans". „Die Braut von Messina". „Faust" (1. Teil). „Laokoon" (Auswahl). „König Ottokars Glück und Ende". „Sappho". — Privatlektüre: „Prinz von Homburg".

2. Lateinische Sprache.

a. Schullektüre.

III. Klasse: Aus Cornelius Nepos (nach Golling): Miltiades, Themistocl Aristides, Epaminondas, Pelopidas. Aus den Memorabilia Alexand Magni (nach derselben Ausgabe): I., V., VI., VIII., IX., XXI XXXVIII. Überblick über das ganze Geschichtswerk des Ruf Memoriert wurde: Miltiades, c. 1 (erster Absatz). — Epaminond c. 8 (2. Hälfte).

IV. Klasse: Caesar: De bello Gallico, I.; II., 16—28; IV., 1—19; VI., 9—2 VII., 68—90. Aus Curtius Rufus (nach Golling): XV. und X

V. Klasse: Ovidius: Met. I., 1—4, 89—162, 313—415; V., 385—4 462—571; VI., 146—312; VIII., 183—235, 618—720; X., 1—(72—77; XI., 87—193; XV., 871—879. Am. I., 15. Rem. 169—1 Fast. II., 83—118, 193—244, 475—512, 639—684, 687—710; I 167—230, 713, 714, 725—790, 809—834. Caesar: De bello civ III., 58—112. Livius: I., 1—16, 22—26, 34—37, 39—41, 46—4 XXI., 21—37, 42—44; XXII., 1—25. Memoriert wurde: Ov Met. I, 1—4, 89—118; VI., 146—156. Schriftliche Übersetzu ins Deutsche: I. Sem. — Ovid. Met. III., 708—731; II. Sem. Livius, XXII., c. 48, §§ 1—4.

VI. Klasse: Sallustius: Bellum Iugurthinum. Cicero: Oratio in Cat nam I. Vergilius: Ecl. I., VII.; Georg. II., 136—176, 323—3 458—540; III., 339—383; Aeneis, I., II. (1—623). Memorie wurde: Verg. Ecl. I., 1—30; Aen. I., 1—34; Cic. or. in Cat. I., c. Schriftliche Übersetzung ins Deutsche: I. Sem. — Sallusti Bellum Catilinae, c. 45 f.; II. Sem. — Cic. or. in Cat. IV., c. 9.

VII. Klasse: Cicero: Pro Archia poëta; in Verrem actio II., lib. IV.; Lael de amicitia. Vergilius: Aeneis, II., IV., VI., IX., 176—449. Mem riert wurde: Cic. pro Archia, §§ 18, 19, 24; Verg. Aen. II., 199—23 IV., 173—195; VI., 296—316, 845—853. Schriftliche Übe setzung ins Deutsche: I. Sem. — Cicero, Divinatio in Q. Caeciliu §§ 2—5; II. Sem. — Vergilius, Aeneis, VIII., 152—174.

VIII. Klasse: Tacitus: Germania, 1—27; Annalen, I., 1—15; II., 41—4 53—55, 69—83; III., 1—7; XV., 38—45; Historien, I., 1—8, 12—3 39—43, 47, 49, 50. Horatius: Carm. I., 1, 3, 4, 7, 11, 14, 2 31, 37; II., 2, 3, 7, 10, 13, 20; III., 1, 3, 30; IV., 2, 7, 8, 9, 1 Epod. 2, 13. Sat. I., 1, 6, 9; II., 6. Epist. I., 1, 2; II., 3. Mem riert wurde: Tac. Germ. cc. 1—3, 10, 13, 14; Ann. I., 1. H carm. I., 1, 3 (1—8, 25—40), 4, 11; II., 3, 10, 18, 20 (1—8, 21—2 III., 30; IV., 2 (1—32), 3, 7, 9 (1—4, 45—52). Schriftlich Übersetzung ins Deutsche: I. Sem. — Tac. Ann. XI., c. 1 II. Sem. — Hor. epist. I., 16 (1—24).

Privatlektüre — unter Anführung der Namen der betreffenden Schüler.

I. Klasse: 1. Achtner Ludwig: Cicero, Oratio in Catilinam IV. 2. Fichtl Bruno 3. Miksch Ernst: Vergilius, Ecl. V., VII., IX.; Sallustius, Historiae: Oratio Lepidi, Oratio Philippi. 4. Nowak Konrad: Cicero, Oratio in Catilinam III, c. 1—c. 7. 5. Molitor Hans: Sallustius, Orationes et Epistulae, excerptae de Historiis; Plautus, Menaechmi (1160 Verse).

II. Klasse: 1. Feistner Friedrich: Plautus, Miles Gloriosus. Catullus, Carmina, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 14, 16, 29, 30, 31, 34—36, 38, 39, 43, 46, 48, 49, 51, 52, 62, 70, 84, 85, 87, 101, 105, 116. 2. Herzog Ernst: Briefe des jüngeren Plinius (Ausgabe Schuster), I., 1, 9; II. 1; III., 5; IV., 22; VI., 15, 16, 20, 31; VII., 3, 5, 9, 20, 33. 3. Lurtz Edward: Nach dem lat. Lesebuch von Gall: Monumentum Ancyranum. Martial, Epigramme, I., 1, 19, 47; II., 3, 7, 20, 21, 80; III., 44, 50, 52; V., 9, 13, 43, 47, 52; VI., 19, 53, 82; VII., 3, 81, 83; IX., 46, 97. Phaedrus, Fabeln, I., 1, 7; II., 3, 5; III., 5; IV., 3, 16; V., 2, 5. 4. Meiniger Ferdinand: Phaedrus, Fabeln, I., 1—29; II., 1—7; III., 2—15; IV., 1—19; V., 1—10. Appendix, 1, 3, 6—32. 5. Preißler Gottfried: Cicero, Pro Sex. Roscio Amerino.

III. Klasse: 1. Breuer Rudolf: Plinius, Epist. I., 9, 13; II., 14; III., 16; VI., 15, 16; VII., 20; IX., 33, ad Traian. 94, 95. 2. Drda Franz: Vergilius, Georg. IV., 315—558. 3. Eccardt Rudolf: Horatius, Carm. I., 12; II., 9, 15; III., 2; Carmen Saeculare. 4. Luh Reinhard: Horatius, Carm. I., 20, 21; II., 14, 17; III., 23; IV., 3, 12; Carmen Saeculare; Epod. 1. 5. von Milde Bernhard: Horatius, Carm. I., 10, 15, 20; II., 14; III., 4, 9. 6. Šámal Ladislaus: Tacitus, Annal. II., 5—26; Plinius, Epist. ad Traian., 96, 97. 7. von Scheure Erich: Tacitus, Germ. c. 28—c. 46.

3. Griechische Sprache.

a. Schullektüre.

Klasse: Xenophon (nach Schenkls Chrestomathie): Kyrupädie, II., III.; Anabasis, VI.—IX. Homer: Ilias, I., II. Memoriert wurde: Homer, Ilias, I., 1—31. Schriftliche Übersetzung ins Deutsche: I. Sem. — Xenophon (nach Schenkl): 1. Anabasis, III., 2—4; 2. Anabasis, II., 13—15; 3. Commentarii, II., 1 (§ 21 u. § 22); 4. Homer (nach Christ) Ilias, XVI., 1—19. Schriftliche Übersetzung ins Deutsche: Xenophon (nach Schenkls Chrestomathie): 1. Anab. III., 2—4; 2. Anab. II., 13—15. 3. Xenophon, Comm. II., 1, §§ 21 u. 22. 4. Homer, Ilias, XVI., 1—19.

I. Klasse: Homer: Ilias, VI., XVI., XVIII., XIX., XXII., XXIV. Herodot: V., 35—38, 49—54, 97, 99—126; VII., 210—228; VIII., 121—125. Plutarch: Perikles (Auswahl). Schriftliche Übersetzung

ins Deutsche: Homer, Ilias (nach Christ): 1. V., 480—500; 2. VI 480—511. Herodot: 3. VII., 5; 4. VII., 235.

VII. Klasse: Demosthenes: I. u. III. olynthische Rede; III. philippis Rede. Homer: Odyssee, I., 1—89, V., VI., VII., IX., XI., XV Memoriert wurde: Dem. Ol. I., § 28. — Hom. Od. I., 1—10; 447—460; XI., 582—600. Schriftliche Übersetzung i Deutsche: Demosthenes: 1. Über die Angel. im Chers., §§ 21— bis *οὐκ ἔχω, τί λέγω;* 2. Kranzrede, §§ 169—170, 174—175; 3. II. p Rede, §§ 9—11. Homer, (Odyssee nach der vollständigen Ausgab 4. VIII., 62—103; 5. XIII., 187—241; 6. XXIII., 25—57.

VIII. Klasse: Platon (nach Huemers Chrestomathie): I. Apologie des Sokrat II. Kriton; III. Erinnerungen an Sokrates; V. Die Ideenlehre, 1, Aristoteles (nach derselben Ausgabe): XV., 1 (Arten der Dichtku und ihre Entstehung). Sophokles: Aias. Homer: Odyssee, XX XXIII. Memoriert wurde: Platon, Apologie, c. 1. Sophokles, Ai 1—35, 596—645. Schriftliche Übersetzung ins Deutsch 1. Xenophon, Hellenika, I., 7, 4—7. 2. Demosthenes, Ol. II., 14—1 3. Platon, Phaidon, pag. 84 D—85 B. 4. Platon, Phaidon, pag. 113 bis 114 B. 5. Sophokles, Oed. Col., 52—72.

β. Privatlektüre*) — unter Anführung der Namen der b treffenden Schüler.

VI. Klasse: 1. Achtner Ludwig: Homer, Ilias, II. 2. David Richar Homer, Ilias, IV. 3. Erben Wilhelm: Herodot, VI., 94—12 4. Fiechtl Bruno: Herodot, III., 1—3, 14, 15, 39—43, 119—12 153—159. 5. Himmel Franz: Xenophon, Commentarii, II., 6. Hübner Franz: Homer, Ilias, IV. 7. Klindert Karl: Hom Ilias, II. 8. Knobloch Rudolf: Herodot, I., 108—130. 9. Miks Ernst: Herodot, III., 1—3, 14, 15, 39—43, 119—125, 153—15 10. Molitor Hans: Homer, Ilias, VII.; Herodot, VI., 1—31. 11. Nowa Konrad: Herodot, IX., 1—10. 12. Ullmann Alfred: Homer, Ilias, I

VII. Klasse: 1. Feistner Friedrich: Lukian, Traum und Ikaromenip Griechische Lyriker (Ausgabe von A. Biese, 1. Aufl.): Kall. 1; Tyrt. 13; Mimnerm. 2, 5, 6; Simon. 69; Sol. 2, 3, 17; Xenoph. 1; Theo 15, 43, 53; Archil. 1, 3, 5, 71, 85; Alkm. 8, 65; Alk. 2, 6, 8, 1 17, 18; Sappho 1, 2, 3, 4, 35, 40, 50, 69, 85, 88; Ibyk. 1; Anakr. 2, 5, 9; Scol. 6, 7—10, 16, 23, 25, 44; Anakreontea, 6, 7, 21, 2 Epigr. Plato 14, 15, 20. — 2. Meiniger Ferdinand: Isokrat Panegyrikos.

*) Die Xenopkonlektüre erfolgte nach Schenkls Chrestomathie und die Homerlektü nach Christ.

'III. Klasse: 1. Breuer Rudolf: Platon*), IV. (1 u. 2); VII. 2. Drda Franz: Demosthenes, Rede über die Angelegenheiten im Chersones. 3. Hanff Josef: Sophokles, König Oedipus. 4. Luh Reinhard: Platon, VI.; Demosthenes, Rede über die Angelegenheiten in Chersones. 5. Lukesch Otto: Homer, Ilias, XIV. 6. von Milde Bernhard: Platon, IV. (1 u. 2); VII. 7. Šámal Ladislaus: Sophokles, Antigone. 8. Scholze Ottomar: Demosthenes, I. olynth. Rede. 9. von Scheure Erich: Homer, Odyssee, XXIV. 10. Stärz Karl: Homer, Odyssee, XI.

B. Lehrstoff der evangelischen und der israelitischen Religion.

1. Evangelische Religion A. B.**) Zwei Abteilungen, je 2 tunden wöchentlich. I. Abteilung (I.—III. Kl.): Bibelkunde des alten 'estamentes. Katechismus: 3., 4. und 5. Hauptstück (Gebet des Herrn, die eil. Taufe, das heil. Abendmahl). 12 Kirchenlieder wurden gelernt. — I. Abteilung (IV., VI.—VIII. Kl.): Bibelkunde des neuen Testamentes it Lektüre ausgewählter Stellen des griechischen Grundtextes. Kirchen- eschichte bis zur Reformation.

2. Israelitische Religion.**) Zwei Abteilungen, je 2 Stunden öchentlich. I. Abteilung (I.—III. Kl.): Von der Spaltung des Reiches is zu den Makkabäerkämpfen. Hebräische Lektüre: Ausgewählte Stellen us dem Pentateuch. Hebräische Grammatik. Liturgik. — II. Ab- eilung (IV.—VI. Kl.): Geschichte des Judentums vom Jahre 70 . Chr. bis 1492. Hebräische Lektüre: Ausgewählte Gebete, besonders ür das Neujahrsfest und den Versöhnungstag. Hebräische Grammatik.

III. Lehrbücher.

1. Obligate Gegenstände.

a) Religionslehre. *α*) Katholische Religion: I. u. II. Kl.: Großer Katechismus der katholischen Religion; Zetter, Kath. Liturgik, 5. Aufl.

III. Kl.: Zetter, Kath. Liturgik, 5. Aufl.; Fischer, Geschichte der göttlichen Offenbarung des alten Bundes, 4.—10. Aufl.

IV. Kl.: Deimel, Neues Testament.

'.—VII. Kl.: Wappler, Lehrbuch der katholischen Religion für die oberen Klassen des Gymnasiums: I. T., 3.—9. Aufl., II. T., 2.—8. Aufl., III. T., 6. u. 7. Aufl.

'III. Kl.: Bader, Lehrbuch der Kirchengeschichte, 4. Aufl.

---

*) Nach Huemers Chrestomathie.

**) Da die Schülerzahl 20, bezw. mehr als 20 betrug, wurde der Unterricht von Seite er Schule sichergestellt.

β) Evangelische Religion A. B.: I. Abt.: Ernesti, Der kleine Katech
mus Luthers in Fragen und Antworten, 40. Aufl. — II. Ab
Hagenbach, Leitfaden zum christl. Religionsunterrichte, 8. A
Für beide Abt.: Gesangbuch f. d. evang. Kirche in Württe
berg; Das neue Testament, übersetzt v. Dr. M. Luther.

γ) Israelitische Religion: I. Abt.: Israelitisches Gebetbuch, vom mäh
schl. israel. Lehrerverein herausgegeben, 5. Aufl.; Levy-Ba
Biblische Geschichte, 13. Aufl. — II. Abt.: Isr. Gebetbuch; Hec
und Kayserling, Lehrbuch der jüdischen Geschichte und Literat
Neu bearbeitet von Biach.

b) Deutsche Sprache. I.—IV. Kl.: Tumlirz, Deutsche Sprachlehre, 4. Au

I.—IV. Kl.: Lampel, Deutsches Lesebuch: I. Bd., 15. Aufl.; II. Bd., 11. Auf
III. Bd., 5.—10. Aufl.; IV. Bd., 8.—10. Aufl.

V. u. VI. Kl.: Lampel-Langer, Deutsches Lesebuch für die oberen Klasse
1. Teil, 6. Aufl., II. Teil, 7. Aufl. — Wiesner, Lehrbuch für d
deutschen Unterricht in den oberen Klassen österr. Gymnasien.

VII. u. VIII. Kl.: Kummer u. Stejskal, Deutsches Lesebuch: VII. Bd., 5.
6. Aufl.; VIII. Bd., 6. Aufl.

c) Lateinische Sprache. I.—VIII. Kl.: Schmidt-Thumser, Lateinisch
Grammatik, 8.—11. Aufl.

I. Kl.: Hauler, Lat. Übungsbuch, I. T., 20. Aufl.

II. „ Hauler, Lat. Übungsbuch, II. T., 18. Aufl.

III. „ Golling, Chrestomathie aus Cornelius Nepos und Q. Curtius Rufu
3. Aufl. — Hauler, Kasuslehre, 8.—11. Aufl.

IV. „ Prammer, Cæs. bellum Gallicum, 10. Aufl. — Golling, wie in d
III. Kl. — Hauler, Moduslehre, 6.—8. Aufl.

V. „ Zingerle-Scheindler, T. Livius, 5.—7. Aufl. — Sedlmayer, Ausg
wählte Gedichte des P. Ovidius Naso, 6. u. 7. Aufl. — Paul, Cæsa
De bello civili. — Sedlmayer und Scheindler, Lat. Übungsbuc
für die oberen Klassen der Gymnasien, 5. Aufl.

VI. „ Scheindler, Sall. bellum Iugurthinum, 3. Aufl. — Nohl, Cicer
Reden gegen Catilina, 3. Aufl. — Klouček, Vergils Aeneis, 4.—
Aufl. — Lat. Übungsbuch, wie in der V. Klasse.

VII. „ Cicero: Rede für den Dichter Archias, 3. Aufl., in Verrem, ac
II., lib. IV., herausgegeben von Nohl, 3. Aufl.; Laelius de amicitia
2. Aufl., herausgegeben von Schiche. — Vergil und Lat. Übungs
buch, wie in der VI. Kl.

VIII. „ Weidner, Tacitus' Historische Schriften, 2. Aufl. — Huemer
Horatii carmina selecta, 6. u. 7. Aufl. — Lat. Übungsbuch wi
in der V. Klasse.

III.—VIII. Kl.: Stowasser, Lat. Wörterbuch, 3. Aufl.

d) Griechische Sprache. III.—VIII. Kl.: Curtius-Hartel von, Griechische Schulgrammatik, 24.—26. Aufl., bearbeitet von Weigel.

III. und IV. Kl.: Schenkl, Griechisches Elementarbuch, 21. Aufl.

V. Kl.: Schenkl, Chrestomathie aus Xenophon, 13.—15. Aufl., Übungsbuch, 11. u. 12. Aufl. — Christ, Homers Ilias in verkürzter Ausgabe, 3. Aufl.

VI. „ Christ, Homers Ilias, wie in der V. Kl. — Scheindler, Herodot, 1. Teil, Text, 2. Aufl. — Schickinger, Auswahl aus Plutarch. — Schenkl, Chrestomathie und Übungsbuch, wie in der V. Kl.

VII. „ Wotke, Demosthenes' ausgewählte Reden, 3.—5. Aufl. — Christ, Homers Odyssee in verkürzter Ausgabe, 4. Aufl. — Schenkl, Übungsbuch wie in der V. Kl.

VIII. „ Huemer, Chrestomathie aus Platon nebst Proben aus Aristoteles, I. Teil. — Sophokles: Aias, herausgegeben von Schubert, 5. Aufl. — Homers Odyssee, wie in der VII. Kl. — Schenkl, Übungsbuch, wie in der V. Kl.

—VIII. Kl.: Schenkl, Griechisch-deutsches Wörterbuch.

e) Geographie und Geschichte. I. Kl.: Weingartner, Grundzüge der Erdbeschreibung, 5. Aufl.

u. III. Kl.: Weingartner, Länder- und Völkerkunde, 5. Aufl.

IV. Kl.: Mayer, Geographie der österreich.-ungar. Monarchie, 7. u. 8. Aufl.

u. VI. Kl.: Müllner, Erdkunde für Mittelschulen, Ausgabe A, IV. u. V. Teil.

u. IV. Kl.: Gindely—Würfel, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen: I. Teil, 11.—15. Aufl.; III. Teil, 13. Aufl.

II. Kl.: Mayer, Lehrbuch der Geschichte für die unteren Klassen, II. Teil, 6. Aufl.

—VII. Kl.: Gindely-Tupetz, Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die oberen Klassen: I. Bd., 12. Aufl.; II. Bd., 11. Aufl.; III. Bd., 13. Aufl.

II. Kl.: Zeehe und Heidrich, Österreichische Vaterlandskunde für die VIII. Gymnasialklasse, 3. Aufl.

–VIII. Kl.: Kozenn, Geographischer Schulatlas, bearbeitet von Haardt und Schmidt, 40.—42. Aufl.

—VIII. Kl.: Putzger, Historischer Schulatlas, 11.—32. Aufl.

f) Mathematik. I. Kl.: Jakob, Arithmetik für Gymnasien, 1. Teil.

–III. Kl.: Hočevar, Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen, 5. u. 6. Aufl.

–III. Kl.: Hočevar, Lehr- und Übungsbuch der Geometrie für Untergymnasien, 9., bez. 6.—8. Aufl.

V. Kl.: Jacob, Lehrbuch der Arithmetik, Mittelstufe.

V.—VIII. Kl.: Močnik-Neumann, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra f
die oberen Klassen der Mittelschulen, 26.—30. Aufl.
IV.—VIII. Kl.: Močnik-Spielmann, Lehrbuch der Geometrie für die IV.
VIII. Kl., 26., bez. 23.—25. Aufl.
VI.—VIII. Kl.: Schlömilch, Logarithmen, 12.—16. Aufl.

g) Naturgeschichte. I. u. II. Kl.: Pokorny-Latzel, Tierkunde, Ausgabe
29. Aufl.; Pokorny-Fritsch, Pflanzenkunde, 25. Aufl.
V. Kl.: Abel u. Himmelbauer Mineralogie und Geologie. — Wettstein, Le
faden der Botanik, 3. u. 4. Aufl.
VI. Kl.: Graber, Leitfaden der Körperlehre und Tierkunde, bearbeitet v
Altschul und Latzel, 6. Aufl.

h) Physik, Chemie und Mineralogie. III. u. IV. Kl.: Höfler u. Ma
Naturlehre für die unteren Klassen der Mittelschulen, 1.—4. Aufl.
Gränzer-Schmidt, Grundriß der Mineralogie und Chemie, 2. Aufl.
VII. u. VIII. Kl.: Wallentin, Lehrbuch der Physik für die oberen Klass
der Mittelschulen, 14. Aufl.

i) Philos. Propädeutik. VII. Kl.: Lindner u. Leclair, Lehrbuch der a
gemeinen Logik für höhere Bildungsanstalten, 1.—4. Aufl.
VIII. Kl.: Lindner und Lukas, Lehrbuch der Psychologie, 3. Aufl.

2. Freie Gegenstände.

a) Böhmische Sprache. I. Abteil.: Charvát, Lehrgang der böhmischi
Sprache für deutsche Mittelschulen, 1. Teil, 2.—4. Au
II. Abteil.: Charvát, 1. Teil, wie im I. Kurs, und 2. Teil, 2. u. 3. Au
IV. Abteil.: Rypl, Schulgrammatik, der böhmischen Sprache, 2. Auf
Tieftrunk, Böhm. Lesebuch, I. Teil, 8. Aufl.; Jana Neru
vybrané povídky. Světová knihovna, rediguje Jarosl
Kvapil. č. 292—293.

b) Französische Sprache. Feichtinger, Lehrgang der französischen Sprac
für Gymnasien, I. Teil, 2. Aufl.

c) Gesang. Mende, Liederbuch für Studierende, 4. Aufl.

d) Stenographie. Grimm, Lehrbuch der Gabelsbergerschen Stenograph
für Mittelschulen, I. u. II. Teil, 2. Aufl.

IV. Themen der Aufsätze in der deutschen Sprache.

V. Klasse.

(1, 3, 5, 6, 8, 10 sind Schularbeiten, die übrigen Hausarbeiten.)

1. Hildebrands Begegnung mit Hadubrand. Nach der älteren u
jüngeren Fassung des Hildebrandsliedes. 2. Gottes Strafgericht trifft frev
haften Übermut. Nach den Gedichten „Das Glück von Edenhall“ von Uhla
und „Belsazer“ von Heine. 3. Die mythischen und historischen Elemente i

ibelungenliede. 4. Ans Vaterland, ans teure, schließ dich an, | das halte st mit deinem ganzen Herzen! 5. Die Nationalfestspiele der Griechen. . Gudruns Befreiung. 7. Und dräut der Winter noch so sehr | mit trotzigen ebärden | Und streut er Eis und Schnee umher: | Es muß doch Frühling erden. 8. Die Ursachen der Blüte der mittelhochdeutschen Dichtung. . Kaiser Maximilian I. als Förderer von Kunst und Wissenschaft. 10. Wie ntgeht Reineke der Hinrichtung? Nach Goethes „Reineke Fuchs", 4. und . Gesang.

VI. Klasse.

(1, 3, 5, 6, 8, 10 sind Schularbeiten, die übrigen Hausarbeiten.)

1. Die Begründung der neuhochdeutschen Schriftsprache. 2. Hektors bschied von Andromache. Nach Hom. Il. VI. 3. Des Winters Freuden. . Warum lieben wir unser Vaterland? 5. Die geschichtlichen Grundlagen i Lessings „Minna von Barnhelm". 6. Die Losungsworte der Stürmer und ränger. 7. Ein Prophet gilt nichts in seinem Vaterlande. 8. Die Personen i Goethes „Egmont". 9. Rudolf von Habsburg als Mensch und als Herrscher. 0. Schillers „Karl Moor" und Goethes „Götz".

VII. Klasse.

(1, 3, 5, 6, 8, 10 sind Schularbeiten, die übrigen Hausarbeiten.)

1. Herders Beschäftigung mit dem Volksliede. 2. Österreich als Bollerk gegen die Türken. 3. Die Frauengestalten in Goethes „Götz". 4. Jeder t seines Glückes Schmied. 5. Die Stählung des Körpers im Winter. 6. Wie rhält sich Goethes „Iphigenie" zu der des Euripides? 7. Worin besteht der ruud der Entzweiung zwischen Tasso und Antonio? 8. Josef II., ein Volksiiser. 9. Wodurch ist die Anhänglichkeit des Menschen an seine Heimat gründet? 10. Schillers dichterische Entwicklung bis zum Jahre 1794.

Redeübungen.

ie Namen der Schüler, welche Redeübungen gehalten haben, stehen in Klammern.)

1. Die deutsche Hansa. (Meiniger). 2. Die Leiden des jungen Werther. rosche.) 3. Die Rübezahlsage mit besonderer Berücksichtigung der Volksärchen des Musäus. (Herzog.) 4. Goethes Eltern. (Granzner.) 5. Über Clavigo". (Conrath.) 6. Schubarts Leben und Werke. (Hüttel.) 7. Die offgebiete in Goethes Lyrik. (Preißler.) 8. Deutsche Dichter des 18. Jahrnderts als Maler und Zeichner. (Feistner.) 9. Die Charaktere in Schillers Braut von Messina". (Richter Josef.) 10. Goethes „Achilleis". (Hrnčíř.) . Die Entwicklung des deutschen Tierepos bis auf Goethe. (Plaschke.) . Schillers „Maria Stuart". (Just.) 13. Schiller und Goethe als Balladenchter. (Quaiser.) 14. Schillers Fragment „Demetrius" und seine Forttzungen. (Mikulec.) 15. Über den Einfluß der französischen Aufklärung f die deutsche Literatur. (Lurtz.)

VIII. Klasse.

(1, 3, 5, 6, 8 sind Schularbeiten, die übrigen Hausarbeiten.)

1. Inwiefern bildet der erste Auftritt in Schillers „Wilhelm Tell“ d Exposition dieses Schauspiels? 2. „Nichtswürdig ist die Nation, die nicht i alles freudig setzt an ihre Ehre“. 3. Die Schuld in Schillers „Braut v Messina“. 4. Die Entstehung und Bedeutung von „Hermann und Dorothea 5. Die Ziele und Erfolge der romantischen Schule. 6. „Dein im Leben, de im Sterben, ruhmbekränztes Vaterland!“ 7. Die Entwicklung der Handlu in „König Ottokars Glück und Ende“. 8. „Den Menschen Liebe und d Göttern Ehrfurcht!“ (Grillparzer.)

Redeübungen.

(Die Namen der Schüler, welche die Redeübung gehalten haben, stehen in Klammer

1. Über Schillers „Demetrius“. (Breuer.) 2. Die antiken Elemente Schillers „Braut von Messina“. (Drda.) 3. Friedrich Hebbel als Dramatik (Eccardt.) 4. Götz von Berlichingen in der Geschichte und in der Goethesch Dichtung. Der Musenhof zu Weimar. (Hanff.) 5. Ein Kulturbild d 16. Jahrhunderts. Unter Benützung von Kleists „Michael Kohlhaas“. (Helze 6. Adalbert Stifter und seine wichtigsten Werke. (Hupka.) 7. Das Leben d Germanen nach Tacitus. (Kaulfersch.) 8. Emanuel Geibel. (Kayser). 9. Goeth „Iphigenie“ im Verhältnis zu dem gleichnamigen Drama des Euripides. (Lul 10. Der dramatische Aufbau der Handlung in Körners „Zriny“. (Lukesch 11. Die Quelle und der geschichtliche Hintergrund in Goethes „Hermann u Dorothea“. (Lux.) 12. Romantik in Schillers „Jungfrau von Orleans“. (Mert 13. Über Nikolaus Lenau. (v. Milde.) 14. „Fiesko“ in der Geschichte u Dichtung. (Pilz.) 15. Detlev von Lilienkron. (Reißig.) 16. Grillparzer a Dramatiker. (Šámal.) 17. „Ein Bruderzwist in Habsburg“. (v. Scheur 18. „Don Carlos“. (Scholze.) 19. Über die Femgerichte. (Sieber.) 20. „D Hermannsschlacht“ von H. v. Kleist. (Simon.) 21. „König Ottokars Glü und Ende“. (Stärz.) 22. Anastasius Grün. (Tertsch.) 23. Theodor Stor (Thiele.)

V. Freie Gegenstände.

a) **Tschechische Sprache** (relativ obligat). I. Abteilung (2 Stunden Lese- und Schreibübungen. Regelmäßige Formenlehre der Redeteile im Anschlus an die Abschnitte I—XXXVI im Lehrbuche. Nacherzählen kürzerer Lesestück Auswendiglernen kurzer Gedichte. Versuche einfacher Gespräche. 5 Schu arbeiten im Schuljahre. II. Abteilung (2 Stunden): Umfassende Wiede holung des Lehrstoffes der I. Abteilung. Regelmäßige Formenlehre na dem 1. und 2. Teile des Lehrbuches. Systematische Behandlung der Fürwört sowie der Zahlwörter. Übungen in den Grundrechnungsarten in tschechisch Sprache. Beginn der Lehre vom Zeitworte. Im Anschlusse an die Lektü

ach dem 2. Teile des Lehrbuches Übungen in der freien Wiedergabe des elesenen. Einfache Gespräche. Gelegentlich Lektüre ausgewählter Abschnitte ıs den „Pražské Noviny“. 6 Schularbeiten. IV. Abteilung (2 Stunden): ektüre: Nach Tieftrunk, I. Teil, und Jan Neruda: Výbor povídek. chriftliche und mündliche Übungen über Gegenstände des Alltags, Nach-ːzählungen in tschechischer Sprache, Auswendiglernen größerer Gedichte. rammatik: Systematische Wiederholung der Formenlehre mit besonderer ervorhebung und Durcharbeitung der Lehre vom Verbum. Die Hauptpunkte er Syntax und Stilistik, im Anschlusse daran praktische Beispiele, mündlich nd schriftlich. Literaturgeschichte: Kurzer Überblick über die tsche-ıische Literatur der alten Zeit (von den Anfängen bis zum Auftreten des ɔhannes Hus). 6 Schularbeiten.

b) **Französische Sprache,** II. Kurs (2 Stunden): Lektüre von 50 Ab-ːhnitten des Übungsbuches. Sprechübungen. Grammatik: Eingehende Wieder-ɔlung der regelmäßigen und der unregelmäßigen Zeitwörter. Wiederholende urcharbeitung der ganzen Formenlehre. Wichtige Partien der Syntax, esonders Gebrauch der Modi, der persönlichen Fürwörter und der Tempora, rner die Regeln der consecutio temporum. Schreibübungen. In jedem emester 3 Schularbeiten.

c) **Freihandzeichnen,** 3 Kurse, je 2 Stunden. Dem zweiten Kurse gehörten e Schüler der II. Kl. an, dem dritten die der III. und IV. Kl. und dem erten die Schüler des Obergymnasiums. Der Unterricht wurde nach dem ehrplane vom Jahre 1891 und im Sinne der Instruktionen vom Jahre 1900 teilt.

d) **Turnen,** 3 Abteilungen, je 2 Stunden. Die erste Abteilung bestand aus chülern der I. und der II. Kl., die zweite aus Schülern der III. und V. Kl. und die dritte aus Schülern des Obergymnasiums. Die Unterrichts-teilung erfolgte gemäß dem Lehrplane vom Jahre 1897.

e) **Gesang,** 3 Abteilungen und ein Kirchenchor, je 1 Stunde. I. und . Abteilung: Die Elemente der allgemeinen Musiklehre. Stimmbildungs-, reff- und Atemübungen. Ausbildung des musikalischen Gehörs. Das Volkslied. stimmige und 3stimmige Lieder. III. Abteilung (Männerchor): All-emeine Musiklehre. Das Wichtigste aus der Musikgeschichte. Einüben von ännerchören. In allen 3 Abteilungen: Einüben der Chöre für das öffent-che Schülerkonzert. Kirchenchor: Kirchenlieder, Messen und Kirchenchöre.

f) **Stenographie,** I. Kurs (2 Stunden): *a)* Wortbildung: die steno-raphischen Schriftzeichen; Vokalisation; Eigennamen; Wortzusammen-tzung; Sigel. *b)* Wortkürzung: Eigenschafts-, Für- und Geschlechtswörter; orwörter; Hilfszeitwörter; Hauptzeitwörter. Vor- und Nachsilben. Übersicht ber die Sigel und die Kürzungen. Zahlen, Partikeln. Schreib- und Lese-ɔungen und Diktate mit steigender Geschwindigkeit bis zu 60 Wörtern in er Minute.

VI. Unterstützung der Schüler.

a) Stipendisten.

Post-Nr.	Name des Stipendisten.	Klasse.	Bezeichnung des Stipendiums.	Verleihung.	Betrag in Kronen
1	Altschul Rudolf.....	I.	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen.	21. April 1911, Z. 28.426 — Fin.-M.	200·—
2	Bergmann Anton	III.	Anna Trenkler'sche Studentenstiftung.*	15. Juni 1911, Z. 267 — Gymnasialdirektion.	12·40
3	Breuer Eduard.....	III.	Handstipendium der Reichenberger Sparkassa.*	11. November 1910, Z. 302.	100·—
4	Buchelt Adolf.....	IV.	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen.	9. August 1906, Z. 51.649 — Fin.-Min.	200·—
5	Hesse Edmund	V.	Ludwig Hlasiwetz'sche Studentenstiftung	10. Sept. 1910, Z. $\frac{83/8}{27}$ W. — Stadtrat Reichenberg.	429·77
6	Johne Emil	VI.	Dr. Adolf Neustadtl'sche Studentenstiftung.	28. August 1907 — Sparkassa-Direktion Kratzau.	126·—
7	Josel Franz	V.	Anna und Josef Anton Ginzel'sche Studentenstiftung	29. Dez. 1910, Z. $\frac{150/7}{3}$ W. — Stadtr. Reichenberg.	88·35
8	Kasper Otto.....	III.	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen.	Dezember 1908, Z. 175.930/II. — Finanzlandesdirektion in Prag.	200·—
9	Knobloch Rudolf	VI.	Dr. J. G. Herrmann'sche Studentenstiftung.	12. November 1908, Z. 238.075 — St.	112·—
10	Kögler Johann.....	IV.	a) Handstipendium der Reichenberger Sparkassa *	11. November 1910, Z. 302.	100·—
			b) Auguste Seidel'sche Studentenstiftung.	25. April 1911, Z. 13 A — 524 — St.	96·—
11	Kramer Gotthard....	VI.	Handstipendium der Kaiser Franz Josef-Stiftung.*	Konferenz-Beschluß vom 26. Nov. 1910.	100·—
12	Krombholz Rudolf...	V.	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen.	28. Dezember 1910, Z. 85.505 — Fin.-Min.	300·—
13	Kurzweil Heinrich...	IV.	P. Josef Lichtner'sche Studentenstiftung.	17. April 1908, Z. 76.794 — St.	160·—
14	Link Otto	II.	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen.	24. November 1909, Z. 163.918/II. — Finanzlandesdirektion in Prag.	200·—
				Fürtrag	2424·52

*) Wird immer nur für 1 Jahr verliehen.

Post-Nr.	Name des Stipendisten.	Klasse.	Bezeichnung des Stipendiums.	Verleihung.	Betrag in Kronen.
				Übertrag	2424·52
15	Meiniger Ferdinand..	VII.	Ludwig Hlasiwetz'sche Studentenstiftung.	7. Jänn. 1910, Z. $\frac{83/8}{23}$ W. — Stadtrat Reichenberg.	429·77
16	Mertz Hugo	VIII.	Handstipendium der Kaiser Franz Josef-Stiftung.*	Konferenz-Beschluß vom 26. Nov. 1910.	100·—
17	von Milde Bernhard.	VIII.	P. Georg Bilek von Bilenburg'sche Studentenstiftung, Platz Nr. 1.	8. Jänner 1908, Z. 370.889 ai 1907 — St.	360·—
18	Moeller Ernst.....	V.	Hugo Gaberle'sche Studentenstiftung.	1. Dezember 1909, Z. 209.124 — St.	158·—
19	Möller Ernst	V.	Kaiser-Hochzeits-jubiläums-Stiftung.*	Konferenz-Beschluß von 5. Mai 1911.	48·—
20	Möller Rudolf.....	VI.	Karl Hübner'scher Stiftungsplatz für einen deutschen Gymnasialschüler.	5. September 1906, Z. 191.899 — St.	1500·—
21	Plaschke Franz	VII.	Handstipendium der Kaiser Franz Josef-Stiftung.*	Konferenz-Beschluß vom 26. Nov. 1910.	100·—
22	Pohl Richard	VI.	Ludwig Hlasiwetz'sche Studentenstiftung.	10. Sept. 1910, Z. $\frac{83/8}{27}$ W. — Stadtrat Reichenberg.	429·77
23	Richter Josef	VII.	Wenzel Trenkler'sche Studentenstiftung.	16. April 1910, Z. 1417 — Erzdekanalamt Reichenberg.	104·—
24	Rüffler Julius.....	IV.	P. Josef Tobias Schöpfer'sche II. Studentenstiftung, Platz Nr. 2.	17. Feber 1910, Z. 30.290 — St.	170·—
25	Šámal Ladislaus	VIII.	Kaiser Ferdinand'sche Studentenstiftung bürgerlicher Abteilung, Platz Nr. 66.	23. Feber 1910, Z. 37.600 — St.	240·—
26	Siegmund Josef	V.	Handstipendium der Kaiser Franz Josef-Stiftung.*	Konferenz-Beschluß vom 26. Nov. 1910.	100·—
27	Simon Ludwig	VIII.	Handstipendium der Reichenberger Sparkassa.*	11. November 1910, Z. 302.	100·—
28	Zaschel Ernst	IV.	P. Florian Appelt'sche Studentenstiftung.	19. Dezember 1907, Z. 352.906 — St.	220·—
29	Zita Rudolf.....	VI.	Ludwig Hlasiwetz'sch Studentenstiftung.	7. Jänn. 1910, Z. $\frac{83/8}{23}$ W. — Stadtrat Reichenberg.	429·77
				Summa..	6913·83

*) Wird immer nur für 1 Jahr verliehen.

b) Verwaltung des Unterstützungsfondes.

I. EINNAHMEN.

Name des Spenders, bez. Bezeichnung der Einnahme.	Betrag. K	h
Stadtgemeinde und Gemeindesparkasse Reichenberg pro 1909/10 und 1910/11 je 100 K	200	—
Reichenberger Sparkasse pro 1910	200	—
Bezirksvertretung Reichenberg pro 1911	100	—
Herr Oberlandesgerichtsrat Josef Zimmert	10	—
Herr Dr. Emil Molitor in Maffersdorf	20	—
Herr Franz Pompl in Wien	20	—
Herr Prof. Karl Hanofsky in Reichenberg statt eines Kranzes für den † Prof. Himml	10	—
Lehrkörper der Anstalt statt eines Kranzes für den † Vater des Prof. Himml	13	—
Die Schüler der III. Kl. anläßlich des Ablebens des Prof. Himml	15	50
Jirousek Josef, Schüler der IV. Kl., als Finderlohn	—	60
Reinerträgnis des öffentlichen Schülerkonzertes	753	—
Die Schüler der I. Klasse	18	30
„ „ „ II. „	20	10
„ „ „ III. „	22	92
„ „ „ IV. „	40	82
„ „ „ V. „	18	—
„ „ „ VI. „	13	30
„ „ „ VII. „	12	10
„ „ „ VIII. „	5	30
Zinsen der Kaiser Franz Josef-Stiftung	400	—
Barrest aus dem Vorjahre	888	35
Zusammen. .	2781	29

Kosttage.

Kosttage entweder in natura oder in besonderen Geldbeträg verabreichten folgende Frauen und Herren: Adelheid Knižek (2), Baronin Ma Theodor von Liebieg (10), Marie Schmidt (1), Ida Schmidt Ginzkey (1) . . . . . 1 Dr. Franz Bayer (1), Dr. Max Brey (1), Emanuel Conrath (1), Dr. Adolf Demuth (Ludwig Edelstein (1), Dr. Karl Hofrichter (1), Alfred Hübner (1), Karl Jakob (1), Ferdina Jantsch (2), Daniel Jerusalem (1), Vincenz Matouš (1), Dr. Alfred Müller (2), Dr. Jo Müller (1), Alois Neumann (1), Karl Neumann (1), Dr. Ernst Neustadtl (1), Dr. Gust Pilz (1), Ludwig Schulhof (1), Ernst Edler von Siegmund (7), Vinzentinum (2), Dr. Ottok Weydlich (2) 3

Diese 45 Kosttage genossen 17 Schüler. Auf Kosten des Unterstützungsfondes d Anstalt erhielten 19 Schüler 29 Kosttage. Demnach betrug die Zahl sämtlicher Kosttage 7

Aus der Bibliothek des Unterstützungsfondes wurden 785 Schulbücher 94 Schüler zur Benutzung verteilt.

Für diese Bibliothek spendeten Schulbücher: Herr Emanuel Wildner (5), da die Wiener Verlagsbuchhandlungen Deuticke (12), Fromme (3), Karl Gerold's Sohn (1

lder (48), Hölzel (2), Manz (4), Pichler (6), Tempsky (48) und die Grazer Verlags-chhandlung Styria (3).

Der Papierhändler, Herr Josef Elger, schenkte zur Verteilung an arme Schüler schiedene Schreibrequisiten im Betrage von etwa 12 Kronen.

Der Verein der Musikfreunde und der Lehrergesangverein Silcher übermittelten zu em Konzerte für mittellose Schüler mehrere Freikarten.

Es wird besonders darauf aufmerksam gemacht, daß im Stephanshospitale Reichenberg 2 Krankenbettstiftungen bestehen, die P. Anton Bartel'sche und P. Vinzenz Schlegel'sche. Auf Kosten dieser Stiftungen finden dürftige Schüler im le der Erkrankung im Stephanshospitale Aufnahme, Wartung und Verpflegung.

II. AUSGABEN.

Art der Ausgabe.	Betrag. K	h
1 Handstipendien der Kaiser Franz Josef-Stiftung à 100 K	400	—
Ankauf von Schulbüchern für den Unterstützungsfond	485	16
Auslage für Buchbinderarbeiten	75	70
Aufwand für 29 Kosttage	460	—
Beitrag zu den Kurkosten für einen Schüler	40	—
Beitrag zum Schulgelde für einen Schüler	20	—
Kosten der Anschaffung von Kleidern für 33 Schüler	837	20
„ „ „ „ Schuhen „ 8 „	94	—
Beitrag zu den Kosten für „Schülerfahrten“ 1911	60	—
Verschiedene Auslagen	22	46
Zusammen . . .	2494	52
Einnahmen . . .	2781	29
Barrest . . .	286	77

III. VERMÖGENSSTAND

am 30. Juni 1911.

a) 4% Kronenrente im Nominalwerte von	17.500 K	— h
b) Kapital der Kaiser Franz Josef-Stiftung, 4% Kronenrente	10.000 „	— „
c) Einlage in der Reichenberger Sparkassa	3.899 „	74 „
d) Bar-Kassarest	286 „	77 „
Zusammen . . .	31.686 K	51 h

Die Direktion sagt allen Wohltätern den herzlichsten Dank. Besonderer Dank hrt Seiner Hochwürden Herrn Pfarrer Anton Hirschmann und den ehrwürdigen vestern des heil. Vinzenz von Paul für die Mühe und Sorge, die sie den 16 ins zentinum“ aufgenommenen Schülern der Anstalt angedeihen ließen.

VII. Vermehrung der Lehrmittel-Sammlungen.

A. Einnahmen.

1. Aufnahmstaxen	298 K	2
2. Taxen für Duplikate	8 „	–
3. Lehrmittelbeiträge der Schüler	602 „	–
Zusammen	908 K	2

B. Zuwachs (im letzten Schuljahre).

1. Lehrerbibliothek.

a) Geschenke.

α) Fortsetzungen:

Vom k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht: Jah hefte des Österreichischen Archäologischen Instituts, XIII. Band, 1. H Vom Landesarchiv des Königreiches Böhmen in Prag: Mitteilun aus dem Landesarchiv des Königreiches Böhmen, III. Band. Vom Le körper der Anstalt: Jahrbuch der Grillparzer-Gesellschaft, XIX. Ja gang, 1910. Mitteilungen des Vereines für Geschichte der Deutschen Böhmen, XLVIII. Jahrgang, 1 Heft, XLIX. Jahrgang, 2 Hefte.

β) Neue Werke.

Vom k. k. Ministerium für Kultus und Unterricht: Edu Pötzl, Gesammelte Skizzen. Vom Verfasser gesichtete Ausgabe in 6 Bänd Von dem k. k. Professor i. R. Dr. Theodor Watzel: Bonnechose E. Johann Huß und das Konzil zu Kostnitz. Dr. Robert Bonnet, Grundriß Entwicklungsgeschichte der Haussäugetiere. Dr. Julius Sachs, Handbuch Experimental-Physiologie der Pflanzen. IV. Band des Handbuches der phy logischen Botanik, herausgegeben von W. Hofmeister. Vom k. k. Supplent Dr. Gustav Jungbauer: Gustav Jungbauer, Volksdichtung aus Böhmerwalde. VIII. Band der „Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskun geleitet von Prof. Dr. A. Hauffen. Von Gaspard A. Zarándy: Gaspard Zarándy (Stefezius de Thurstern) in Garamkövesd, Comitat Hont in Unga Les Szemere descendants du conquérant Huba un de sept ducs fondateurs la Hongrie en 889.

b) Kauf.

α) Fortsetzungen:

Österreichische Gymnasialzeitschrift, 1911. Botanische Zeitschrift, 19 Poske, Zeitschrift für den chemischen und physikalischen Unterricht, XXIV. Ja gang. Monatsschrift für höhere Schulen, herausgegeben von Köpke und M thias, 1911. Körperliche Erziehung, Zeitschrift für reales Leben, herau geben von Dr. V. Pimmer, 1910 und 1911. Deutsche Rundschau für G graphie, herausgegeben von Umlauft—Hassinger, XXXIII. Jahrgang. Bro

lassen und Ordnungen des Tierreiches, VI. Band, 1. Abt., 32. u. 33. Lieferung. ·imm, Deutsches Wörterbuch, X. Band, 2. Abt., 7. Lieferung; IV. Band. Abt., 3. Teil, 11. Lieferung.

β) **Neue Werke:**

Frick, Physikalische Technik, I. Band, 2. Teil. Dr. Menge, Oden des ›raz. Donner, Euripides, deutsch im Versmaß der Urschrift. Dr. Kiefer, örperlicher Schmerz und Tod auf der attischen Bühne. Kirchmann, Aristoteles' litik, übersetzt und erläutert. Keller, Lateinische Volksetymologie und Ver- ndtes. Luckenbach, Kunst und Geschichte, Große Ausgabe, Altertum. nde, Gudes Erläuterungen zur deutschen Dichtung, Band VI: Die neue utsche Lyrik. Kauffmann, Deutsche Grammatik, Laut- und Formenlehre s Gothischen, Alt-, Mittel- und Neuhochdeutschen. Bartels, die deutsche chtung der Gegenwart. Hesse, Meisterwerke der deutschen Bühne, je 4 sgaben von: Die Braut von Messina, Egmont, Das Goldene Vlies, Iphigenie f Tauris, Die Jungfrau von Orleans, Maria Stuart, Sappho. von Treitschke, lder aus der deutschen Geschichte, 2 Bände. von Rümker, Methoden der lanzenzüchtung in experim. Prüfung. Höfler—Witasek, Psychologische Schul- rsuche mit Angabe der Apparate. Dr. Steinwenter, Paedagogica Austriaca, ickblick eines alten Schulmannes. Dr. Ullmann, Anleitung zur sexuellen ıfklärung und Erziehung. Die Enquete zur körperlichen Erziehung im k. Ministerium für Kultus und Unterricht. Bittner, Systematisch geordnetes rzeichnis der Programm-Arbeiten österreichischer Mittelschulen, 1. und 2. Teil.

2. Lehrmittelsammlung für Geographie.

Kauf. Rothaug, Wandkarte der österreichischen Alpenländer und Wand- rte der Sudetenländer. Freytag und Umlauft, Wandplan von Wien.

3. Schüler-Bibliothek.

Geschenke. Von der Verlagsbuchhandlung F. Tempsky in Wien folgende hulausgaben: Rosegger, Peter Mayr, Der Wirt an der Mahr; H. v. Kleist, chael Kohlhaas; E. T. A. Hoffmann, Meister Martin; Kleist, Der zerbrochene ug; Hans Bartsch, Zwölf aus der Steiermark; J. J. David, Der Übergang; nil Ertl, Die Leute vom blauen Guguckshaus; R. Hamerling, Aspasia. Von m Verfasser, Hrn. Theodor Hutter in Reichenberg: Hutter, Der Jeschken in schichte, Sang und Sage; In der Fremdenlegion. Vom Verfasser Hrn. Maxi- lian Kern in Stuttgart, ehemaligen Schüler der Anstalt: Kern, das Auge s Fo. Vom Prof. F. Kühnl: Nagel, Die Hauptwerke der deutschen Lite- ur im Zusammenhange mit ihrer Gattung erläutert. Von dem ehemaligen hüler Eugen Proisel: Moderne Lyriker, I.: Detlev von Lilienkron. Von dem emaligen Schüler Ad. Stracke: Immermann, Der Oberhof. Von dem Schüler r 8. Klasse, Ed. Sieber: Höcker, Der Kampf um Thron und Ehre; Hilde- ndt—Strehlen, Walter von Aquitanien.

Kauf. R. Baron, Aus dem Leben zweier Schüler. Deutsches Knab buch, XXI. Band. Knabenfreund. Robert Reinick, Märchen, Lieder und schichten. Ebner-Eschenbach, Ein Buch für die Jugend. Schnürer, Ha burger Anekdoten. W. Alexis, Der falsche Woldemar. Mark Twain, T Sawyers neue Abenteuer. F. W. Förster, Lebenskunde. Das große Weltpa rama, III. Band. Uhland, Gedichte. Karl Braun, Imperator pacis. Lilienkr Deutsches Leben im Volkslied um 1530. Franz Muncker, Bremer Beiträg I. u. II. Band; ders., Anakreontiker. A. Sauer, Der Göttinger Dichterbu II. u. III. Band. J. Lahr, Hans Sachs (Göschen Nr. 24). Bobertag, Si plicius Simplicissimus. Ramisch, Eddalieder. Widmann, Spaziergänge in d Alpen. Schumann, Gesammelte Schriften über Musik und Musiker. W. Ra Der Hungerpastor.

4. Lehrmittelsammlung für Physik.

Kauf. Apparat zur graphischen Darstellung der parabolischen Bahn worfener Körper. Modell eines Wellrades. Luftthermoskop nach Gali Döbereinersche Zündmaschine. Modell des Grammeschen Ringes zur Dem stration von Gleich-, Wechsel- und Drehstrom. Schröder, Wandtafeln für d Chemieunterricht (7 Stück).

5. Lehrmittelsammlung für Naturgeschichte.

Kauf. Mikroskopstativ VII. von R. Reichert mit Abbéschen Konden und Irisblende.

6. Musikaliensammlung.

Geschenk. Vom Komitee zur Veranstaltung des öffentlichen Schül konzertes: J. S. Bach: „Lob und Ehr' dem höchsten Gut." Kantate, 1 Klavi und 1 Harmoniumstimme und 98 Singstimmen. J. Sibelins: Gesang Athener. 1 stimm. Männerchor, 1 Klavier- und 1 Harmoniumstimme u 37 Singstimmen. H. Wolf: Wächterlied auf der Wartburg. 1 stimm. Männ chor, Klavierauszug und 35 Stimmen. L. von Beethoven: Opferlied. gemischter Chor, Klavierauszug mit 119 Stimmen. R. Schumann, Zigeun leben. Gemischter Chor, 91 Stimmen. K. Reinecke: Frühlingskonzert. 2 stim Knabenchor, 141 Stimmen. A. Cebrian: Aller Anfang ist schwer. 3 stim Knabenchor, 113 Stimmen. A. Wandelt: Spatzengesang. 3 stimm. Knab chor, 93 Stimmen.

C. Stand der Sammlungen am Schlusse des Schuljahres.

Name der Sammlung.	Zuwachs. 1910—1911.	Stand: Ende.	Name der Sammlung.	Zuwachs. 1910—1911.	Stand: Ende.
ehrerbibliothek:			Wandtafeln	7	23
Inventarnummern	24	1510	Utensilien	7	50
in Bänden	38	3628			
in Heften	36	266	Zoologische Sammlung:		
Programme	206	6482	Wirbeltiere	—	639
chülerbibliothek:			Andere Tiere	—	2027
Gesamtnummern und			Sonst. zoolog. Gegenstände	—	323
Bände	40	1580*)	Gebrauchsgegenstände . .	—	2
eograph. Sammlung:			Botanische Sammlung:		
Wandkarten	3	136	Herbariumblätter	—	4382
Atlanten	—	24	Sonst. botan. Gegenstände.	—	195
Globen	—	4			
Tellurien	—	2	Mineralog. Sammlung:		
Plastische Karten	—	3	Naturstücke	—	2218
Geschichtliche und geo-			Kristallmodelle	—	883
graph. Charakterbilder .	—	115	Naturhist. Abbild. (in Bl.)	—	5018
Naturgeschichtliche Objekte	—	44	Naturhist. Apparate . .	1	28
Modelle nebst Tafeln . . .	—	4			
Stereoskop mit Bildern . .	—	56	Zeichnen:		
chäolog. Kabinett:			Drahtmodelle	—	22
Apparate	—	1	Holzmodelle	—	78
Photographien	—	43	Gipsmodelle	—	324
Wandtafeln	—	1	Vorlegeblätter und Wand-		
ometrie:			tafeln	—	2582
Körper und Modelle . . .	—	37	Apparate	—	14
Apparate	—	1	Utensilien	—	25
ysikal. Kabinett:			Musikaliensammlung:		
Apparate	5	497	Partituren samt Singst.,		
hemische Apparate und			bezw. Orchesterst. . . .	8	289
Gebrauchsgegenstände .	—	198	Münzensammlung . . .	—	3300

*) Nach Ausscheidung von 591 unbrauchbar gewordenen Bänden (L.-S.-R.-E. v. ni 1911, Z. 1 B.—1941).

VIII. Reifeprüfungsergebnisse.

a) Nachtrag zum Schuljahre 1909/10.

Das Ergebnis der mündlichen Reifeprüfung, die am 1., 2., 4. und 5. Juli halten wurde und der sich die 29 öffentlichen Schüler der VIII. Klasse rzogen, war folgendes: Es erhielten 4 Schüler ein Zeugnis der Reife mit eichnung und 24 ein Zeugnis der Reife, darunter 19 mit Stimmeneinhellig- und 5 mit Stimmenmehrheit; 1 wurde auf ein halbes Jahr reprobiert.

Namenliste der approbierten Abiturienten.

Post-Nr.	Name des Abiturienten.	Geburtsort.	Vaterland.	Geburtsdatum.	Dauer der Gymnasialstudien. Jahre.	Grad der Reife.
1	Alexowsky Karl.....	Prag	Böhmen	10./XI. 1890	8	reif mit Stimm einhelligkei
2	Appelt Franz	Alt-Harzdorf	„	5./I. 1891	„	„
3	Bayer Rudolf	Reichenau bei Gablonz	„	17./IV. 1889	„	„
4	Bielau Karl	Reichenberg	„	23./VIII. 1891	„	reif mit Au zeichnung
5	Esterl Ernst	Falkenau a. E.	„	17./X. 1891	„	reif mit Stimm einhelligke
6	Esterl Karl.....	Tetschen	„	30./X. 1890	9	reif mit Stimm mehrheit
7	Feistner Wilhelm....	Reichenberg	„	4./XII. 1891	8	„
8	Fišar Rudolf	Ober-Rosenthal	„	26./X. 1889	„	reif mit Stimm einhelligke
9	Fritsche Otto	Reichenberg	„	23./VI. 1891	„	„
10	Gahler Gustav	Maffersdorf	„	28./IX. 1890	„	„
11	Habenicht Josef.....	Bratřikow	„	26./VI. 1890	„	„
12	Hilscher Alfred.....	Reichenberg	„	21./X. 1891	„	„
13	Hofrichter Anton ...	Ober-Rosenthal	„	23./II. 1891	„	reif mit Au zeichnung
14	Holy Franz.....	Ober-Mallebarn	Nieder-Österreich	24./I. 1892	„	reif mit Stimm mehrheit
15	Hossner Pius	Dohnau	Böhmen	22./I. 1891	„	reif mit Stimm einhelligke
16	Jerusalem Rudolf ...	Rumburg	„	31./X. 1891	„	„
17	Johne Josef.....	Kratzau	„	30./VII. 1891	„	reif mit Au zeichnung
18	Knobloch Josef	Reichenberg	„	18./X. 1890	„	reif mit Stimm einhelligke
19	Liebitzky Emil	Dux	„	5./X. 1892	„	reif mit Au zeichnung
20	Mitfessel Max.....	Reichenberg	„	9./XI. 1891	„	reif mit Stimm einhelligke
21	Moißl Otto	Leitmeritz	„	11./IV. 1891	„	„
22	Nick Edmund	Reichenberg	„	22./IX. 1891	„	„
23	Porsche Wilhelm	Röchlitz	„	6./XI. 1890	9	„
24	Prokop Alois	Kriesdorf	„	7./III. 1890	8	„
25	Reichel Franz	Königl. Weinberge	„	7./IV. 1891	„	„
26	Reißig Julius.....	Weipert	„	22./V. 1888	9	reif mit Stimm mehrheit
27	Sachers Robert.....	Reichenberg	„	20./VI. 1890	„	„
28	Wildner Klemens....	„	„	25./XII. 1892	8	reif mit Stimm einhellig

Von diesen Abiturienten wollten sich zuwenden:

der Theologie	1
„ Staats- und Rechtswissenschaft	14
„ Medizin	6
„ Tierarzneikunde	1
„ Philosophie, u. zw. humanistischen Studien	2
dem Militärberufe	1
„ Konsularwesen	1
„ Eisenbahnwesen	2

b) Schuljahr 1910/11.

Im Februartermine legte 1 Schüler die Reifeprüfung ab und wurde mit immeneinhelligkeit für reif erklärt.

Zur Ablegung der Reifeprüfung im Sommertermine 1911 meldeten sich 23 öffentlichen Schüler und die Privatistin der VIII. Klasse.

Die schriftliche Prüfung wurde am 12., 13. und 14. Juni abgehalten.

Die zur Bearbeitung bestimmten Themen lauteten:

I. Aus der Unterrichtssprache:

a) Die Elektrizität im Dienste der Menschen.

b) Welche geographischen, geschichtlichen und wirtschaftlichen Gründe rechtfertigen die Bezeichnung „Donaustaat" für die österr.-ung. Monarchie?

c) „Die Tugend übt sich schlecht im Glück; das Unglück, Das ist der Boden, wo das Edle reift." (Körner.)

Von diesen 3 Themen wählten 7 Schüler das erste, 10 das zweite und das dritte zur Bearbeitung.

II. Übersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche: Cicero, istulae ad familiares, IV., 5, §§ 4—6 (Kornitzer).

III. Übersetzung aus dem Griechischen ins Deutsche: siod, *Ἔργα καὶ ἡμέραι*, V. 109—142.

Die mündliche Reifeprüfung wird am 10., 11. u. 12. Juli unter dem Vorze des Herrn Moriz Strach, Direktors des deutschen Staatsgymnasiums Prag (II., Graben) abgehalten. Der Bericht hierüber folgt im nächstjährigen ogramme.

IX. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

1. M.-E. vom 16. September 1910, Z. 2666 K.-U. (L.-S.-R.-E. v 21. September 1910, Z. 51.478). Auftrag zur Veranstaltung einer würdi Schulfeier am 4. Oktober 1910 zur Erinnerung an das Fest des 80. Gebu tages Seiner k. und k. Apostolischen Majestät des Kaisers.

2. M.-E. vom 16. Oktober 1910, Z. 28.968 K.-U. (L.-S.-R.-E. v 3. November 1910, Z. 60.221). Einführung des fakultativen Schießunterrich an Mittelschulen.

3. M.-E. vom 31. Dezember 1910, Z. 12.645 K.-U. (L.-S.-R.-E. v 27. Jänner 1911, Z. 1 B—129). Einführung des obligaten Zeichenunterrich an der Anstalt (in der I. Kl. mit Beginn des 2. Sem. 1910/11).

4. M.-E. vom 30. März 1911, Z. 8661 K.-U. (L.-S.-R.-E. vom 7. April 19 Z. III.—B 1107). Anordnung bezüglich der Dauer des Schuljahres und Hauptferien an den Mittelschulen.

X. Chronik.

1910.

Am 1. August trat Prof. Robert Müller in den dauernden Ruhesta Sein Scheiden bedeutet für die Anstalt, der er während seiner ganzen Dienstz vom Jahre 1878/79 bis 1909/10, ununterbrochen angehörte und deren Dien er all sein Wissen und Können widmete, einen großen Verlust. Durch se edlen Eigenschaften, sein nach jeder Richtung musterhaftes Wirken und s ideales Streben war er Lehrern und Schülern vorbildlich. Diese werden sei immer mit Hochachtung gedenken.

18. August: Gottesdienst zur Feier des 80. Geburtstages Seiner k. und Apostolischen Majestät des Kaisers in der Kreuzkirche. Der Lehrkör unterbreitete Seiner Majestät im Wege der k. k. Bezirkshauptmannschaft alleruntertänigsten Glückwünsche.

11. September: Eröffnung des Schuljahres mit einem feierlichen Gott dienste.

4. Oktober: Mit der Feier des Allerhöchsten Namensfestes wurde nachträgliche Feier des 80. Geburtstages Seiner k. und k. Apostolischen Majes des Kaisers verbunden. Nach einem Festgottesdienste in der Kreuzkirche v sammelten sich sämtliche Schüler in zwei Abteilungen im Schulgebäude, in der einen Abteilung der Direktor, in der anderen Prof. Neubauer Bedeutung der seltenen Feier in einer patriotischen Ansprache darlegte.

19. November: Gottesdienst zum Andenken an weiland Ihre Majestät Kaiserin Elisabeth.

2. Dezember: Dieser patriotische Gedenktag wurde vom k. k. Ministerium r Kultus und Unterricht zur Förderung des Zweckes des von der deutschen ndeskommission für Kinderschutz und Jugendfürsorge veranstalteten . deutschen Kinderschutztages" als Ferialtag bestimmt. Die veranstaltete hulfeier hatte den Zweck, die Schüler über die Wichtigkeit des von Seiner jestät dem Kaiser ins Leben gerufene Jugendwohlfahrtswerk „Fürs Kind" fzuklären.

Der Landeskommission wurde der Betrag von 202 K 03 h als Spende ermittelt.

1911.

Am 4. Februar wurde mit dem fakultativen Unterrichte im Schießwesen : die Schüler der VII. und VIII. Kl. begonnen. Den Unterricht erteilte r Hauptmann des k. und k. Infanterie-Regimentes Nr. 74, Viktor Lackner; pplent Dr. Gustav Jungbauer war mit der Überwachung der Schüler betraut.

Am 22. April veranstalteten die Lehrkörper des Staatsgymnasiums und : Staatsrealschule mit Genehmigung des k. k. Landesschulrates vom . März 1911, Z. 1 B—1277 zu Gunsten dürftiger Schüler beider Anstalten Volksgartensaale ein öffentliches Schülerkonzert. Es wirkten mit: Frl. Rosa oß, Herr Jos. Ullrich und der Schüler der VII. R.-Kl., Arm. Proft, als listen, ferner die vereinigten Sängerchöre der beiden Anstalten und das ülerorchester der Staatsrealschule. Der Gesangslehrer Eduard Proksch und : Realschulprofessor Fr. Czech hatten die Leitung. Die Vortragsordnung hielt folgende Nummern: I. Die gemischten Chöre: *a)* J. S. Bach — Sei b und Ehr' dem höchsten Gut! *b)* L. van Beethoven — Opferlied; R. Schumann — Zigeunerleben. II. Die Einzellieder: H. Wolf — Mignon; Brahms — Wie Melodien zieht es mir leise durch den Sinn; R. Strauß — inem Kinde; R. Schumann — Blondels Lied; G. Henschel — Jung- terich. III. Die einstimmigen Männerchöre: J. Sibelius — Gesang der ener; H. Wolf — Wächterlied auf der Wartburg. (Neujahrsnacht des res 1200). IV. Die Knabenchöre: A. Wandelt — Spatzengesang; R. Reinecke Frühlingskonzert. V. Das Violinsolo mit Klavierbegleitung: J. Vieuxtemps Ballade und Polonaise. VI. Die Orchesterstücke: W. A. Mozart — verture zur Oper „Die Entführung aus dem Serail"; R. Kühnel — *a)* Heinzel- nnchen, *b)* Wiesenreigen (Aus „Dorfbilder"). Das Konzert hatte einen h jeder Richtung schönen Erfolg. Besonderer Dank gebührt wieder der ma Koch u. Korselt, die zur Einübung der Chöre durch längere Zeit ein nino und für das Konzert ein Klavier und ein Harmonium unentgeltlich Verfügung stellte.

Am 1. Mai starb Prof. Franz Himml plötzlich und unerwartet. Er kte an der Anstalt seit Beginn des Schuljahres 1907/08. Der Lehrkörper lor in ihm einen gewissenhaften Mitarbeiter, die Schüler einen im Grunde es Herzens wohlwollenden Lehrer.

Die Einsegnung des Leichnams fand am 3. Mai statt; der Trauergot dienst wurde am 4. Mai abgehalten.

Am 27. Mai wohnte der bischöfliche Religionsinspektor, der hochwürdig Prälat und Generalvikar, Herr Raimund Fuchs, dem katholischen Religio unterrichte in der IV. und der VII. Klasse bei.

Am 8. Juni starb nach langer Krankheit in seinem 20. Lebensja Oskar Wessig, ein braver und fleißiger Schüler der VI. Klasse.

Am 9. Juni kam der hochwürdigste Bischof von Leitmeritz, Herr Jo Groß, zur Ausspendung des heil. Sakramentes der Firmung nach Reichenbe Die Anstalt beteiligte sich an seinem Empfange. Die katholischen Schü wurden am 10. Juni nachmittags gefirmt.

5. Juli: Schluß des Unterrichtes.

6. Juli: Schlußgottesdienst und Verteilung der Zeugnisse.

XI. Körperliche Übungen.

I. **Schwimmen und Baden.** 160 Schüler erhielten vom Stadtrate Reichenberg zum Eintritte in die städtische Schwimm- und Badeanstalt Rosenthal Freikarten.

Die Verwaltung des Kaiser Franz Josef-Bades gewährte Schülern der Anstalt eine Ermäßigung der Bäderpreise.

II. **Schlittschuhlaufen.** Der Stadtrat in Reichenberg überließ Direktion wieder eine Anzahl von Freikarten für die Schüler zur Benutzu der Eisbahn auf dem städtischen Teiche in Rosenthal; von diesen Kar machten 105 Schüler Gebrauch.

Die folgende Tabelle enthält den Ausweis darüber, wie viele Schüler jeder Klasse an dem Turnunterrichte teilnahmen, die Schwimm- und Ba anstalten besuchten, Sonnen- und Luftbäder nahmen, Freischwimmer, Schli schuhläufer, Rodelfahrer, Radfahrer, Skiläufer, Netzballspieler und Rollschu läufer waren.

Klasse.	Zahl der öffentl. Schüler.	Turner.	%	Besucher der Schwimm- und Badeanstalten.	%	Freischwimmer.	%	Besucher des Sonnen- und Luftbades.	%	Schlittschuhläufer.	%	Rodelfahrer.	%	Radfahrer.	%	Skiläufer.	%	Netzballspieler.	%	Rollschuhläufer.	%
I.	47	21	44·7	42	89·4	18	38·3	5	10·6	40	85·1	47	100·0	2	14·3	5	10·6	3	6·4	5	10
II.	49	21	42·9	46	93·8	22	44·9	5	10·2	42	85·7	47	96·3	4	8·2	9	18·3	4	8·2	3	6
III.	40	13	32·5	39	97·5	28	70·0	—	—	34	85·0	40	100·0	15	37·5	8	20·0	2	5·0	1	2
IV.	40	17	40·5	37	92·5	30	75·0	11	30·6	28	70·9	38	95·0	17	40·5	22	55·0	12	30·0	5	12
V.	32	8	25·0	26	87·3	26	81·3	—	—	31	96·9	32	100·0	16	50·0	11	34·4	10	31·2	—	—
VI.	31	6	19·3	28	90·3	24	77·4	7	22·6	19	61·3	25	80·6	12	38·7	7	22·6	6	19·3	4	12
VII.	18	6	33·3	16	88·9	14	77·8	1	5·6	13	72·2	18	100·0	6	33·3	8	44·4	2	11·1	1	5
VIII.	23	6	26·1	14	60·9	14	60·9	9	39·1	19	82·6	17	73·9	10	43·5	9	39·1	7	30·4	3	13
Summe	280	98	35·0	248	88·6	176	62·8	38	13·6	226	80·7	264	94·3	82	29·3	79	28·2	46	16·4	22	7

III. **Jugendspiele.** Die Jugendspiele wurden mit Bewilligung des Stadtes auf dem ehemaligen Exerzierplatze Mittwoch und Samstag nachmittags n 5—7 Uhr abgehalten. Für die Beteiligung an den Spielen kommen von n 280 öffentlichen Schülern nur 241 in Betracht, da 39 in der weiteren ngebung der Stadt wohnten und sich wegen der großen Entfernung ihres ohnortes von dem Spielplatze an den Jugendspielen nicht beteiligen konnten. e Spielzeit begann am 26. April. Bis zum Schlusse des Schuljahres gab es) für die Abhaltung der Spiele bestimmte Tage. Unter diesen Tagen aber ıren 2 Ferialtage und 1 Regentag. Sonach wurde in jeder Klasse an 17 Tagen ıd an jedem Spieltage 2 Stunden gespielt. Die Gesamtzahl der Teilnehmer den Spielen betrug 2277 und im Mittel an jedem Spieltage 134, d. i. 55·6% n den 241 in Betracht kommenden öffentlichen Schülern der Anstalt.

Es wurden folgende Spiele geübt: Kreislaufen, Diebschlagen, Schlagufen, Drittenabschlagen, Barlaufen, Türkenkopf, Metten, Kreisball, Wanderll in 3 Arten, Deutscher Schlagball, Prellball, Balljagd, Raffball, Turmball, ıustball, Kreisfußball, Stoßball, Schleuderball, Ball über die Schnur, Hohlball it Prellen, Fußball ohne Aufnehmen, Eilbotenlauf. Mit Vorliebe spielten die ːhüler die Ballspiele, insbesondere Deutschen Schlagball ohne Einschenker, ıßball, Hohlball mit Prellen, Raffball, Faustball, Tamburinball und Schleuderball.

Der Turnlehrer Norbert Haidl war der Spielleiter; in der Beaufsichtigung ːr Schüler unterstützte ihn Prof. Franz Kühnl.

Die Anstalt ist im Besitze der erforderlichen Spielgeräte.

IV. **Fakultativer Schießunterricht.** Daran beteiligten sich 29 Schüler,) aus der VII. und 19 aus der VIII. Klasse. Der Unterricht wurde am 4. Juni mit einem Preisschießen geschlossen. Dieses hatte einen so schönen rfolg, daß 11 Schüler = 37·9 % mit Preisen ausgezeichnet werden konnten. en ersten Preis erhielt der Schüler der VIII. Klasse, Gustav Kayser, der 35 Einheiten erreicht hatte. Der Oberst und Regimentskommandant, Herr ugust Lanzinger, wußte den Abschluß des Schießens in feierlicher Weise zu ːstalten und das überaus befriedigende Ergebnis ist ein Verdienst des Unterchtsleiters, Herrn Hauptmanns Viktor Lackner.

Die Direktion sagt beiden Herren für ihr freundliches und die Sache ːrderndes Entgegenkommen den herzlichsten Dank.

Ausweis über die Teilnahme der Schüler an den Jugendspielen.

Klasse	Schülerzahl*)	26./IV.	29./IV.	3./V.	6./V.	10./V.	13./V.	17./V.	20./V.	24./V.	27./V.	31./V.	3./VI.	7./VI.	10./VI.	14./VI.	17./VI.	21./VI.	24./VI.	28./VI.	1./VII.	Zusammen
I.	42	32 76·2%	27 64·3 %	29 69 %	18 42·8 %	19 45·2 %	29 69 %	29 69 %		25 59·5%	24 57·1%	25 59·5%		25 59·5%		23 54·8%	23 54·8%	23 54·8%	22 52.4%	19 45·2%	21 50 %	413 18·1%
II.	47	28 59·6%	33 70·2 %	37 78·7 %	27 57·5 %	35 74·5 %	34 72·3%	29 61·7%		30 63·8%	26 55·3%	32 68·1%		30 63·8%		24 51·1%	32 68·1%	25 53·2%	30 63·8%	32 68·1%	31 65·9%	515 22·7%
III.	37	28 75·7%	26 70·3 %	29 78·4 %	29 78·4 %	31 83·8 %	34 91·9%	29 78·4%		31 83·8%	26 70·3%	31 83·8%		24 64·9%		18 48·6%	32 86·5%	24 64·9%	32 86·5%	24 64·9%	28 75·7%	476 20·9%
IV.	31	27 87·1%	23 74·2 %	28 90·3 %	28 90·3 %	25 80·6 %	25 80·6%	25 80·6%		19 61·3%	18 58·1%	21 67·7%		19 61·3%		12 38·7%	16 51·6%	20 64·5%	19 64·5%	22 70·9%	16 51·6%	363 15·9%
V.	29	13 44·8%	17 58·6 %	18 62·1 %	22 75·9 %	14 48·3 %	21 72·4%	14 48·3%		22 75·9%	9 31 %	8 27·6%		12 41·4%		14 48·3%	12 41·4%	13 44·8%	20 68.9%	12 41·4%	8 27·6%	249 10·9%
VI.	25	13 52 %	6 24 %	12 48 %	20 80 %	14 56 %	15 60 %	10 40 %		14 56 %	11 44 %	11 44 %		14 56 %		4 16 %	4 16 %	8 32 %	8 32 %	7 28 %	6 24 %	177 7·9%
VII.	12	9 75 %	7 58·3 %	6 50 %	7 58·3 %	5 41·7 %	7 58·3%	4 33·3%		6 50 %	5 41·7%	5 41·7%		5 41·7%		1 8·3 %	1 8·3%	3 25 %	5 41.7%	—	—	76 3·3%
VIII.	18	1 5·5 %	— —	— —	— —	1 5·5 %	1 5·5%	— —		5 27·8%	— —	— —		— —		— —	— —	— —	— —	— —	— —	8 0·3%
Zusammen	241	151 62·6 %	139 57·7 %	159 66 %	151 62·6 %	144 59·7 %	166 68·9%	140 58·1%		152 63·1%	119 49·4% regnerisch	133 55·2%		129 53·5%		96 39·8% regnerisch	120 49·8%	116 48·1%	136 56·4%	116 48·1%	110 45·6%	2277 100 %

*) Nach Abzug der Zahl derjenigen Schüler, welche wegen zu großer Entfernung ihres Wohnortes an den Spielen nicht teilnehmen konnten.

Gemeinsame Märsche, bez. Ausflüge der Schüler unter Führung der Lehrer.

Klasse.	Zeit.	Zahl der Teilnehmer.	Gehzeit in Stunden.	Name des führenden Lehrers.	Zurückgelegter Weg.
I.	15./V.	45	6	Karl Simm.	Bahnfahrt nach Ringelshain, dann Marsch über Schwarzpfütze, Finkendorf, Lückendorf, Hochwald, Oybin, Zittau. Bahnfahrt nach Reichenberg.
	30./V.	30	3	Karl Simm und Franz Nevečeřel.	Volksgarten, Hohenhabsburg, Marienweg, Humboldtshöhe, Bild, Reichenberg.
I.	15./I.	13	$3^1/_2$	Johann Baer.	Rodelausflug: Volksgarten, Rudolfsthal, Katharinberg, Rudolfsthal, Reichenberg.
	8./IV.	40	4	Franz Kühnl.	Rathausplatz, Volksgarten, Hohenhabsburg, Rudolfsthal, Rollbergweg, Schießstätte, Reichenberg.
	15./V.	41	7	Dr. Gustav Jungbauer.	Volksgarten, Rudolfsthal, Friedrichswald, Christiansthal, Wittighaus, Quarresteig, Weißbach. Rückfahrt nach Reichenberg.
	23./V.	37	7	„	Wanderung verbunden mit Kriegsspielen: Paulsdorf, Ratschendorf, Siegmundshöhe, Katharinberg, Ruppersdorf, Reichenberg.
	30./V.	34	3	„	Wanderung verbunden mit Kriegsspielen: Exerzierplatz, Humboldtshöhe, Buschmüllerskreuz, Hoher Berg, Volksgarten.
	13./VI.	26	$3^1/_2$	„	Wanderung verbunden mit Kriegsspielen: Franzendorf, Letzter Pfennig, Jeschkengelände, Schöne Aussicht, Reichenberg.
I.	29./X.	28	2	Augustin Potuček.	Steilweg, Rudolfsthal, Rollberg, Harzdorf, Talsperre.
	2./XII.	14	$2^1/_2$	„	Langer Weg, Hohenhabsburg, Steilweg, Rudolfsthaler Fahrweg, Marienweg, Annenweg, Heimatstal.
	31./I.	14	2	„	Volksgarten, Steilweg, Marienweg, Humboldtshöhe, Ruppersdorf, Exerzierplatz.
	27./II.	25	5	Johann Baer.	Johannesthal, Schöne Aussicht, Rodelweg-Jeschkenhaus, Abfahrt mit Rodel nach Johannesthal, Heimweg nach Reichenberg.
	12./IV.	23	$10^1/_2$	„	Volksgarten, Luxdorf, Reinowitz, Grünwalder Talsperre, Bad Schlag, Gablonz a. N., Schwarzbrunn-Warte, Neudorf, Gablonz a. N., Brandl, Proschwitzer Kammturm, Neurode, Reichenberger Turnhalle.
	15./V.	40	$8^1/_2$	Augustin Potuček.	Rudolfsthal, Friedrichswald, Neuwiese, Kleine Stolpich, Haindorf, Weißbach, Hegebachtal, Tafelfichte, Hubertusbaude, Bad Liebwerda, Mildenau, Raspenau, Bahnfahrt nach Reichenberg.
	3./VI.	14	5	Josef Heckel und Augustin Potuček.	Röchlitz, Kohlstatt, Kaiserstein, Mosesquelle, Maffersdorf, Reichenberg.

Klasse.	Zeit.	Zahl der Teilnehmer.	Gehzeit in Stunden.	Name des führenden Lehrers.	Zurückgelegter Weg.
IV.	27./IX.	27	3	Johann Baer.	Exerzierplatz, Humboldtshöheturm (Ver such über freien Fall), Marienwe Hohenhabsburg, Reichenberg.
	12./II.	32	3	Dr. G. Jungbauer u. Ottomar Rödling.	Rodelausflug: Ruppersdorf Humboldts höhe, Rudolfsthal, Reichenberg.
	15./V.	36	6–7	Johann Baer.	Allgemeiner Ausflug: Rudolfsthal, Frie richswald, Blatneiteich, Christianstha Taubenhaus, Stolpich, Nußsteine, Hai dorf, Wiesenschänke, Wurzelberg, Hemm rich. Bahnfahrt nach Reichenberg.
	3./VI.	23	$8^1/_2$	„	Bahnfahrt nach Weißkirchen, dan Marsch über Freudenhöhe, Trögelsber Paß, Pfaffensteine, Felsentheater, Lücke dorfer Forsthaus, Töpfer, Felsengass Scharfsteine, Hochwald, Oybin, Ber Oybin. Bahnfahrt: Oybin-Zittau-Re chenberg.
	13./VI.	20	$3^1/_2$	Dr. Gustav Jungbauer.	Wanderung verbunden mit Krieg spielen: Franzendorf, Letzter Pfenni Jeschkengelände, Schöne Aussicht, Re chenberg.
V.	15./V.	30	8	Dr. Heinrich Barth und Dr. Reinhold Eiselt.	Bahnfahrt bis Ringelshain, dann Fu wanderung über Finkendorf, Lücke dorf, Hochwald, Oybin, Zittau. Bah fahrt nach Reichenberg.
	3./VI.	13	4	Johann Baer.	Katharinberg, Drachenstein, Ratsche dorf, Reichenberg.
VI.	15./V.	23	8	Jakob Neubauer.	Volksgarten, Harzdorf, Dornst, König höhe, Josefsthal, Albrechtsdorf, Tan walder Spitzberg, Morchenstern; Rüc fahrt nach Reichenberg.
VII.	15./V.	15	8	Josef Heckel.	Fahrt bis Röhrsdorf, dann Marsch üb den Tannenberg, Ruine Tollenstei Lausche, Groß-Schönau; Rückfahrt na Reichenberg.
	2./VI.	14	$3^1/_2$	Josef Heckel und Franz Kühnl.	Besuch des städtischen Wasserwerk in Machendorf und der Machendorf Quelle.
VIII.	15./V.	17	5	Franz Kühnl.	Bahnfahrt nach Röhrsdorf, dann Mars über den Kleiß, Bürgstein, Betgrabe Schwoika, Reichstadt; Rückfahrt na Reichenberg.

VI. **Ferienreisen.** 66 Schüler des Obergymnasiums erhielten durch Vermitte-
ng der Direktion von der Hauptleitung der deutschen Studenten-
id Schülerherbergen in Hohenelbe für die Benutzung der Schüler-
rbergen gelegentlich der Fußreisen während der Ferien 1911 Ausweiskarten
sgefolgt.

Der aus Mitgliedern des „Gebirgsvereines“ und aus Vertretern der hiesigen
ittelschulen gebildete Ausschuß zur Förderung der „Schülerfahrten“ spendete
r 12 Schüler, um ihnen während der Ferien 1911 eine Fußreise, vor-
hmlich ins Lausitzer-, Iser- oder Riesengebirge, zu ermöglichen, bezw. zu
eichtern, den Betrag von 245 Kronen. Aus den Mitteln des Unterstützungs-
ades wurde zu diesem Zwecke der Betrag von 60 Kronen gewidmet.

Die Direktion sagt dem Stadtrate und der Verwaltung
s Kaiser Franz Josef-Bades in Reichenberg, der Haupt-
itung der deutschen Studenten- und Schülerherbergen
Hohenelbe und dem hiesigen Ausschusse zur Förderung
r „Schülerfahrten“ für die Unterstützung des Lehrkörpers
der Erfüllung seiner Pflicht, die körperliche Ausbildung
r Schüler zu fördern, den herzlichsten Dank.

XII. Statistik der Schüler.

1. Zahl.	KLASSE. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Zusamme
Zu Ende 1909/1910	51	50	46	43	37	20	23	29	299
Zu Anfang 1910/1911	49	48	46	44	35	34	18	24	298
Während des Schuljahres eingetreten	1	1	—	—	1	—	—	—	3
Im ganzen also aufgenommen	50	49	46	44	36	34	18	24	301
Darunter:									
Neu aufgenommen u. zw.:									
aufgestiegen	49	6	4	1	4	1	2	2	69
Repetenten	—	—	1	1	—	—	—	—	2
Wieder aufgenommen und zwar:									
aufgestiegen	1	41	40	41	32	32	16	22	225
Repetenten	—	2	1	1	—	1	—	—	5
Während des Schuljahres ausgetreten	3	—	5	2	1	3	—	—	14
Schülerzahl zu Ende 1910/1911	47	49	41	42	35	31	18	24	287
Darunter:									
öffentliche Schüler	47	49	40	40	32	31	18	23	280
Privatisten	—	—	1	2	3	—	—	1	7
2. Geburtsort.									
Reichenberg	14	15	14[1]	20[2]	14[2]	10	8	7	102
Böhmen außer Reichenberg	25	27	23	18	18[1]	17	10	14[1]	152
Österreich u. d. Enns	1	2	—	1	—	2	—	—	6
Österreich o. d. Enns	1	1	—	—	—	—	—	—	2
Mähren	3	—	—	—	—	—	—	1	4
Schlesien	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Bosnien u. Herzegowina	1	1	1	—	—	—	—	—	3
Deutschland	2	3	1	1	—	2	—	1	10
Summe	47	49	40[1]	40[2]	32[3]	31	18	23[1]	280
3. Muttersprache.									
Deutsch	46	48	40[1]	40[2]	32[3]	31	18	22[1]	277
Čechoslavisch	1	—	—	—	—	—	—	1	2
Wendisch	—	1	—	—	—	—	—	—	1
Summe	47	49	40[1]	40[2]	32[3]	31	18	23[1]	280
4. Religionsbekenntnis.									
Katholisch des lat. Ritus	37	41	34	36[2]	27[3]	26	15	19	235
Altkatholisch	—	1	—	—	—	—	—	1[1]	2
Evangelisch A. B.	2	2	5	3	—	2	3	3	20
Evangelisch H. B.	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Evang. Brüderkirche	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Israelitisch	6	5	1[1]	1	5	3	—	—	21
Summe	47	49	40[1]	40[2]	32[3]	31	18	23[1]	280

*) Darunter 6 Privatistinnen, von denen 4 mit Bewilligung des k. k. Unterrichtsministeriums dem öffentlichen Unterrichte in allen obligaten Gegenständen hospitierend beiwohnten.

	KLASSE.								Zusammen.
5. Lebensalter.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	
10 Jahre	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11 „	19	2	—	—	—	—	—	—	21
12 „	21	17	—	—	—	—	—	—	38
13 „	5	18	16	3	—	—	—	—	42
14 „	1	10	17	13	—	—	—	—	41
15 „	1	2	3[1]	17[1]	16[2]	2	—	—	41[4]
16 „	—	—	3	5[1]	14[1]	8	2	—	32[2]
17 „	—	—	1	2	1	13	4	—	21
18 „	—	—	—	—	1	7	9	8	25
19 „	—	—	—	—	—	—	3	10	13
20 „	—	—	—	—	—	1	—	4	5
21 „	—	—	—	—	—	—	—	1[1]	1[1]
22 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Summe	47	49	40[1]	40[2]	32[3]	31	18	23[1]	280[7]
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.									
Ortsangehörige	28	26	21[1]	28[2]	14[3]	17	9	10[1]	153[7]
Auswärtige	19	23	19	12	18	14	9	13	127
Summe	47	49	40[1]	40[2]	32[3]	31	18	23[1]	280[7]
7. Klassifikation.									
a) Zu Ende des Schuljahres 1910/1911:									
Zum Aufsteigen in die nächste Klasse waren (bezw. haben die oberste Klasse beendet): Vorzüglich geeignet (mit vorzüglichem Erfolge)	15	18	11	7	5[3]	8	7	8[1]	79[4]
Geeignet (mit gutem Erfolge)	23	18	21[1]	25	22	22	8	15	154[1]
Im allgemeinen geeignet	2	7	1	2	—	—	—	—	12
Nicht geeignet (mit nicht genügendem Erfolge)	7	5	7	6	1	—	2	—	28
Die Bewilligung zu einer Wiederholungsprüfung erhielten	—	1	—	—	4	1	1	—	7
Nicht klassifiziert wurden	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Außerordentliche Schüler	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Zu einer Nachtragsprüfung krankheitshalber zugelassen	—	—	—	—[2]	—	—	—	—	—[2]
Summe	47	49	40[1]	40[2]	32[3]	31	18	23[1]	280[7]
b) Nachtrag zum Schulj. 1909/1910:									
Wiederholungsprüfungen waren bewilligt	1	—	—	—	1	1	1	—	4
Entsprochen haben	1	—	—	—	1	—	1	—	3
Nicht entsprochen haben	—	—	—	—	—	1	—	—	1
Nicht erschienen sind	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Nachtragsprüfungen waren bewilligt	1	—	—[1]	—	—	—	—	—	1[1]
Entsprochen haben	—	—	—[1]	—	—	—	—	—	—[1]
Nicht entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Nicht erschienen sind	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Darnach ist das Endergebnis für 1909/1910:									
Zum Aufsteigen in d. nächste Klasse waren (bez. haben die oberste Klasse beendet): Vorzüglich geeignet (mit vorzüglichem Erfolge)	14	14	10	9[3]	10	7	7	6	77[3]
Geeignet (mit gutem Erfolge)	25[1]	26[1]	29[1]	26[1]	24	11	15	23	179[4]
Im allgemeinen geeignet	3[1]	4	2[1]	3	—	—	—	—	12[2]
Nicht geeignet (mit nicht gen. Erfolg)	5[1]	5	3	1	3	2	—	—	19[1]
Ungeprüft blieben	1	—	—	—	—	—	1	—	2
Summe	48[3]	49[1]	44[2]	39[4]	37	20	23	29	289[10]

8. Geldleistungen der Schüler.	KLASSE. I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Zusammen.
Das Schulgeld zu zahlen waren verpflichtet:									
im I. Semester	27	25	22	25	15	14	7	9	144
„ II. „	20	27	19	26	15	14	9	9	139
Zur Hälfte waren befreit:									
im I. Semester	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ II. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Ganz waren befreit:									
im I. Semester	22	23	24	19	20	20	11	15	154
„ II. „	27	22	22	16	20	19	9	15	150
Das Schulgeld betrug im ganzen:									
im I. Semester K	1080	1000	880	1000	600	560	280	360	5760
„ II. „ K	800	1080	760	1040	600	560	360	360	5560
Zusammen K	1880	2080	1640	2040	1200	1120	640	720	11320
Die Aufnahmstaxen betrugen K	205·8	25·2	21	8·4	16·8	4·2	8·4	8·4	298·2
Die Lehrmittelbeiträge betrugen K	100	98	92	88	72	68	36	48	602
Die Taxen für Duplikatzeugnisse betrugen K	—	—	8	—	—	—	—	—	8
9. Besuch des Unterrichtes in den relat.-obligaten und unobligaten Gegenständen.									
Zweite Landessprache I. Abteilung	9	13	6	4	—	—	—	—	32
Zweite Landessprache II. „	—	—	12	6	4	—	—	—	22
Zweite Landessprache IV. „	—	—	—	—	3	2	3	3	11
Französische Sprache, II. Kurs	—	—	—	—	—	4	7	3	14
Freihandzeichnen II. Kurs	—	24	—	—	—	—	—	—	24
Freihandzeichnen III. „	—	—	16	15	—	—	—	—	31
Freihandzeichnen IV. „	—	—	—	—	2	3	—	2	7
Turnen I. Abteilung	21	21	—	—	—	—	—	—	42
Turnen II. „	—	—	13	17	—	—	—	—	30
Turnen III. „	—	—	—	—	8	6	6	6	26
Gesang I. Abteilung	24	3	—	—	—	—	—	—	27
Gesang II. „	—	15	8	4	—	—	—	—	27
Gesang III. „	—	1	2	4	6	8	9	8	38
Kirchengesang-Abteilung*)									
Stenographie, I. Kurs	—	—	—	—	27	28	—	—	55
10. Stipendien.									
Anzahl der Stipendisten	1	1	3	5	6	6	3	4	29
Gesamtbetrag der Stipendien K	200	200	312·4	946	1124·12	2697·54	633·77	800	6913·8

*) An den Kirchengesangübungen beteiligten sich regelmäßig folgende 13 Schüle
I. Klasse: Fiedler Rudolf, Stoßimmel Karl, Wagner Siegfried; II. Klasse: Rettinger Rudo
Rösler Walter, Steffen Karl, Trenkler Alfons, Wanka Franz, Wehl Anton, Zieger Walte
III. Klasse: Breuer Eduard, Kasper Otto, Quaiser Franz.

XIII. Schüler-Verzeichnis.

Die Schüler, deren Namen mit * bezeichnet sind, sind zum Aufsteigen in die nächste Klasse vorzüglich geeignet, bez. haben die oberste Klasse mit vorzüglichem Erfolge beendet.

I. Klasse (47).

Altschul Rudolf, Morchenstern. *Appelt Erwin, Reichenau. Brosche Reinhold, Maffersorf. Diwok Josef, Langenbruck. *Dluhosch Erich, Jansdorf. Fiedler Rudolf, Reichenberg. Fischer Georg, Neu-Paka. *Görlach Josef, Ringenhain. Gürke Walter, Tetschen. *Hak Alois, Friedland. Hanowsky Walter, Reichenberg. Herkner Karl, Nieder-Hanichen. Herrmann Kurt Hugo, Aussig. *Hoffmann Walter, Reichenberg. Hübner Albert, Obertosenthal. Hübner Reinhold, Rosenthal I. Jaksch Karl, Reichenberg. Keil Ernst, Alt-Paulsdorf. Keil Paul, Seitendorf (Sachsen). Kerl Friedrich, Pfraumberg. König Franz, Alt-Habendorf. *Krumpe Franz, Königswalde. Langhammer Johann, Ober-Rosenthal. Langinger August, Linz (Ober-Österreich). *Lorenz Rudolf, Leitmeritz. *Matouš Bohuslav, Reichenberg. Möller Robert, Reichenberg. Neumann Erich, Swiadnow (Mähren). Neumann Ernst, Röchlitz. Peres Alfred, Reichenberg. Pollak Karl, Reichenberg. *Pollak Walter, Reichenberg. *Rössel Rudolf, Deutsch-Gabel. Saiko Gustav, Seestadtl. Schaffer Emilian, Brünn (Mähren). Scholze Robert, Reichenberg. *Schreiner Karl, Liboch. Schütz Otto, Reichenberg. *Schwarzbach Paul, Seitendorf (Sachsen). *Stärz Otto, Reichenberg. Stoßimmel Karl, Reichenberg. *Tutzauer Otto, Dörfel. Vogt Friedrich, Brünn (Mähren). Wagner Siegfried, Dörfel. Wanke Vinzenz, Reichenberg. Weiß Wilhelm, Wien (N.-Ö.). Wunderlich Erich, Rosenthal I.

II. Klasse (49).

*Böhm, Edler von Börnegg, Karl, Mostar (Herzegowina). Conrath Viktor, Reichenberg. Demuth Friedrich, Reichenberg. *Deutsch Josef, Reichenberg. *Diwok Wilhelm, Jaberlich. Dobusch Leopold, Reichenberg. *Dorschner Rudolf, Friedland. *Elger Alfred, Reichenberg. Franz Wilhelm, Schöneberg (Preußen). Glaser Bruno, Hermannsthal. Habenicht Oskar, Friesdorf. *Hergl Walter, Reichenberg. Herrmann Ernst, Alt-Paulsdorf. Herzog Karl, Reichenberg. *Hirschmann Oskar, Liebenau. Kasper Walter, Schumburg. *Kittel Hugo, Limburg. Knoll Erich, Parschnitz. Kolarski Chlodwig, Karlsbad. Kuhn, Freiherr von Kuhnenfeld, Franz, Wien (N.-Ö.). Küsebauch Karl, Polepp. *Link Otto, Bullendorf. Löwenstein Otto, Grottau. Marsch Gustav, Ruppersdorf. Möller Michael, Nauslitz (Sachsen). Nachtmann Herbert, Schumburg. Pretsch Franz, Wien (N.-Ö.). Queck Johann, Reichenberg. Rettinger Rudolf, Gießhübel. *Rieger Rudolf, Nieder-Hanichen. Rösler Walter, Plav. Ruß Friedrich, Ober-Rosenthal. *Schindler Karl, Rosendorf. Scholze Erich, Reichenberg. Schwansee Wilhelm, Schluckenau. Seibt Ferdinand, Groß-Wosnalitz. *Sitte Josef, Kunnersorf. Sitte Otto, Röchlitz. Soyka Hans, Reichenberg. *Steffen Karl, Röhrsdorf. *Trenkler Alfons, Reichenberg. *Wanka Franz, Steyr (O.-Ö.). Wanke Rudolf, Reichenberg. *Wehl Anton, Schlackenwerth. *Weil Egon, Reichenberg. Weißkopf Walter, Reichenberg. Worf Otto, Reichenberg. Zdobinsky Rudolf, Groß-Walten. *Zieger Walter, Hainitz (Sachsen).

III. Klasse (40[1]).

Bergmann Anton, Hultschken. Bittner Josef, Johannesthal. *Breuer Eduard, Reichenberg. Dreßler Heinrich, Preßnitz. Fischer Adolf, Sarajewo (Bosnien). Ginzel Hermann, Reichenberg. *Gränzer Randolf, Reichenberg. *Herkner Richard, Karolinsfeld. Hoffmann Karl, Reichenberg. *Hrnčíř Franz, Kratzau. Illner Josef, Jičin. Jedlitschka Wilhelm, Reichenberg. *Johne Otto, Kratzau. Kasper Otto, Tannwald. Klant Karl, Friedland.

Knesch Otto, Reichenberg. Kotatko Ludwig, Röchlitz. Krems Ferdinand, Gablonz a. Lammel Ernst, Reichenberg. Linke Franz, Ringenhain. *Mittig Josef, Reichenberg. M mann Josef, Löwenberg (Pr.-Schlesien). Piesch Hugo, Dorf Freiwaldau (Österr.-Schlesi Pochmann Ernst, Morchenstern. Quaiser Franz, Alt-Habendorf. Quaiser Oskar, Maffe dorf. *Ringelhaan Walter, Reichenberg. *Sauer Anton, Röchlitz. Schmidt Hermann, Mari bad. Schwarz Alfred, Reichenberg. *Schwertner Franz, Ober-Rosenthal. Sollors Joha Reichenberg. Starke Ernst, Reichenberg. Tausig Ernst, Reichenberg. Trenkler Friedri Königshof. Urban Franz, Friedland. Vávra Josef, Střešowitz. *Weinhuber Heinrich, Br Weiß Wilhelm, Reichenberg. *Wittiger Friedrich, Bad Liebwerda. — Privatistin: B Johanna, Reichenberg.

IV. Klasse (40²).

Bergmann Adolf, Nieder-Hanichen. Blumrich Josef, Neundorf. *Buchelt Adolf, Gr mergthal. Elger Herbert, Reichenberg. Endler Hartwig, Albrechtsdorf. Fiebiger Richa Wien (N.-Ö.). Fiedler Karl, Reichenberg. Ginzkey Alfred, Reichenberg. Glaser P Nieder-Rochlitz. *Gränzer Reinhold, Reichenberg. *Herzog Rudolf, Reichenberg. Jirou Josef, Josefstadt. Johne Erich, Kratzau. Kadavý Josef, Ober-Rosenthal. Kahl Herma Reichenberg. Klant Eduard, Friedland. Kögler Johann, Reichenberg. Körner Er Reichenberg. Kunze Alfred, Ponikla a. d. Iser. Kurzweil Heinrich, Friedland. Lu Siegmar, Reichenberg. *Müller Alfred, Reichenberg. Pietsch Friedrich, Reichenberg. Pi Richard, Reichenberg. Pohl Franz, Alt-Harzdorf. Ressel Friedrich, Reichenberg. *Rimp Otto, Blumberg bei Ostritz (Sachsen). *Rüffler Julius, Grottau. Salveter Wilhelm, Joachimsthal. Schirmer Ernst, Reichenberg. Schöler Emil, Dörfel. Seibt Otto, N Paulsdorf. *Seidemann Ernst, Reichenberg. Turnwald Reinhard, Reichenberg. Ullr Ferdinand, Reichenberg. Wildner Adalbert, Reichenberg. Wildner Alfred, Reichenbe Worf Hermann, Reichenberg. Zaschel Ernst, Langenbruck. Ziegler Karl, Gablonz a. — Privatist: Ginzel Otto, Reichenberg. Privatistin: Korselt Alice, Reichenberg.

V. Klasse (32³).

Ermold Josef, Kaplitz. Feix Josef, Engelsdorf. Gebert Wilhelm, Aussig. Gül Bruno, Ruppersdorf. Gutwillig Friedrich, Reichenberg. Hanff Eduard, Morchenste Haschke Eduard, Reichenberg. Henke Otto, Schluckenau. Hesse Edmund, Reichenbe Hofmann Lothar, Reichenberg. *Huraß Josef, Reichenberg. *Josel Franz, Reichenbe Klein Karl, Jitschin. Krombholz Rudolf, Wildstein. *Kuhn Wolfgang, Reichenberg. *Ler Friedrich, Brüx. *Mertz Adolf, Alt-Harzdorf. Moeller Ernst, Elbogen. Möller Ernst, Ros thal, I. Teil. Neumann Karl, Reichenberg. Neustadtl Otto, Reichenberg. Pietschma Josef, Nixdorf. Pompl Hermann, Reichenberg. Schiffner Max, Dönis. Schur K Nachod. Schwertner Gustav, Reichenberg. Siegmund Josef, Neustadt a. T. Spac Eduard, Reichenberg. Ullrich Emil, Kriesdorf. Villašek Theodor, Reichenberg. Weni Anton, Böhm.-Röhren. Wotruba Johann, Reichenberg. — Privatistinnen: *Loeffler Jud Leitmeritz. *Sollors Elisabeth, Reichenberg. *Stiepel Marie, Reichenberg.

VI. Klasse (31).

*Achtner Ludwig, Reichenberg. Bulíř Paul, Wien (N.-Ö.). David Richard, Eg Erben Wilhelm, Röchlitz. *Fiechtl Bruno, Langenbruck. Gübitz Walter, Wien (N.- *Halbig Gustav, Dörfel. Himmel Franz, Leitmeritz. Hub Karl, Gablonz a. N. Hüb Franz, Reichenberg. *Johne Emil, Kratzau. *Klindert Karl, Reichenberg. *Knobloch Rud Maffersdorf. Kramer Gotthard, Neu-Harzdorf. Kreutzberg Alfons, Dresden (Sachse *Miksch Ernst, Reichenberg. Möller Rudolf, Proschwitz. *Molitor Hans, Maffersd Morawetz Johann, Haida. Müller Erwin, Reichenberg. Neustadtl Paul, Reichenberg. Nov Konrad, Turnau. Pilz Walter, Reichenberg. Pohl Richard, Alt-Harzdorf. Rindsk

ıdolf, Reichenberg. Saiko Franz, Seestadtl. Schmidt Reinhold, Alt-Harzdorf. Schwarz-ıch Isidor, Seitendorf (Sachsen). Sitte Ernst, Kriesdorf. Ullmann Alfred, Reichenberg. ta Rudolf, Reichenberg.

VII. Klasse (18).

Brosche Otto, Neu-Habendorf. Conrath Herbert, Reichenberg. *Feistner Friedrich, eichenberg. Granzner Josef, Obergeorgenthal. Herzog Ernst, Reichenberg. *Hrnčíř Rudolf, ratzau. Hüttel Otto, Reichenberg. *Just Karl, Johannesthal. Lorenz Adolf, Schatzlar. ırtz Edward, Reichenberg. *Meiniger Ferdinand, Reichenberg. Mikulec Hans, Reichen-rg. Plaschke Franz, Rudolfsthal. *Preißler Gottfried, Friedland. Quaiser Ferdinand, Maffers-rf. *Richter Josef, Reichenberg. Richter Walter, Antoniwald. Schönfeld Fritz, Friedland.

VIII. Klasse (23[1]).

*Breuer Rudolf, Kratzau. *Drda Franz, Eisenbrod. *Eccardt Rudolf, Reichenberg. anff Josef, Morchenstern. Helzel Franz, Röhrsdorf. Hupka Johann, Alt-Harzdorf. Kaul-rsch Franz, Ober-Hanichen. Kayser Gustav, Leipzig (Sachsen). *Luh Reinhard, Eckers-ch. Lukesch Otto, Prag. *Lux Josef, Rückersdorf. Mertz Hugo, Prag. *v. Milde Bern-rd, Reichenberg. Pilz Alfred, Nieder-Hanichen. Reißig Hugo, Reichenberg. *Šámal ıdislaus, Böhm.-Aicha. v. Scheure Erich, Reichenberg. Scholze Ottomar, Johannesthal. eber Eduard, Reichenberg. Simon Ludwig, Reichenberg. Stärz Karl, Reichenberg. rtsch Oskar, Gaya (Mähren). Thiele Adolf, Warnsdorf. — Privatistin: *Stradal Johanna, arnsdorf.

XIV. Kundmachung für das Schuljahr 1911—1912.

1. Das neue Schuljahr wird am 18. September l. J. mit einem feier-hen Gottesdienste eröffnet.

2. **Aufnahme in die erste Klasse.**

Die Einschreibung für die I. Klasse erfolgt am 7. und 8. Juli, dann am . und 17. September, jedesmal von 8—10 Uhr vormittags.

Der Aufnahmswerber hat in Begleitung seines Vaters oder dessen ellvertreters zu erscheinen, seinen ordnungsgemäß ausgestellten Tauf- ler Geburtsschein nebst dem für öffentliche Schüler der Volksschule rgeschriebenen Frequentationszeugnisse (mit den Noten aus der eligionslehre, der deutschen Sprache und dem Rechnen) vor-legen.

Schüler, welche aufgenommen werden wollen, müssen das zehnte Lebens-ır entweder schon zurückgelegt haben oder im laufenden Kalenderjahre llenden.

Die Aufnahmsprüfung wird jedesmal am Tage der Einschreibung ab-halten.

Bei der Aufnahmsprüfung werden folgende Anforderungen gestellt:

a) Jenes Maß von Wissen in der Religion, welches in den sten 4 Jahreskursen der Volksschule erworben werden kann;

b) Fertigkeit im Lesen und Schreiben der deutsch Sprache, Kenntnis der Elemente der Formenlehre, Fert keit im Analysieren erweiterter einfacher Sätze;

c) Übungen in den vier Grundrechnungsarten mit ganz Zahlen.

3. **Aufnahme in die zweite bis achte Klasse.** Die der Anstalt bis angehörigen Schüler haben sich zur Wiederaufnahme am 17. September 3 Uhr nachmittags in den betreffenden Lehrzimmern einzufinden.

Schüler, welche bisher der Anstalt nicht angehörten und in eine höh (zweite bis achte) Klasse eintreten wollen, haben sich am 16. Septem von 8—11 Uhr vormittags bei dem Direktor anzumelden und das mit vorgeschriebenen Abgangsklausel versehene Jahres-Zeugnis pro 1910—1 vorzuweisen. Der Aufnahmswerber, der ein Jahres-Zeugnis aus unmittelbar vorangehenden Klasse einer gleich organisierten öffentlic Mittelschule mit deutscher Unterrichtssprache nicht beibringt, hat sich ei Prüfung zu unterziehen, die am 16. September um 2 Uhr nachmittags begin Für diese Aufnahmsprüfung ist eine Taxe von 24 K zu entrichten.

Die Wiederholungs- und die Nachtragsprüfungen beginnen am 17. S tember vormittags um 8 Uhr.

4. Jeder Schüler hat außer dem Lehrmittelbeitrage von 2 K zur Deck der mit dem schulmäßigen Betriebe der Jugendspiele verbundenen Auslag 60 Heller zu entrichten (M.-E. vom 15. Oktober 1893, Z. 18.830 ai 18 L.-S.-R.-E. vom 4. Jänner 1894, Nr. 30.999 ex 1893).

Die Aufnahmstaxe für den neu eintretenden Schüler beträgt 4 K 2

Gesuche um Stundung der Schulgeldzahlung für die Schüler l. Klasse müssen, mit einem Mittellosigkeitszeugnisse belegt, der Ansta direktion längstens bis zum 26. September l. J. übergeben werden.

Blankette der Mittellosigkeitszeugnisse zu 5 h verkauft der Schuldien

5. Am 18. August um 9 Uhr vormittags wird in der Kreuzkirche Feier des Allerhöchsten Geburtstages Seiner Majestät des Kaisers von Direktionen des Staatsgymnasiums, der Staatsrealschule und der Lehr bildungsanstalt ein Gottesdienst veranstaltet. Diejenigen Schüler, wel an diesem Tage in Reichenberg anwesend sind, werden aufgefordert, d Gottesdienste beizuwohnen.

Reichenberg, am 5. Juli 1911.

Regierungsrat **Josef Grünes,**
k. k. Direktor.

Verzeichnis der in den Programmen der Anstalt bisher erschienenen wissenschaftlichen Abhandlungen.

1. Über den Humanismus an Realschulen. Vom Lehrer Em. Gelínek.
3. Die Flachsbaumwolle. Vom Lehrer Siard Kosak.
4. Über eine einfache Darstellung der Wechselkommissions-Rechnung. Vom Lehrer Thaddäus Kotzura.
5. Die Dampfmaschine von Watt. Vom Lehrer W. Kur.
6. Ostindien und seine Bedeutung für den Handel. Vom Lehrer Val. Zodl.
7. Elektromagnetische Telegraphie. Vom Lehrer Josef Walter.
8. Eine geognostische Skizze. Vom Lehrer Joh. Pfohl.
Ansichten über die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. Vom Lehrer W. Kur.
9. Der dreißigjährige Krieg. Vom Lehrer P. Valentin Zodl.
1. Das Auge. Vom Lehrer F. Streit.
5. Über höhere geometrische Reihen. Vom Prof. Wilh. Smetaczek.
7. Portugals Blüte und Verfall. Vom Prof. P. V. Zodl.
2. Explikation geometrischer Grundbegriffe und Versuch einer neuen naturgemäßen Entwicklung der Parallelentheorie aus derselben. Vom Prof. Wilh. Smetaczek.
3. Untersuchung der Oberflächen und der Rauminhalte jener Körper, die durch Rotation eines Kreissegmentes um eine in dessen Ebene liegende und zu dessen Sehne parallele Achse entstehen. Vom Prof. Fridolin Streit.
4. 1. Studien über die veränderte Bedeutung und Formenbildung der mhd. und der nhd. verba praeterito-praesentia. Vom Prof. Friedrich Maschek.
2. Die meteorologischen Verhältnisse von Reichenberg für die Jahresperiode vom 1. Jänner bis zum 31. Dezember 1873. Vom Prof. Fridolin Streit.
5. Protagoräische Studien. Vom Prof. Aur. Polzer.
6. Die Reformen Diocletians und Constantins des Großen im römischen Reiche. Vom Prof. Franz Hübler.
7. Constantin als Alleinherrscher 324—337. Seine Reformen. Vom Prof. Franz Hübler.

Die Zoologie des Aristoteles. Vom Prof. Dr. Th. Watzel.

Die geographische Tafel nach den Angaben Herodots mit Berücksichtigung seiner Vorgänger. Vom Prof. Robert Müller.

Über Kombinationstöne. Vom suppl. Gymnasiallehrer Reinhold Huyer.

Über Schillers Begriff des Sittlich-Schönen. Ein Beitrag zur Förderung der Lektüre des Dichters an unseren Gymnasien. Vom Prof. Dr. Anton Frank.
Goethes Reisen (1. Teil). Vom Prof. Friedrich Maschek.
1. Goethes Reisen (2. Teil). Vom Prof. Friedrich Maschek.
2. Zur 50jährigen Gedenkfeier der Reichenberger Staatsmittelschule. Geschichtliche Skizze. Vom Prof. Franz Hübler.
Goethes Reisen (Schluß). Vom Prof. Friedrich Maschek.
Artikel und Pronomina bei Robert Garnier. Vom Prof. Ferdinand Ginzel.
Das Ideal und das Leben von Schiller. Vom Prof. Dr. Anton Frank.
Über den deutschen Unterricht in der Quinta. Vom Prof. Dr. Joh. Knieschek.
Zum dichterischen Ausdrucke. Vom Prof. Robert Müller.

1893.
1894.
1895. Milton und Klopstock, mit besonderer Berücksichtigung des „Paradise Lost“ i des „Messias“. Vom Prof. Franz Hübler.

1896. Über Kants mathematische Hypothese. Von dem wirklichen Lehrer Leo Schöng

1897. Zur Beachtung der Gefühlswirkung bei der Lektüre der Klassiker. Vom Pr Robert Müller.

1898. Katalog der Lehrerbibliothek. Zusammengestellt vom Prof. Friedrich Schuber

1899. Rede an die Schüler zur Feier des fünfzigjährigen Regierungs-Jubiläums Sei Majestät des Kaisers Franz Josef I. Vom Dir. Josef Grünes.
Katalog der Lehrerbibliothek (Fortsetzung und Schluß). Zusammengestellt v Prof. Friedrich Schuberth.

1900. Eine Reise durch Sicilien. Vom Prof. Dr. Ludwig Adamek.

1901. Über das Gestaltungs- und Zweckmäßigkeitsprinzip in der organischen Nat Vom Prof. Dr. Th. Watzel.

1902. Oberitalienische Großstädte. Reisebilder. Vom Prof. Dr. Ludwig Adamek

1903. Horazens Epistel an die Pisonen. Metrisch ins Deutsche übertragen von Jos M. Lönning, k. k. Professor.

1904. Otto Ludwigs Lehre von der tragischen Schuld. Vom Prof. Georg Feierfeil.

1905. Bryologisch-floristische Mitteilungen aus Nieder-Österreich mit besonderer Berü sichtigung der Moosflora von Seitenstetten und Umgebung. Vom Prof. Fra Matouschek.

1906. Entstehung des Begriffes der ganzen und der gebrochenen Zahlen und die e fachen Rechnungsarten mit diesen. Vom Prof. Alois Pedoth.

1907.
1908.
1909. Die Quellen des Lukretius für sein Lehrgedicht „De rerum natura“. I., II., III. T Vom Prof. Dr. Heinrich Thume.

1909. Rede bei der Feier des sechzigjährigen Regierungs-Jubiläums Seiner Majestät Kaisers Franz Josef I. Vom Prof. Jakob Neubauer.

1910. Darstellung und Maskenverwendung im altgriechischen Trauerspiele. Vom Pr Franz Kühnl.

Stundenübersicht der obligaten Lehrfächer.

Lehrgegenstände.	KLASSE.								Zusammen.
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	
Religionslehre	2	2	2	2	2	2	2	2	16
Unterrichtssprache	4	4	3	3	3	3	3	3	26
Lateinische Sprache	8	7	6	6	6	6	5	5	49
Griechische Sprache	—	—	5	4	5	5	4	5	28
Geschichte	—	2	2	2	3	4	3	3	19
Geographie	2	2	2	2	1	1	—	—	10
Mathematik	3	3	3	3	3	3	3	2	23
Naturgeschichte	2	2	—	—	3	2	—	—	9
Physik und Chemie	—	—	2	3	—	—	4	3 1. Sem. 4 2. Sem.	12 (13)
Philos. Propädeutik	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Freihandzeichnen	3	—	—	—	—	—	—	—	3
Schreiben	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Summe	25	22	25	25	26	26	26	25 (26)	200 (201)

Zur Theorie der reellen Curvenintegrale.

Von

Lothar Heffter.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. 1902. Heft 2.

Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. 1902. Heft 2.

Zur Theorie der reellen Curvenintegrale.

Von

Lothar Heffter (Bonn).

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 8. Februar 1902.

Wenn das Curvenintegral, wie es meist geschieht [1]), mit Hülfe einer durch den Integrationsweg gelieferten Transformation auf ein gewöhnliches Integral zurückgeführt und hierdurch definiert werden soll, so muß man (s. I. § 3) entweder die Differenzierbarkeit der den Weg definierenden Functionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ oder aber ihre wenigstens abteilungsweise vorhandene Monotonie voraussetzen. Deshalb war es für Herrn Jordan [2]), um das Integral für eine beliebige rektifizierbare Linie zu definieren, notwendig, es direkt als Grenzwert einer Summe zu erklären.

Auch hier soll ein beliebiger rektifizierbarer Integrationsweg zu Grund gelegt werden. Nur in dem Fall, daß er dem Bereich, in dem die Integrandenfunction gewisse Bedingungen erfüllt, als Begrenzung angehört, setzen wir voraus, daß $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, also die Integrationscurve selbst abteilungsweise monoton, d. h. eine solche speziellere rektifizierbare Curve sei, wie sie Herr Pringsheim (a. a. O.) überhaupt zu Grunde legt.

Müssen wir demnach wie Herr Jordan auf die Summenerklärung unmittelbar zurückgreifen, so unterscheidet sich dagegen ihre Begründung bei uns von der Jordan'schen dadurch, daß wir ohne Einführung der Länge der Integrationscurve direkt mit der „beschränkten Schwankung“ der Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ arbeiten, der Eigenschaft also, aus der andererseits die Rek-

1) Vgl. z. B. Picard, Traité d'Anal. I (1891) S. 70 ff. — Pringsheim, Münch. Sitzungsber. 25. (1895) S. 39 ff., S. 295 ff., auf welche Abhandlung wir auch wegen Literatur und Geschichte der Theorie verweisen.

2) Cours d'Anal. 2me Éd. I. (1893) S. 181 ff.

tifizierbarkeit des Weges folgt[1]). Unsere Definition selbst unterscheidet sich aber noch in einem wesentlicheren Punkte von der citierten. Die Erwägung, daß bei allen wichtigeren Anwendungen der Curvenintegrale die für die Integrabilität der Function unter dem Zeichen erforderlichen Eigenschaften nicht nur auf der Integrationscurve selbst, sondern in einem Bereich bestehen, dem jene Kurve mindestens als Begrenzung angehört, veranlaßte zu der Erweiterung, daß die bei der Summenbildung benutzten Functionswerte in solchem Falle nur einer gewissen Nähe der Integrationscurve zu entstammen brauchen[2]).

Diese scheinbar unbedeutende Erweiterung der Definition wird nun in § 2 und 3 die gemeinsame und, wie ich glaube, sehr natürliche Quelle von Sätzen, die sonst erst als Folgerung des Cauchy'schen Satzes auftreten, oder speziellere Voraussetzungen erheischen, oder mindestens sehr viel mehr Mühe verursachen. Sie liefert auch beim Cauchy'schen Satz, dem der II. Abschnitt gewidmet ist[3]), die Zurückführung des Beweises auf den für ein Rechteck als unmittelbaren Ausfluß aus der Definition des Curvenintegrals.

Nunmehr schien es mir interessant, gewissermaßen die Genesis der notwendigen Bedingung, $f_2 = g_1$, für die Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes $\int (f\,dx + g\,dy) = 0$ zu verfolgen, wenn die Voraussetzungen über die Natur der Functionen f und g erst successive eingeführt werden (§ 2). Diesen verschiedenen Abstufungen der Voraussetzungen entsprechen die Beweise des Cauchy'schen Satzes: bei vorausgesetzter Integrabilität von f und g längs jeder Curve in einem Bereich G (§ 3), bei vorausgesetzter Stetigkeit von f, g, f_2, g_1 (§ 4), bei vorausgesetzter Stetigkeit von f und g und Existenz der vollständigen ersten Differentialien von f und g, also die Uebertragung des Cauchy-Goursat'schen Satzes[4]) auf reelle Integrale (§ 5).

---

1) Jordan, a. a. O. S. 105. — Study, Math. Ann. 47 (1896) S. 313.

2) Durch diesen Umstand besteht eine gewisse Verwandtschaft zwischen meiner Definition und der Dissertation des Herrn Noble, Eine neue Methode der Variationsrechnung, Göttingen 1901, s. besonders § 7.

3) Vgl. hierzu noch A. Hurwitz, Ueber die Entwicklung der allgem. Theorie der analyt. Functionen in neuerer Zeit. Verhandl. d. Math.-Congr. Zürich 1897. — Encyclop. d. math. Wissensch. II. B. 1 (Osgood) S. 14, 15. — Pringsheim, Münch. Sitzungsber. 29. (1899) S. 58 ff. — Osgood, Bull. of the Amer. Math. Soc. 2. Ser. 5. (1899) S. 84 ff.

4) Transactions of the Amer. Math. Soc. 1. (1900) S. 14—16. Vgl. hierzu auch Pringsheim, Bibl. Math. 3. Folge, 1. (1900) S. 477—479 und Transactions of the Amer. Math. Soc. 2. (1901) S. 413—421.

Die Beweise in § 3 und 4 beruhen eigentlich auf demselben Grundgedanken wie der Cauchy-Riemann'sche Doppelintegral-Beweis, ohne jedoch den Begriff des Doppelintegrals selbst einführen oder benutzen zu müssen. Dies ist in der That einfach deshalb möglich, weil jenes dort benutzte Doppelintegral nebst allen seinen Elementen den Wert Null hat. Der Beweis in § 5 bedient sich zum Teil desselben Gedankens wie der von Herrn Moore[1]), gestaltet sich aber dadurch noch einfacher, daß hier ein anderer Mittelwertsatz benutzt wird und der Beweis nicht wie der Moore'sche auf die Goursat'sche Betrachtung ausläuft.

In § 6 endlich werden noch einige Folgerungen aus dem Vorangehenden gezogen.

I. Definition und allgemeine Eigenschaften der Curvenintegrale.

§ 1.

Definition des Curvenintegrals.

Die reellen Functionen der reellen Variablen t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

seien in dem Intervall (t_0, T) eindeutig, mit Einschluß der Grenzen stetig und von beschränkter Schwankung[2]); d. h. wenn der arithmetischen Folge der Werte $t = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n (\equiv T)$ nach (1) die Werte $x = x_0 (\equiv a), x_1, x_2, \ldots x_n (\equiv b)$ und $y = y_0 (\equiv \alpha), y_1, y_2, \ldots, y_n (\equiv \beta)$ entsprechen, sei

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} |x_\nu - x_{\nu-1}| = M, \quad \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} |y_\nu - y_{\nu-1}| = N, \tag{2}$$

wo M und N bestimmte endliche positive Zahlen sind und mit wachsendem n die Differenzen $t_\nu - t_{\nu-1}$ sämtlich nach Null convergieren. Man sagt dann, die Gleichungen (1) stellen eine stetige rektifizierbare Curve C in der xy-Ebene dar mit dem Anfangspunkt $A(a, \alpha)$, dem Endpunkt $B(b, \beta)$[3]). Wenn im Folgenden von einer beliebigen Curve die Rede ist, soll darunter immer eine solche stetige rektifizierbare Curve verstanden werden. Nur in besonderen Fällen werden wir spezieller voraussetzen, daß $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ abteilungsweise monoton sind, d. h. daß das

1) Transactions of the Amer. Math. Soc. 1 (1900) S. 499—506.
2) Vgl. Jordan, a. a. O. S. 55. — Study, a. a. O. S. 298 ff.
3) „ „ „ S. 105. — „ „ S. 313.

Intervall $(t_0 T)$ sich in eine endliche Anzahl solcher Intervalle zerlegen läßt, in deren jedem φ sowohl wie ψ entweder nur wächst oder nur abnimmt oder nur constant bleibt. Wir nennen dann auch die Curve C selbst abteilungsweise monoton.

Sei ferner $f(xy)$ eine längs der Curve C von A bis B eindeutige und mit Einschluß der Grenzen stetige reelle Function der beiden reellen Variabeln x, y; d. h. (wenn $x_c y_c$) irgend ein Punkt auf C ist, so soll $f(xy)$ die Bedingung erfüllen

$$(3) \qquad |f(xy)-f(x_c y_c)| < \gamma \quad \text{für} \quad |x-x_c| < \varepsilon, \quad |y-y_c| < \varepsilon,$$

wo γ eine beliebig kleine, ε eine hinlänglich kleine positive Zahl bedeutet.

Ist die Bedingung (3) ohne weitere Beschränkung für (xy) erfüllt, so sagen wir auch, $f(xy)$ sei längs C beiderseitig stetig oder, — denn das folgt daraus, — C verlaufe im Innern eines Gebietes der Stetigkeit von $f(xy)$.

Gilt (3) nur mit dem beschränkenden Zusatz a), daß (xy) außer auf der Curve selbst nur auf einer bestimmten Seite von ihr liegen darf[1]), so sagen wir $f(xy)$ sei längs C einseitig stetig oder C gehöre einem Gebiete der Stetigkeit von $f(xy)$ als Begrenzung an.

Gilt (3) endlich nur mit dem Zusatz b), daß (xy) nur auf der Curve C selbst liegen darf, also mit dem Zusatz

$$(3b) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

so sagen wir, $f(xy)$ sei stetig nur längs C selbst oder C sei eine isolierte Curve der Stetigkeit von $f(xy)$.

Aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(xy)$ längs C mit Einschluß der Endpunkte folgt die gleichmäßige Stetigkeit längs

---

1) Falls nämlich die Curve C die Eigenschaft hat, die ihr hinlänglich nahe liegenden Punkte in solche, die auf der einen und solche, die auf der andern Seite liegen, zu trennen! Nach Herrn Jordan muß das schon für jede stetige Curve gelten, da jede geschlossene stetige Curve nach ihm die Ebene in zwei getrennte Continua teilt (a. a. O. S. 91 ff.). Für stetige Curven mit bestimmter und wenigstens abteilungsweise sich stetig und monoton ändernder Tangente hat Herr Schoenflies denselben Satz bewiesen (Gött. Nachr. 1896 S. 1 ff.). Auch eine stetige und abteilungsweise monotone Curve teilt die ihr hinlänglich nahen Punkte in zwei getrennte Gruppen, nämlich in die Punkte $x = \varphi(t)$, $y < \psi(t)$ und $x = \varphi(t)$, $y > \psi(t)$, bezw., — wenn in dem betrachteten Curvenstück $\varphi(t)$ constant sein sollte, — in die Punkte $y = \psi(t)$, $x < \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$, $x > \varphi(t)$.

C, d. h. man kann nach (3) jeden Punkt auf C zum Mittelpunkt eines parallel den Axen liegenden Quadrates mit derselben Seitenlänge 2ε machen, sodaß die Function $f(xy)$ innerhalb dieses Quadrates um weniger als die ein für alle Mal festgesetzte, beliebig kleine Zahl 2γ schwankt, — im Falle (3a) innerhalb eines der Teile, in die das Quadrat durch C zerfällt, — im Falle (3b) auf der Curve C selbst, soweit sie innerhalb des Quadrates verläuft.

Aus der Stetigkeit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in $(t_0\, T)$ mit Einschluß der Grenzen folgt auch für jede dieser Functionen die gleichmäßige Stetigkeit in $(t_0\, T)$. Man kann also die Bedingungen

$$4) \qquad \begin{cases} |\varphi(t)-\varphi(t_c)| < \varepsilon & \text{für} \quad |t-t_c| < \delta, \\ |\psi(t)-\psi(t_c)| < \varepsilon & \text{„} \quad |t-t_c| < \delta, \end{cases}$$

wo auch t_c in $(t_0\, T)$ liegt, durch dieselbe Zahl δ erfüllen.

Wählt man daher die Teilpunkte $t_0, t_1, t_2, \ldots t_{n-1}, t_n \equiv T$ so, daß alle Differenzen $|t_\varkappa - t_{\varkappa-1}| < 2\delta$, so verläuft nach (4) die Curve C von $(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})$ bis $(x_\varkappa y_\varkappa)$ ganz innerhalb des den Axen parallelen Quadrates mit der Seite 2ε und dem Mittelpunkt $x = \varphi\left(\frac{t_\varkappa - t_{\varkappa-1}}{2}\right)$, $y = \psi\left(\frac{t_\varkappa - t_{\varkappa-1}}{2}\right)$, und nach (3) schwankt innerhalb dieses Quadrates die Function $f(xy)$ um weniger als 2γ.

Sei nunmehr

$$x_{\varkappa-1} \lesseqgtr \xi_\varkappa \lesseqgtr x_\varkappa, \quad y_{\varkappa-1} \lesseqgtr \eta_\varkappa \lesseqgtr y_\varkappa,$$

also $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rand des Rechtecks mit den Ecken $(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})$, $(x_\varkappa y_\varkappa)$, das den Axen parallel ist, das wir auch kurz durch $[(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1}), (x_\varkappa y_\varkappa)]$ bezeichnen wollen, und das ganz innerhalb jenes Quadrates liegt. Bei nur einseitiger Stetigkeit von f längs C muß $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ auch noch der Bedingung (3a), bei Stetigkeit von f nur längs C selbst, der Bedingung (3b) genügen. Dann bilden wir die Summe

$$5) \qquad S \equiv \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}).$$

Um zu zeigen, daß diese gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert convergiert, wenn n in's Unendliche wächst, die Intervalle $(t_{\varkappa-1} t_\varkappa)$ aber sämtlich nach Null convergieren, teilen wir jedes Intervall, z. B. $(t_{\varkappa-1} t_\varkappa)$, durch neue Teilpunkte $t'_1 t'_2 \ldots t'_{n'-1}$ und bilden mit der Gesamtheit der jetzt vorhandenen Teilpunkte wie vorher die Summe

$$(5') \qquad S' \equiv \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\nu'=1}^{\nu'=n'} f(\xi'_{\nu\nu'}, \eta'_{\nu\nu'})(x_{\nu\nu'} - x_{\nu\nu'-1}),$$

wobei $x_{\nu\nu'} = \varphi(t'_{\nu\nu'})$, $x_{\nu 0} \equiv x_{\nu-1}$, $x_{\nu n'} \equiv x_\nu$ ist und alle $(\xi'_{\nu\nu'}, \eta'_{\nu\nu'})$ entsprechend gewählt sind wie bei S die $(\xi_\nu \eta_\nu)$. Da sie hiernach sämtlich in dem oben bezeichneten Quadrat liegen, ist

$$(6) \qquad f(\xi_\nu \eta_\nu) - 2\gamma < f(\xi'_{\nu\nu'}, \eta'_{\nu\nu'}) < f(\xi_\nu \eta_\nu) + 2\gamma$$

oder

$$f(\xi'_{\nu\nu'}, \eta'_{\nu\nu'}) = f(\xi_\nu \eta_\nu) + \vartheta_{\nu\nu'} \cdot 2\gamma, \quad \text{wo } -1 < \vartheta_{\nu\nu'} < +1.$$

Also ist

$$(7) \qquad \sum_{\nu'} f(\xi'_{\nu\nu'}, \eta'_{\nu\nu'})(x_{\nu\nu'} - x_{\nu\nu'-1}) = f(\xi_\nu \eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) + 2\gamma \sum_{\nu'} \vartheta_{\nu\nu'}(x_{\nu\nu'} - x_{\nu\nu'-1})$$

und

$$(8) \qquad S' = S + 2\gamma \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \vartheta_{\nu\nu'}(x_{\nu\nu'} - x_{\nu\nu'-1})$$

oder

$$(9) \qquad |S' - S| < 2\gamma \sum_{\nu,\,\nu'} |x_{\nu\nu'} - x_{\nu\nu'-1}|,$$

d. h. nach (2)

$$(10) \qquad |S' - S| < 2\gamma . M,$$

womit der gewünschte Beweis erbracht ist, da M endlich und γ beliebig klein ist.

Wir bemerken gleich an dieser Stelle, daß die Stetigkeit von f längs C für dieses Resultat nicht notwendig war. Bleibt nämlich $|f|$ nur stets unter angebbarer oberer Grenze längs C, bezw. auf C und in gewisser Nähe von C und bezeichnet $2\gamma_\nu$ die Maximalschwankung von f in jenem zu $(t_{\nu-1} t_\nu)$ gehörigen Quadrat, so erkennt man aus (6), (7), (8), (9) sofort, daß $|S' - S|$ stets dann beliebig klein ist, wenn

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \gamma_\nu |x_\nu - x_{\nu-1}| = 0$$

ist. Sobald diese Bedingung erfüllt ist, wollen wir deshalb $f(xy)$ längs C integrabel nennen. Auch braucht in diesem Falle bei der Summenbildung $f(\xi_\nu \eta_\nu)$ gar nicht Functionswert für einen Punkt $(\xi_\nu \eta_\nu)$ des Rechtecks $[(x_{\nu-1} y_{\nu-1})(x_\nu y_\nu)]$, sondern nur eine Zahl zwischen der oberen und unteren Grenze der Functionswerte in diesem Rechteck zu sein[1]).

1) Aehnlich für gewöhnliche bestimmte Integrale bei Herrn Ascoli, Ann. di Mat. 2. Ser. 23. (1895) S. 68.

Den als vorhanden erkannten Grenzwert der Summe S nennen wir das in Bezug auf x längs C von A bis B oder von (a, α) bis (b, β) erstreckte Curvenintegral von $f(xy)$ und schreiben

$$(12)\quad (C)\int_A^B f(xy)\,dx \equiv (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta} f(xy)\,dx \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}).$$

Für eine spätere Anwendnng machen wir noch folgende Bemerkung. Wenn

$$(13)\quad f(xy) \equiv f_1(xy) \cdot f_2(xy),$$

und jede der Functionen f, f_1, f_2 längs C integrabel ist, so ist nach dem Vorangehenden direkt zu übersehen, daß bei der Summenbildung

$$(14)\quad \sum f_1(\xi_\varkappa \eta_\varkappa) \cdot f_2(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$$

in f_1 und f_2 je ein beliebiges der erlaubten Wertenpaare $(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)$ und $(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)$, nicht notwendig beide Mal dasselbe, benutzt werden darf, um beim Grenzübergang das Integral

$$(15)\quad (C)\int_A^B f_1(xy) \cdot f_2(xy)\,dx$$

zu erhalten.

Nach der Definitionsformel (12) ist speziell, wenn x längs C constant $= a$, C also parallel der y-Axe ist,

$$(16)\quad (C)\int_{a,\alpha}^{a,\beta} f(xy)\,dx \equiv (C)\int_{a,\alpha}^{a,\beta} f(ay)\,dx = 0,$$

und wenn y längs C constant $= \alpha$, also C parallel der x-Axe ist,

$$(17)\quad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\alpha} f(xy)\,dx \equiv \int_a^b f(x\alpha)\,dx,$$

ein gewöhnliches bestimmtes Integral.

Analog definieren wir unter denselben Voraussetzungen über $g(xy)$ wie bisher über $f(xy)$ das Integral

$$(18)\quad (C)\int_A^B g(xy)\,dx \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} g(\xi_\varkappa \eta_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1})$$

und stellen weiter die Definition auf

$$(19)\quad (C)\int_A^B (f\,dx + g\,dy) \equiv (C)\int_A^B f\,dx + (C)\int_A^B g\,dy.$$

Aus der Summendefinition des Curvenintegrals ergiebt sich bei beliebigem Wege C unmittelbar

$$(20) \qquad (C)\int_A^B (f\,dx+g\,dy) = -(C)\int_B^A (f\,dx+g\,dy),$$

$$(21) \qquad (C)\int_A^B (f\,dx+g\,dy) = (C)\int_A^M (f\,dx+g\,dy)+(C)\int_M^B (f\,dx+g\,dy),$$

wo A, B, M drei beliebige Punkte auf der Curve C sind, und

$$(22) \qquad (C)\int_A^B (f\,dx+g\,dy) = (C)\int_A^B (f_1\,dx+g_1\,dy)+(C)\int_A^B (f_2\,dx+g_2\,dy),$$

wenn $f=f_1+f_2$, $g=g_1+g_2$ und f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 längs C integrabel sind.

Genau wie für gewöhnliche Integrale ergiebt sich endlich für die Curvenintegrale bei monotonem Integrationsweg C (dies bedeutet hier in etwas weiterem Sinn als oben: wenn $\varphi(t)$ sowohl wie $\psi(t)$ im Intervall $(t_0\,T)$ entweder nie abnimmt oder nie zunimmt) der Mittelwertsatz (Satz vom Mittelwert der Integrandenfunction), den wir gleich für das zusammengefaßte Integral (19) aussprechen,

$$23) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta} (f\,dx+g\,dy) = f(XY)\,(b-a)+g\,(X'\,Y')\,(\beta-\alpha),$$

wobei $f(XY)$ und $g(X'\,Y')$ die Mittelwerte der Functionen f und g längs C sind. Hierbei kann es, wenn f und g längs C integrabel, aber nicht durchweg stetig sind, eintreten, daß diese Functionsmittelwerte gar nicht Functionswerte für ein Mittelwertsystem auf C sind.

Wir bemerken noch ausdrücklich, daß bisher die Voraussetzung der Stetigkeit oder auch nur Integrabilität der auftretenden Functionen f und g außerhalb der Curve C nicht notwendig war. Wenn sie bestand, ergab sich nur eine größere Freiheit bei der zum Integral führenden Summenbildung.

§ 2.

Fundamentalsatz der Integralrechnung für Curvenintegrale.

Ist $F(xy)$ mit ihren ersten Ableitungen

$$F_1(xy) \equiv \frac{\partial F(xy)}{\partial x}, \quad F_2(xy) \equiv \frac{\partial F(xy)}{\partial y}$$

längs der Curve C von A bis B eindeutig und stetig und zwar, falls C nur rektifizierbar ist, beiderseitig, falls C abteilungsweise monoton ist[1]), wenigstens einseitig, falls C der x- oder y-Axe parallel ist, wenigstens längs C selbst stetig, so ist

$$(1) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta} dF(xy) \equiv (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta}(F_1\,dx + F_2\,dy) = F(b\beta) - F(a\alpha)\,^2).$$

Beweis: Nach Definition ist

$$(2) \qquad (C)\int_{A}^{B}(F_1dx+F_2dy) \equiv \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [F_1(\xi_\varkappa\eta_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + F_2(\xi'_\varkappa\eta'_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1})],$$

wo $(\xi_\varkappa\eta_\varkappa)$, $(\xi'_\varkappa\eta'_\varkappa)$ je ein beliebiges der bei der Summenbildung erlaubten Wertenpaare ist. Bei unsern Voraussetzungen ist wenigstens einer der Punkte $P_{\varkappa-1,\varkappa} \equiv (x_{\varkappa-1}, y_\varkappa)$ und $P_{\varkappa,\varkappa-1} \equiv (x_\varkappa y_{\varkappa-1})$ von $P_{\varkappa\varkappa} \equiv (x_\varkappa y_\varkappa)$ verschieden und liegt bei schon hinlänglich großem n in dem Bereich, in dem F, F_1, F_2 stetig sind. Sei dies etwa $P_{\varkappa-1,\varkappa}$; dann liegen auch die Strecken $P_{\varkappa-1,\varkappa-1}P_{\varkappa-1,\varkappa}$ und $P_{\varkappa-1,\varkappa}P_{\varkappa\varkappa}$ in diesem Bereich. Also ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf die im Intervall $(x_{\varkappa-1}x_\varkappa)$ mit ihrer Ableitung stetige Function $F(x, y_\varkappa)$ von x allein,

$$(3) \qquad \frac{F(x_\varkappa y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1}y_\varkappa)}{x_\varkappa - x_{\varkappa-1}} = F_1(\xi_\varkappa y_\varkappa),$$

wo $\xi_\varkappa$ ein bestimmter Wert des Intervalls $(x_{\varkappa-1}x_\varkappa)$ oder ein beliebiger von mehreren bestimmten ist. Ebenso ist

$$(4) \qquad \frac{F(x_{\varkappa-1}y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1}y_{\varkappa-1})}{y_\varkappa - y_{\varkappa-1}} = F_2(x_{\varkappa-1}\eta'_\varkappa)$$

für einen bestimmten Wert $\eta'_\varkappa$ des Intervalls $(y_{\varkappa-1}y_\varkappa)$. Wählt man also in (2) das dort noch beliebige Wertenpaar $(\xi_\varkappa\eta_\varkappa)$

1) Bei dieser Annahme kann man hier auch die ganze Curve C als monoton betrachten, da aus dem Beweis für die einzelnen monotonen Stücke der Satz für die ganze Curve C folgt.

2) Dieser Satz erscheint sonst erst als eine Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. z. B. Pringsheim a. a. O. S. 72) oder sein Beweis erforderte mindestens die Differenzierbarkeit von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$. (Vgl. z. B. Stolz, Grundzüge der Diff.- u. Int.-R. II (1896) S. 182 ff.). — Da Herr Bôcher (Bull. of the Amer. Math. Soc. 2. Ser. 2. (1896) S. 146) den Fundamentalsatz zum Beweis des Cauchy'schen Satzes benutzt, so muß bei ihm entweder die Differenzierbarkeit von φ und ψ vorausgesetzt oder etwa der hier gegebene Beweis zur Ergänzung seiner Deduction benutzt werden.

gleich dem durch (3) bestimmten $(\xi_\varkappa y_\varkappa)$ und ebenso $(\xi'_\varkappa \eta'_\varkappa)$ gleich dem durch (4) bestimmten $(x_{\varkappa-1}\eta'_\varkappa)$, die auf Grund der Voraussetzungen zu den erlaubten gehören, so folgt

$$(5) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{b,\beta}(F_1 dx + F_2 dy) =$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [F(x_\varkappa y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1} y_\varkappa) + F(x_{\varkappa-1} y_\varkappa) - F(x_{\varkappa-1} y_{\varkappa-1})]$$

$$= F(b\beta) - F(a\alpha), \quad \text{q. e. d.}$$

Folgerungen: 1) Ist die Curve C des Fundamentalsatzes geschlossen, so ist

$$(6) \qquad (C)\int dF(xy) = 0$$

nach (5), ob dabei die Integration längs C in dem einen oder andern Sinn erfolgt, da ja F längs C eindeutig vorausgesetzt war.

2) Sind F, F_1, F_2 in einem zusammenhängenden Bereich G überall eindeutig und stetig, so ist das Integral

$$(7) \qquad (C)\int_{a,\alpha}^{x,y} dF(xy)$$

unabhängig vom Integrationsweg C, solange dieser das Gebiet G nirgends verläßt; denn es hat ja nach (5) den Wert $F(xy) - F(a\alpha)$, und F ist in G eindeutig.

Die Function $F(xy) \equiv xy$ z. B. ist mit ihren ersten Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x$$

überall eindeutig und stetig. Also ist nach dem Fundamentalsatz bei beliebiger Curve C

$$(8) \qquad (C)\int_A^B y dx + (C)\int_A^B x dy = b\beta - a\alpha.$$

Hieraus werden wir im nächsten Paragraphen einen einfachen Satz für gewöhnliche Integrale herleiten.

Auch der Satz von der partiellen Integration folgt natürlich unmittelbar aus dem Fundamentalsatz.

§ 3.

Transformation des Curvenintegrals.

Um die Transformation eines längs beliebiger Curve C erstreckten Integrals

$$(1) \qquad (C)\int_{P_0}^{P} f(xy)\,dx, \quad (C)\int_{P_0}^{P} g(xy)\,dy$$

durch Einführung neuer Variabeln u, v an Stelle von x, y zu vollziehen, wo f und g wenigstens längs C selbst stetig seien, sollen die reellen Functionen von zwei reellen Variabeln u, v

$$(2) \qquad x = r(uv), \quad y = s(uv)$$

folgende Eigenschaften haben:

1. Es giebt zwei im Intervall $(t_0 T)$ eindeutige und stetige Functionen mit beschränkter Schwankung

$$(3) \qquad u = \bar{\varphi}(t), \quad v = \bar{\psi}(t),$$

die also einen rektifizierbaren Weg Γ in der uv-Ebene bestimmen, sodaß durch Substitution von (3) für u, v und von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ für x, y die Gleichungen (2) zu Identitäten werden.

2. Die Functionen (2) sind nebst ihren ersten Ableitungen

$$(4) \qquad \begin{cases} r_1(uv) = \dfrac{\partial r}{\partial u}, & r_2(uv) = \dfrac{\partial r}{\partial v} \\ s_1(uv) = \dfrac{\partial s}{\partial u}, & s_2(uv) = \dfrac{\partial s}{\partial v} \end{cases}$$

längs Γ eindeutig und stetig und zwar, je nach der Art der Curve Γ, mit denselben näheren Bestimmungen wie F, F_1, F_2 beim Fundamentalsatz (s. § 2).

Bezeichnen wir entsprechende Punkte auf C und Γ durch gleiche Indices, so wird die das erste der Integrale (1) erzeugende Summe

$$(5) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(x_\varkappa y_\varkappa)(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) =$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(r(u_\varkappa v_\varkappa), s(u_\varkappa v_\varkappa))\,[r(u_\varkappa v_\varkappa) - r(u_{\varkappa-1} v_{\varkappa-1})].$$

Durch genau dieselben Schlüsse wie beim Beweise des Fundamentalsatzes[1]) folgt nun

1) Oder auch indem man auf die Differenz in (6) links den Fundamentalsatz anwendet und das resultierende Integral durch den Mittelwertsatz (23) § 1 umformt.

$$(6)\quad r(u_\varkappa v_\varkappa)-r(u_{\varkappa-1}v_{\varkappa-1}) \equiv r(u_\varkappa v_\varkappa)-r(u_{\varkappa-1}v_\varkappa)+r(u_{\varkappa-1}v_\varkappa)-r(u_{\varkappa-1}v_{\varkappa-1})$$
$$= r_1(u'_\varkappa v_\varkappa)(u_\varkappa-u_{\varkappa-1})+r_2(u_{\varkappa-1}v'_\varkappa)(v_\varkappa-v_{\varkappa-1}),$$

wo $u'_\varkappa$ im Intervall $(u_{\varkappa-1}u_\varkappa)$, $v'_\varkappa$ im Intervall $(v_{\varkappa-1}v_\varkappa)$ liegt. Also wird die rechte Seite von (5)

$$(7)\quad = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(r(u_\varkappa v_\varkappa), s(u_\varkappa v_\varkappa))\, r_1(u'_\varkappa v_\varkappa)(u_\varkappa-u_{\varkappa-1})$$
$$+ \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} f(r(u_\varkappa v_\varkappa), s(u_\varkappa v_\varkappa))\, r_2(u_{\varkappa-1}v'_\varkappa)(v_\varkappa-v_{\varkappa-1}).$$

Nun ist f als Function von u, v längs Γ eindeutig und stetig, ebenso $r_1(uv)$, $r_2(uv)$. Ferner sind sowohl $(u_\varkappa v_\varkappa)$ als $(u'_\varkappa v_\varkappa)$ und $(u_{\varkappa-1}v'_\varkappa)$ bei der Summenbildung für die Functionen $f\cdot r_1$ und $f\cdot r_2$ von u, v erlaubte Wertenpaare (s. § 1 (14)). Somit ergiebt sich bei dem Grenzübergang $\lim n = \infty$

$$(8)\quad (C)\int_{P_0}^{P} f(xy)\,dx = (\Gamma)\int_{\Pi_0}^{\Pi} f(r(uv), s(uv))\left[\frac{\partial r}{\partial u}\,du+\frac{\partial r}{\partial v}\,dv\right],$$

die gesuchte Transformationsgleichung. Sie schließt diejenige für gewöhnliche bestimmte Integrale als Spezialfall ein.

Entsprechendes gilt natürlich für das zweite der Integrale (1).

Ein erster Spezialfall der Transformation ist

$$(9)\quad x = \varphi(u, v) \equiv \varphi(u),\quad y = \psi(u, v) \equiv \psi(u),$$

wenn $\varphi'(u)$ und $\psi'(u)$ im Intervall $(t_0\,T)$ stetig sind; denn durch $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ und $u = t$, $v = 0$ werden die Gleichungen (9) zu Identitäten, und alle Bedingungen sind erfüllt. Die Curve Γ ist das Intervall $(t_0\,T)$ der u-Axe. Also hat man, wenn die Integrationsvariable des transformierten Integrals wieder t statt u genannt wird,

$$(10)\quad (C)\int_{x_0 y_0}^{xy}(f\,dx+g\,dy) = \int_{t_0}^{T}[f(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)+g(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt.$$

Um einen zweiten Spezialfall aufzustellen, folge aus $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$(11)\quad y = h(x),\quad x = l(y),$$

sodaß

$$(12)\quad \psi(t) \equiv h(\varphi(t)),\quad \varphi(t) \equiv l(\psi(t)).$$

Dann genügen die Transformationsgleichungen

(13) $x = u,\ y = h(u)$ für das Integral $(C)\int_{P_0}^{P} f dx$

(14) $x = l(u),\ y = u$ „ „ „ $(C)\int_{P_0}^{P} g dy$

abermals den Bedingungen, und man hat, wenn die Integrationsvariable statt u wieder x, bezw. y genannt wird,

$$(15)\quad (C)\int_{P_0}^{P}(f dx + g dy) = (\Gamma_x)\int_{x_0}^{X} f(x, h(x))\,dx + (\Gamma_y)\int_{y_0}^{Y} g(l(y), y)\,dy.$$

Hierbei ist Γ_x die Projektion von C auf die x-Axe, Γ_y die von C auf die y-Axe. Falls also $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ speziell monotone Functionen in $(t_0\ T)$ sind, und nur dann, ist Γ_x das Intervall $(x_0\ X)$ der x-Axe und Γ_y das Intervall $(y_0\ Y)$ der y-Axe, und die Angabe des Integrationsweges kann in (15) rechts fortfallen. Sind φ und ψ wenigstens abteilungsweise monoton, so lassen sich die Integrale in (15) rechts in eine endliche Anzahl gewöhnlicher Integrale zerlegen.

Man wird also auch mittelst einer Transformation von dem Curvenintegral zu einem gewöhnlichen Integral zurückgeführt, und gerade dieser Umstand wurde bisher meist[1]) zur Definition des Curvenintegrals benutzt, speziell die Transformation (13), (14) von Herrn Pringsheim (a. a. O.). Sie ist in der That, wie Formel (15) zeigt, vor der andern (9) dadurch ausgezeichnet, daß bei ihr allein nicht auch noch die Ableitung einer der transformierenden Functionen unter dem Integralzeichen auftritt. Dafür erfordert sie aber die wenigstens abteilungsweise vorhandene Monotonie, nicht nur die Rektifizierbarkeit des Integrationsweges C.

Um die Transformationen (13), (14) auf Gl. (8) des vorigen Paragraphen anzuwenden, sei die dort noch beliebige Curve C also abteilungsweise monoton. Dann folgt nach (15)

$$(16)\quad (\Gamma_x)\int_{a}^{b} h(x)\,dx + (\Gamma_y)\int_{\alpha}^{\beta} h(y)\,dy = b\beta - a\alpha,$$

wo Γ_x, Γ_y die Projektionen von C (d. h. der Curve $y = h(x)$, oder, was d. i., $x = l(y)$) auf die x- bezw. y-Axe sind. Bei Eindeutigkeit von $h(x)$ im Intervall (ab) kann die rechte Seite von (16) auch lauten

$$(17)\quad = bh(b) - ah(a),$$

1) Vgl. die Einleitung.

bei Eindeutigkeit von $l(y)$ im Intervall $(\alpha\beta)$

$$= \beta l(\beta) - \alpha l(\alpha). \tag{18}$$

Dies ist ein außerordentlich einfacher, geometrisch evidenter und doch anscheinend kaum beachteter [1]) Integralsatz, der die Integration einer Function auf die ihrer inversen zurückführt. Er läßt sich natürlich auch auf mehrfache andere Art herleiten.

§ 4.

Das Curvenintegral als Function der (oberen) Grenze bei vorausgesetzter Eindeutigkeit.

Ausgehend von einer mit ihren ersten Ableitungen in einem Bereich G eindeutigen und stetigen Function sind wir in § 2 (7) zu einem Curvenintegral gelangt, das abgesehen von einer Constanten gleich dieser Function war, also eine im Bereich G eindeutige und stetige Function seiner oberen Grenze x, y darstellte.

Umgekehrt gelangt man, sobald die Eindeutigkeit des Integrals als Function seiner oberen Grenze vorausgesetzt wird, in bekannter Weise [2]) zu dem Resultat:

Sind $f(xy)$ und $g(xy)$ in dem zusammenhängenden Bereich G eindeutig und stetig und ist das Integral

$$(C)\int_{a,\alpha}^{x,y}(f dx + g dy) \equiv F(xy) \tag{1}$$

in diesem Bereich unabhängig vom Wege (m. a. W. eine in G eindeutige Function von x, y), so ist dieses Integral in G eine stetige Function von x, y mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(xy), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g(xy). \tag{2}$$

Auch dieser Satz enthält für den Fall, daß x oder y längs C constant ist, einen fundamentalen Satz der gewöhnlichen Integral-

---

1) Dieser Satz ist der thatsächliche Inhalt einer Bemerkung von Herrn Netto, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. 40 (1895) S. 185, obwohl es dort nicht ausgesprochen wird, daß der auftretende Summengrenzwert nichts anderes als das Integral der inversen Function ist. Als Spezialfall ist er freilich in einem Satz von Herrn Stolz (a. a. O. 1 (1893) S. 376, 377 Satz 10) enthalten, den wir natürlich auf dieselbe Weise erhalten könnten.

2) Vgl. z. B. Pringsheim, a. a. O. S. 69. 70. — Bôcher, a. a. O. S. 147.

rechnung. Es scheint mir zweckmäßig, ihn schon an dieser Stelle einzuführen.

II. Der Cauchy'sche Integralsatz.

§ 1.

Zurückführung des Beweises auf den für ein Rechteck.

Bei den bisher behandelten Eigenschaften des Curvenintegrals kam seine Abhängigkeit oder Unabhängigkeit vom Wege entweder nicht in Frage, oder die letztere wurde vorausgesetzt. Der Cauchy'sche Satz giebt nun die Bedingungen dafür, daß das Curvenintegral in einem einfach zusammenhängenden Bereich G unabhängig vom Weg, m. a. W. dafür, daß das Integral

1) $$(C)\int (f dx + g dy)$$

erstreckt über eine einfach geschlossene rektifizierbare Curve C im Bereich G stets den Wert Null hat.

Ist nun das Integral (1) jedes Mal Null, wenn es längs der Peripherie irgend eines Rechtecks in G erstreckt wird, das parallel zu den Axen liegt, so ist es auch Null längs jeder geschlossenen Linie, deren Stücke abwechselnd der x- und y-Axe parallel sind, weil die von ihr begrenzte Fläche sich in lauter Rechtecke einer Art zerlegen läßt. Andererseits hat man den Satz:

Liegt die stetige rektifizierbare Curve C ganz im Innern eines Bereiches G, in dem $f(xy)$ und $g(xy)$ längs jeder rektifizierbaren Linie integrabel sind, so ist

2) $$(C)\int_A^B (f dx + g dy) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x y_{\nu-1})\, dx + \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} g(x_\nu y)\, dy\right]^1),$$

wenn mit wachsendem n alle Differenzen $t_\nu - t_{\nu-1}$ gegen Null convergieren und die $(x_\nu y_\nu)$ Zwischenpunkte auf C zwischen A und B sind.

Nach dem Mittelwertsatz I § 1 (23) ist nämlich, sobald die Differenzen $t_\nu - t_{\nu-1}$ schon so klein sind, daß die Rechtecke $[x_{\nu-1} y_{\nu-1})(x_\nu y_\nu)]$ ganz innerhalb G liegen,

1) Vgl. hierzu Pringsheim, a. a. O. § 2. — Der Beweis auch dieses Satzes ist hier ein unmittelbarer Ausfluß der Definition des Curvenintegrals. Wir hätten ihn auch benutzen können, um den Fundamentalsatz I § 2 abzuleiten.

$$(3)\qquad \begin{cases} \int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(xy_{\varkappa-1})\,dx = f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) \\ \int_{y_{\varkappa-1}}^{y_\varkappa} g(x_\varkappa y)\,dy = g(x_\varkappa \eta_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1}), \end{cases}$$

wo $f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})$ einen Wert zwischen der unteren und oberen Grenze der Functionswerte $f(xy_{\varkappa-1})$ im Intervall $(x_{\varkappa-1}x_\varkappa)$ bedeutet, entsprechend $g(x_\varkappa \eta_\varkappa)$. Also wird die rechte Seite von (2)

$$(4)\qquad = \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})(x_\varkappa - x_{\varkappa-1}) + g(x_\varkappa \eta_\varkappa)(y_\varkappa - y_{\varkappa-1})].$$

Bildet man aber das Integral auf der linken Seite der behaupteten Gleichung (2), so erhält man dieselbe Summe (4); denn die Werte $f(\xi_\varkappa y_{\varkappa-1})$, $g(x_\varkappa \eta_\varkappa)$ gehören zu den jeweils für die Summenbildung erlaubten (s. I § 1 Gl. (11)). Also ist Gleichung (1) verifiziert.

Ebenso gilt unter denselben Voraussetzungen die Gleichung

$$(5)\qquad (C)\int_A^B (f\,dx + g\,dy) = \lim_{n=\infty} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \Big[\int_{y_{\varkappa-1}}^{y_\varkappa} g(x_{\varkappa-1}y)\,dy + \int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(xy_\varkappa)\,dx\Big].$$

Gehört nun die Curve C dem Bereich G, in dem f und g längs jeder Curve integrabel sind, nur als Begrenzung an und ist C überdies abteilungsweise monoton, so gilt für jedes monotone Stück von C eine der Gleichungen (2) und (5). Denn alsdann gehört entweder die mit den Punkten $(x_{\varkappa-1}y_\varkappa)$ oder die mit den Punkten $(x_\varkappa y_{\varkappa-1})$ gebaute „Treppenlinie“ (um mit Herrn Pringsheim, a. a. O., zu reden) ganz zum Bereich G, und die Ableitung der einen oder andern Gleichung bleibt unverändert bestehen. (Ist längs eines Curvenstückes speziell x oder y constant, so werden die Gleichungen (2) und (5) miteinander identisch, und das Integral links ist selbst schon ein gewöhnliches).

Ist nun das Integral $\int (f\,dx + g\,dy)$ längs der geschlossenen Treppenlinie, die der geschlossenen Curve C zugeordnet wird, Null, so gilt das nach (2) bezw. (5) auch von dem Integral (1) selbst.

Gilt also der Cauchy'sche Satz für jedes den Axen parallel gestellte Rechteck im Bereich G, in dem nur die Integrabilität der Functionen f und g auf jedem Wege vorausgesetzt war, so gilt er für jede einfach geschlossene rektifizierbare Curve, die im Innern von G liegt und einen Teil von G vollständig begrenzt, für die Begrenzung von

G selbst sicher dann, wenn sie abteilungsweise monoton und G einfach zusammenhängend ist.

Die Zurückführung des Satzes für die Begrenzung eines mehrfach zusammenhängenden Bereiches auf den für eine einzige einfach geschlossene Curve ist bekannt.

§ 2.

Die notwendige Bedingung.

Wir nehmen jetzt an, der Cauchy'sche Satz gelte für jedes Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in gewissem Bereich G, und leiten daraus eine notwendige Bedingung für seine Gültigkeit in mehreren Abstufungen her, indem wir successive die Voraussetzungen über die Natur der Functionen f und g in jenem Bereich erweitern.

A. Zunächst seien f und g in G nur eindeutig und längs jeder Curve integrabel vorausgesetzt.

Die angenommene Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes für jedes Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ besagt

$$(1) \qquad \int_a^b f(x\alpha)\,dx + \int_\alpha^\beta g(by)\,dy + \int_b^a f(x\beta)\,dx + \int_\beta^\alpha g(ay)\,dy = 0$$

oder

$$(2) \qquad \int_a^b [f(x\beta) - f(x\alpha)]\,dx = \int_\alpha^\beta [g(by) - g(ay)]\,dy.$$

Bezeichnen wir

den Mittelwert von $f(x\beta) - f(x\alpha)$ im Intervall (ab) mit

$$M_{ab}(f(x\beta) - f(x\alpha))$$

den Mittelwert von $g(by) - g(ay)$ im Intervall $(\alpha\beta)$ mit

$$M_{\alpha\beta}(g(by) - g(ay)),$$

so erhalten wir also die notwendige Bedingung in der Gestalt

$$(\mathfrak{A}) \qquad \frac{M_{ab}[f(x\beta) - f(x\alpha)]}{\beta - \alpha} = \frac{M_{\alpha\beta}[g(by) - g(ay)]}{b - a};$$

d. h. für jedes Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in G muß der Mittelwert des Differenzenquotienten von $f(x\beta)$ und $f(x\alpha)$ im Intervall (ab) gleich dem Mittelwert des Differenzenquotienten von $g(by)$ und $g(ay)$ im Intervall $(\alpha\beta)$ sein.

Daß diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, ist evident; denn aus $(\mathfrak{A})$ folgt wieder (2), und (2) ist nur eine Umformung der den Cauchy'schen Satz für $[(a\alpha)(b\beta)]$ ausdrückenden Gleichung (1).

B. f und g seien im Bereich G eindeutig und stetig in beiden Variabeln.

Dann giebt es im Intervall (ab) mindestens einen Wert $x = \xi$ und im Intervall $(\alpha\beta)$ mindestens einen Wert $y = \eta$, für den bezw.

$$(3) \qquad \begin{cases} f(\xi\beta) - f(\xi\alpha) = M_{ab}[f(x\beta) - f(x\alpha)] \\ g(b\eta) - g(a\eta) = M_{\alpha\beta}[g(by) - g(ay)] \end{cases}$$

wird. Mithin lautet die notwendige Bedingung jetzt

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{f(\xi\beta) - f(\xi\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{g(b\eta) - g(a\eta)}{b - a};$$

d. h. für jedes Rechteck $[(a\alpha), (b\beta)]$ in G muß im Intervall (ab) ein Mittelwert ξ und im Intervall $(\alpha\beta)$ ein Mittelwert η existieren, sodaß der Differenzenquotient von $f(\xi\beta)$ und $f(\xi\alpha)$ gleich dem von $g(b\eta)$ und $g(a\eta)$ ist.

Daß auch die Bedingung $(\mathfrak{B})$ bei den Voraussetzungen B hinreichend ist, ergiebt sich genau wie oben, wenn wir die Kenntnis benutzen, daß für $x = \xi$ die Differenz $f(x\beta) - f(x\alpha)$ ihren Mittelwert im Intervall (ab) annimmt und entsprechend die andere. Wir werden aber im nächsten Paragraphen zeigen, daß der Beweis der Umkehrung auch ohne jene Kenntnis geführt werden kann.

Ca. Die Functionen f und g seien in G überall eindeutig und stetig in beiden Variabeln, und die partiellen Ableitungen von f nach y und von g nach x

$$(4) \qquad f_2(xy) \equiv \frac{\partial f}{\partial y}, \quad g_1(xy) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}$$

sollen in G überall einwertig existieren und ebenfalls stetig in beiden Variabeln sein.

Läßt man in $(\mathfrak{B})$ einmal zuerst β gegen α convergieren (wobei also auch η nach α convergiert), dann b gegen a (wobei also auch ξ gegen a convergiert), und vollzieht man ein anderes Mal diese Grenzübergänge in umgekehrter Folge, so erhält man, sobald die Existenz von f_2 und g_1 feststeht, die beiden Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\xi = a} f_2(\xi\alpha) = g_1(a\alpha) \\ f_2(a\alpha) = \lim\limits_{\eta = \alpha} g_1(a\eta)^1). \end{cases}$$

1) Einen einwandsfreien Beweis des Cauchy'schen Satzes nur aus der Stetigkeit von f und g und der Existenz von f_2 und g_1 zusammen mit den

Nimmt man jetzt noch die Stetigkeit von f_2 und g_1 hinzu, — es genügt hierfür sogar die Stetigkeit von f_2 in x bei jedem y oder die von g_1 in y bei jedem Wert von x, — so gehen beide Gleichungen (5) in die Gleichung über:

$$(\mathfrak{C}) \qquad f_2(a\alpha) = g_1(a\alpha)\,^1),$$

wo $(a\alpha)$ ein beliebiger Punkt in G ist; d. h. bei den Voraussetzungen Ca ist die für jeden Punkt in G geltende Bedingung ($\mathfrak{C}$) für die Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes notwendig.

Daß sie auch hinreichend ist, zeigen wir in § 4.

Statt der Voraussetzungen Ca können wir nun auch andere aufnehmen, die wieder zu ($\mathfrak{C}$) führen, und bei denen ($\mathfrak{C}$) dann abermals als hinreichend darzuthun ist (§ 5), nämlich:

Cb. Die Functionen f und g seien in G überall eindeutig und stetig in beiden Variabeln und haben daselbst überall ein vollständiges erstes Differential, d. h. wenn $(x_0 y_0)$ ein beliebiger Punkt in G ist, so ist[2])

$$6) \quad \begin{cases} |f(xy)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(x-x_0)-f_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \\ |g(xy)-g(x_0y_0)-g_1(x_0y_0)(x-x_0)-g_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \end{cases}$$

$$\text{für } |x-x_0| < \delta, \quad |y-y_0| < \delta,$$

wo ε eine beliebig kleine, δ eine hinlänglich kleine positive Zahl ist. Ueber die Stetigkeit von f_1, f_2, g_1, g_2 wird hierbei nichts vorausgesetzt.

Sei nun $[(a\alpha), (b\beta)]$ ein den Punkt $(x_0 y_0)$ umschließendes Quadrat, das ganz innerhalb des ebenfalls den Axen parallel gestellten Quadrates mit dem Mittelpunkt $(x_0 y_0)$ und der Seite 2δ liegt, so ist nach ($\mathfrak{B}$), da $b-a = \beta-\alpha$,

$$7) \qquad f(\xi\beta)-f(\xi\alpha) = g(b\eta)-g(a\eta).$$

---

ril. (5) (oder selbst der Stetigkeit von f_2 und g_1 in jeder einzelnen der Variabeln zusammen mit ($\mathfrak{C}$)) abzuleiten, ist mir nicht gelungen. Die Voraussetzungen Ca und Cb enthalten eben sehr viel mehr.

1) Daß bei Ca die Bedingung ($\mathfrak{C}$) notwendig ist, ergiebt sich auch unmittelbar aus I § 4; denn gilt der Cauchy'sche Satz, so hat das Integral $\int_{y_0}^{xy}(f\,dx+g\,dy) = F(xy)$ nach I § 4 auch die partiellen Ableitungen f, g. Da aber $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = f_2$ und $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = g_1$ nach Ca existieren und stetig sind, so ist nach bekanntem Satze $f_2 = g_1$.

2) Vgl. z. B. Stolz, a. a. O. I S. 133.

Andererseits ist nach (6)

$$|f(\xi\beta)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi-x_0)-f_2(x_0y_0)(\beta-y_0)|<\varepsilon\{|\xi-x_0|+|\beta-y_0|\}$$
$$|f(\xi\alpha)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi-x_0)-f_2(x_0y_0)(\alpha-y_0)|<\varepsilon\{|\xi-x_0|+|\alpha-y_0|\}$$

Also folgt, da $|\xi-x_0|$, $|\beta-y_0|$, $|\alpha-y_0|<|\beta-\alpha|$ sind,

$$|f(\xi\beta)-f(\xi\alpha)-f_2(x_0y_0)(\beta-\alpha)|<4\varepsilon|\beta-\alpha|. \tag{8}$$

Ebenso ergiebt sich

$$|g(b\eta)-g(a\eta)-g_1(x_0y_0)(b-a)|<4\varepsilon|b-a|. \tag{9}$$

Also folgt endlich nach (7) und, da $b-a=\beta-\alpha$, aus (8) und (9)

$$|f_2(x_0y_0)-g_1(x_0y_0)|<8\varepsilon, \tag{10}$$

wo ε beliebig klein ist, d. h.

$$f_2(x_0y_0)=g_1(x_0y_0). \tag{$\mathfrak{C}$}$$

Auch bei den Voraussetzungen Cb ist die Bedingung ($\mathfrak{C}$) für den Cauchy'schen Satz notwendig.

§ 3.

Der Cauchy'sche Satz bei vorausgesetzter Stetigkeit von f und g.

Durch die beiden vorigen Paragraphen ist der Cauchy'sche Satz bereits in der ersten Fassung bewiesen:

A. Sind f und g in dem einfach zusammenhängenden Bereich G längs jeder Curve integrabel (Voraussetzung A), so ist die für jedes zu G gehörige Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ geltende Bedingung

$$\frac{M_{ab}(f(x\beta)-f(x\alpha))}{\beta-\alpha}=\frac{M_{\alpha\beta}(g(by)-g(ay))}{b-a} \tag{$\mathfrak{A}$}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß

$$(C)\int(f\,dx+g\,dy)=0 \tag{1}$$

ist, falls C eine einfach geschlossene stetige Curve ist, die nur rektifizierbar zu sein braucht, wenn sie ganz im Innern von G liegt, und abteilungsweise monoton vorausgesetzt wird, wenn sie G als Begrenzung angehört.

Bei den Voraussetzungen B lautet der Satz:

B. Sind f und g im Bereich G überall eindeutig

ınd stetig in beiden Variabeln (Voraussetzung B), so st die für jedes zu G gehörige Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ und rgend zwei Zahlen ξ, η im Intervall (ab), bezw. $(\alpha\beta)$;eltende Bedingung

$$\mathfrak{B}) \qquad \frac{f(\xi\beta)-f(\xi\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{g(b\eta)-g(a\eta)}{b-a}$$

ıotwendig (s. § 2) und hinreichend für das Bestehen ler Gleichung (1)[1]).

Beweis: Durch die Geraden $x = x_0 (\equiv a), x_1, \ldots, x_m (\equiv b)$, $= y_0 (\equiv \alpha), y_1, \ldots, y_n (\equiv \beta)$ teilen wir das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ n lauter kleine Teilrechtecke $[(x_\mu y_\nu)(x_{\mu+1} y_{\nu+1})]$. Für jedes solche :xistieren nach ($\mathfrak{B}$) zwei Zahlen $\xi_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ im Intervall $(x_\mu x_{\mu+1})$ bezw. $y_\nu y_{\nu+1})$, sodass

$$2) \quad R_{\mu\nu} \equiv f(\xi_{\mu\nu} y_\nu)(x_{\mu+1}-x_\mu)+g(x_{\mu+1}\eta_{\mu\nu})(y_{\nu+1}-y_\nu)+f(\xi_{\mu\nu} y_{\nu+1})(x_\mu-x_{\mu+1}) + g(x_\mu \eta_{\mu\nu})(y_\nu-y_{\nu+1}) = 0.$$

Folglich ist auch

$$3) \qquad \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = 0$$

ınd ebenso

$$4) \qquad \lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = 0.$$

ıäßt man aber m und n in's Unendliche wachsen und gleichzeitig lle Differenzen $x_{\mu+1}-x_\mu$ und $y_{\nu+1}-y_\nu$ gegen Null convergieren, so vird andererseits $\sum R_{\mu\nu}$ nach der Definition des Integrals gleich er Summe aller Integrale von $f dx + g dy$ längs der Linien $y = y_\nu$ nd $x = x_\mu$, über jede innere einmal in der einen, einmal in der

---

1) Es ist vielleicht nicht uninteressant, daß bei dieser Fassung, also stets ɔbald f und g stetig sind, der Cauchy'sche Satz sich mit der Existenz on Zahlen ξ, η deckt, die gewissen Bedingungsgleichungen genügen müssen. Ian kann diese Ausdrucksform des Cauchy'schen Satzes noch etwas verein- ıchen: Nimmt man schon in § 2 (1) ein Quadrat statt eines Rechtecks, also $-a = \beta - \alpha$, setzt im ersten und dritten Integral $x = x' + a$, im zweiten und ierten $y = y' + \alpha$ und bezeichnet die Integrationsvariable bei allen vier Inte- ralen, die nun sämtlich dieselben Grenzen 0 und $b-a$ haben, mit z, so kann an alle vier Integrale unter demselben Zeichen zusammenfassen und nun erst en Mittelwertsatz anwenden. Dann tritt an die Stelle der mit dem Cauchy- :hen Satz äquivalenten Gleichnng ($\mathfrak{B}$) die andere

$$\mathfrak{B}') \qquad f(\xi+a, \beta)-f(\xi+a, \alpha) = g(b, \xi+\alpha)-g(a, \xi+\alpha),$$

o ξ im Intervall $(0, b-a)$ oder — w. d. i. — im Intervall $(0, \beta-\alpha)$ liegt.

anderen Richtung erstreckt. Folglich fallen die Integrale über alle inneren Linien fort, und es bleibt nur das Integral über den Rand von $[(a\alpha)(b\beta)]$ mit dem Wert Null zurück.

§ 4.

Der Cauchy'sche Satz bei vorausgesetzter Stetigkeit von f, g, f_2, g_1.

Γa. Sind f, g, f_2, g_1 im Bereich G überall eindeutig und stetig (Voraussetzungen Ca), so ist die überall in G geltende Bedingung

(C) $$f_2(xy) = g_1(xy)$$

notwendig (s. § 2) und hinreichend für den Cauchy-schen Satz (s. das Nähere § 3 bei *A*).

Beweis: Wir teilen das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen, wobei aber nun alle Differenzen

(1) $$x_{\mu+1}-x_\mu = \frac{b-a}{m}, \quad y_{\nu+1}-y_\nu = \frac{\beta-\alpha}{n}$$

sein sollen. Um zu dem über dieses Rechteck erstreckten Integral

(2) $$\int (f\,dx + g\,dy)$$

zu gelangen, bilden wir ähnlich wie in § 3 (2) die Summe

(3) $$\sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu,\nu} \{[f(\xi_\mu y_\nu) - f(\xi_\mu y_{\nu+1})](x_{\mu+1}-x_\mu) + [g(x_{\mu+1}\eta_\nu) - g(x_\mu \eta_\nu)](y_{\nu+1}-y_\nu)\},$$

wo aber jetzt speziell

(4) $$\xi_\mu = \frac{x_{\mu+1}-x_\mu}{2}, \quad \eta_\nu = \frac{y_{\nu+1}-y_\nu}{2}$$

sein soll. Folglich heben sich in (3) alle über die inneren Teilstrecken gebildeten Glieder heraus, und es bleibt

(5) $$\sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = \frac{b-a}{m} \sum_\mu [f(\xi_\mu \alpha) - f(\xi_\mu \beta)] + \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_\nu [g(b\eta_\nu) - g(a\eta_\nu)],$$

eine Summe, die für $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$ in das Integral (2) übergeht.

Andererseits ist in (3) nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$(6)\qquad \begin{cases} f(\xi_\mu y_{\nu+1}) - f(\xi_\mu y_\nu) = f_2(\xi_\mu \eta_{\mu\nu}) \dfrac{\beta-\alpha}{n} \\ g(x_{\mu+1}\eta_\nu) - g(x_\mu \eta_\nu) = g_1(\xi_{\mu\nu}\eta_\nu) \dfrac{b-a}{m}, \end{cases}$$

wo die $\xi_{\mu\nu}$ im Intervall $(x_\mu x_{\mu+1})$, die $\eta_{\mu\nu}$ im Intervall $(y_\nu y_{\nu+1})$ liegen. Also wird

$$(7)\qquad \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu} = \frac{b-a}{m} \cdot \frac{\beta-\alpha}{n} \sum_{\mu\nu} [g_1(\xi_{\mu\nu}\eta_\nu) - f_2(\xi_\mu \eta_{\mu\nu})].$$

Da nun nach Voraussetzung die Bedingung (C) überall in G erfüllt ist, kann man in (7) das Zeichen g_1 durch f_2 ersetzen. Da ferner f_2 stetig im Innern und auf dem Rande von $[(a\alpha)(b\beta)]$, also auch gleichmäßig stetig in diesem Bereich ist, so ist jedes Glied der Summe in (7) für hinlänglich großes m und n absolut genommen $< \varepsilon$, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl ist. Demnach ist

$$(8)\qquad |\sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu}| < \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{mn} \cdot mn\varepsilon = (b-a)(\beta-\alpha)\varepsilon,$$

d. h. beliebig klein, d. h. das Integral (2) erstreckt über das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ hat den Wert Null.

§ 5.

Der Cauchy(-Goursat-)sche Satz bei vorausgesetzter Stetigkeit von f, g und Existenz von df, dg.

Cb. Sind f, g im Bereich G überall eindeutig und stetig und besitzen beide in G überall ein vollständiges erstes Differential (Voraussetzungen Cb), so ist die überall in G geltende Bedingung

$$(\mathfrak{F})\qquad f_2(xy) = g_1(xy)$$

notwendig (s. § 2) und hinreichend für den Cauchy'schen Satz (s. d. Nähere § 3 bei *A*)[1]).

Beweis: Da man jedes Rechteck in Quadrate zerlegen kann, so genügt es, den Satz für ein den Axen parallel gestelltes Quadrat $[(a\alpha)(b\beta)]$ zu beweisen, wo also $b-a = \beta-\alpha$ ist. Das Integral über dessen Peripherie erstreckt, hat den Wert

$$(9)\qquad [f(\xi\alpha) - f(\xi\beta) + g(b\eta) - g(a\eta)](b-a),$$

1) Dies ist, auf reelle Curvenintegrale übertragen, der von Herrn Goursat aufgefundene Satz. Vgl. hierzu die Citate unserer Einleitung.

wo ξ ein gewisser Wert im Intervall (ab), η ein solcher im Intervall $(\alpha\beta)$ ist. Wir müssen also zeigen, daß

$$(2) \qquad |f(\xi\beta)-f(\xi\alpha)-g(b\eta)+g(a\eta)| \equiv d$$

den Wert Null hat.

Zerlegt man das Quadrat $[(a\alpha)(b\beta)]$ in vier kleinere durch Parallele zu den Axen, die die Seiten halbieren, so muß, da das Integral über das große Quadrat gleich der Summe der Integrale über die vier kleineren ist (bei gleichem Integrationssinn), bei mindestens einem von ihnen, das wir $[(a_1\alpha_1)(b_1\beta_1)]$ nennen wollen, das Integral absolut genommen $\geqq \frac{d}{4}(b-a)$ sein. Also, da $b_1-a_1 = \beta_1-\alpha_1 = \frac{b-a}{2}$ ist,

$$(2') \qquad |f(\xi_1\beta_1)-f(\xi_1\alpha_1)-g(b_1\eta_1)+g(a_1\eta_1)| \geqq \frac{d}{2},$$

wo ξ_1, η_1 gewisse Werte im Intervall (a_1b_1) bezw. $(\alpha_1\beta_1)$ sind. Wiederholt man diesen Schluß n Mal, so ist also:

$$(2^{(n)}) \qquad |f(\xi_n\beta_n)-f(\xi_n\alpha_n)-g(b_n\eta_n)+g(a_n\eta_n)| \geqq \frac{d}{2^n}.$$

Da nun von den Quadraten $[(a\alpha)(b\beta)]$, $[(a_1\alpha_1)(b_1\beta_1)]$, ... jedes ganz im vorhergehenden liegt und die Seiten der Quadrate gegen Null convergieren, so schränkt diese Serie von Quadraten einen bestimmten Punkt (x_0y_0) ein. Diesem kommt in Bezug auf eine beliebig kleine positive Zahl ε nach der Voraussetzung Cb eine bestimmte Umgebung zu, sodaß

$$(3) \begin{cases} |f(xy)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(x-x_0)-f_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \\ |g(xy)-g(x_0y_0)-g_1(x_0y_0)(x-x_0)-g_2(x_0y_0)(y-y_0)| < \varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \end{cases}$$
$$\text{für } |x-x_0| < \delta, \quad |y-y_0| < \delta,$$

wo δ eine bestimmte hinlänglich kleine positive Zahl ist.

Bei hinlänglich großem n liegt das Quadrat $[(a_n\alpha_n)(b_n\beta_n)]$ ganz innerhalb dieser Umgebung des Punktes (x_0y_0), d. h. ganz innerhalb des Quadrates $[(x_0-\delta, y_0-\delta), (x_0+\delta, y_0+\delta)]$. Also ist dann nach (3)

$$(4) \begin{cases} |f(\xi_n\beta_n)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi_n-x_0)-f_2(x_0y_0)(\beta_n-y_0)| < \varepsilon\{|\xi_n-x_0|+|\beta_n-y_0|\} \\ |f(\xi_n\alpha_n)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi_n-x_0)-f_2(x_0y_0)(\alpha_n-y_0)| < \varepsilon\{|\xi_n-x_0|+|\alpha_n-y_0|\}. \end{cases}$$

Also weiter, da $|\xi_n-x_0|$, $|\beta_n-y_0|$, $|\alpha_n-y_0| < |\beta_n-\alpha_n|$ sind,

$$(5) \qquad |f(\xi_n\beta_n)-f(\xi_n\alpha_n)-f_2(x_0y_0)(\beta_n-\alpha_n)| < 4\varepsilon|\beta_n-\alpha_n|.$$

Ebenso ergiebt sich

$$(6) \qquad |g(b_n\eta_n)-g(a_n\eta_n)-g_1(x_0y_0)(b_n-a_n)|<4\cdot\varepsilon\cdot|b_n-a_n|.$$

Nach (𝔖) und da $b_n-a_n=\beta_n-\alpha_n$ folgt endlich aus (5) und (6)

$$(7)\ |f(\xi_n\beta_n)-f(\xi_n\alpha_n)-g(b_n\eta_n)+g(a_n\eta_n)|<8\cdot\varepsilon\cdot|b_n-a_n|=\frac{8\cdot\varepsilon|b-a|}{2^n}.$$

Somit liefern ($2^{(n)}$) und (7) das Ergebnis

$$(8) \qquad d<8\varepsilon|b-a|,$$

d. h.

$$(9) \qquad d=0.$$

§ 6.

Folgerungen.

Es sei gestattet, schließlich noch einige Folgerungen aus dem Vorangehenden zu ziehen.

Zunächst sprechen wir über die Gleichheit der zweiten partiellen Differentialquotienten F_{12}, F_{21}, einer Function $F(xy)$ zwei Sätze aus, für die sich uns mittelbar Beweise ergeben haben, und die nicht bekannt zu sein scheinen [1]), übrigens vielleicht auch um dieser Beweisart willen hier Platz finden dürfen.

I. Sind $F(xy)$, $F_1(xy)$, $F_2(xy)$ in einem Bereich G eindeutig und stetig, existieren dort überall F_{12} und F_{21} und ist F_{12} stetig in x **oder** F_{21} in y bei jedem in Betracht kommenden Wert der andern Variabeln, so ist $F_{12}=F_{21}$.

Sind nämlich F, F_1, F_2 eindeutig und stetig in G, so gilt dort nach I § 2 der Cauchy'sche Satz für das Differential F_1dx+F_2dy. Also muß die bei diesen Voraussetzungen notwendige Bedingung erfüllt sein. Diese lautet aber, wenn noch F_{12} und F_{21} existieren, nach II § 2 (5)

$$(1) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\xi=a} F_{12}(\xi\alpha) = F_{21}(a\alpha) \\ F_1(a\alpha) = \lim\limits_{\eta=\alpha} F_{21}(a\eta) \end{cases}$$

für jeden Punkt $(a\alpha)$ in G. Ist also noch F_{12} stetig in x oder F_{21} stetig in y, so gehen diese Gleichungen in $F_{12}(a\alpha)=F_{21}(a\alpha)$ über.

1) Vgl. Encyclop. d. math. Wiss. II. A. 2 (Voss) S. 73. — Stolz, a. a. O. I S. 146 ff.

II. Sind F, F_1, F_2 im Bereich G eindeutig und stetig in beiden Variabeln, und besitzen F_1 und F_2 dort überall ein bestimmtes vollständiges erstes Differential, so ist in G $F_{12} = F_{21}$.

Denn nach I § 2 gilt wieder der Cauchy'sche Satz für das Differential $F_1 dx + F_2 dy$. Da aber jetzt die Voraussetzungen Cb bestehen (s. II § 2), so ist die notwendige Bedingung (C), $F_{12} = F_{21}$, erfüllt.

Nach ganz anderer Richtung hin liegt eine Folgerung, die wir jetzt noch hervorheben wollen.

Mit § 5 (II) ist zugleich ein neuer Beweis des Cauchy-Goursat'schen Satzes (a. a. O.) für eine in G eindeutige und stetige Function einer complexen Variablen $f(z)$, die überall in G einen eindeutig bestimmten Differentialquotienten $f'(z)$ besitzt, gegeben. Da für solche Function $f(z)$ also $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ vom Wege unabhängig ist, so ist $F(z)$ nach I § 4 eine stetige Function mit der stetigen Ableitung $f(z)$. Folglich gilt für $F(z)$ auch der Cauchy'sche Satz und die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe bei jedem Wert $z = \zeta$ in G, woraus die Stetigkeit von $f'(z)$ folgt[1]). Daß hiernach die Voraussetzung der eindeutigen Existenz von $f'(z)$ in G die Stetigkeit von $f'(z)$ schon impliciert, beeinträchtigt natürlich nicht die große theoretische Bedeutung des Goursat'schen Satzes. Aus der Stetigkeit von $f(z)$ und $f'(z)$ in G folgt aber nach Herrn Pringsheim[2]) die gleichmäßige Annäherung des Differenzenquotienten von $f(z)$ an den Differentialquotienten $f'(z)$ im ganzen Bereich G. Also hat man schließlich den einem bekannten Satz über Stetigkeit in einem Bereich analogen Satz:

Nähert sich im Bereich G der Differenzenquotient einer in G eindeutigen und stetigen Function $f(z)$ überall einem bestimmten endlichen Grenzwert $f'(z)$, so ist diese Annäherung im ganzen Bereich G gleichmäßig.

Ich hoffe, bei anderer Gelegenheit einen direkten Beweis dieses Satzes geben zu können.

---

1) Vgl. für diesen Schluß auch Morera, Rend. R. Ist. Lomb. 2. Ser. 19 (1886) S. 304 ff., sowie Encyclop. d. math. Wiss. II. B. 1 (Osgood) S. 15.

2) a. a. O. S. 295 ff.

Bonn, 24. Januar 1902.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515C126 C001 V004
CALCULUS [S.L.
3 0112 017225100